

En cualquier proceso simple de igualación, hay una cantidad que es la igualada, la que se somete a contraste respecto a otra que le sirve de referente. El contraste marca la cantidad a añadir o a quitar a la cantidad igualada. Por consiguiente, tres tipos básicos se originan en esta categoría, según que la incógnita se sitúe en la cantidad que se iguala, la que sirve de contraste o en la diferencia (a añadir o a quitar) resultante. Se puede preguntar, además, si se iguala añadiendo o quitando. Esta doble posibilidad, aplicada a cada uno de los tipos básicos, origina los seis tipos de problemas distintos que componen esta categoría.

Como en la categoría de Cambio, los tipos que ocupan lugar impar (1, 3 y 5) están asociados a añadir, a crecer, mientras que los tipos que ocupan lugar par (2, 4 y 6) se asocian a disminuir o quitar.

3. LAS CATEGORÍAS SEMÁNTICAS MULTIPLICATIVAS

3.1. *Relación entre las categorías semánticas aditivas y multiplicativas*

En puridad, tenemos las mismas categorías semánticas multiplicativas que aditivas:

CAMBIO: En el problema “En cada hoja del álbum puedo pegar 8 cromos. Si el álbum tiene 12 hojas, ¿cuántos cromos se pueden pegar en él?” tenemos una cantidad inicial (8), un cambio que se le aplica ($\times 12$) y una cantidad final (96). La diferencia que tiene este problema respecto a Cambio 1 de la categoría aditiva, es que dicho cambio se produce por “paquetes”, en lugar de por adición. Es evidente que se puede preguntar por más como por menos y que, por tanto, pueden obtenerse hasta seis situaciones o problemas tipo distintos:

Cambio 1: “Un libro vale 14 €. ¿Cuánto cuestan 5 libros?”

Cambio 2: “Un libro vale 14 €. Lo han comprado entre 2 niños. ¿Cuánto ha puesto cada uno?”

Cambio 3: “Un libro vale 14 €. Nos hemos gastado 70 €. ¿Cuántos libros hemos comprado?”

Cambio 4: “Un libro vale 14 €. Los que lo hemos comprado hemos puesto 7 € cada uno. ¿Entre cuántos hemos comprado el libro?”

Cambio 5: “5 libros nos han costado 70 €. ¿Cuánto cuesta uno?”

Cambio 6: “Un libro lo han comprado entre 2 niños. Cada uno ha puesto 7 €. ¿Cuánto ha costado el libro?”

De los seis problemas, dos son de multiplicar (CA1 y CA6) y cuatro son de dividir (CA2, CA3, CA4 y CA5). Ahora bien, ¿no sería redundante repetir uno por uno los problemas, si entre ellos hay enormes parecidos?

Los dos problemas de multiplicar son formalmente idénticos: hay una cantidad inicial (14 ó 7) que se repite el número de veces que se indica. Aquí pierde sentido el que la incógnita sea cantidad inicial o no lo sea. Por tanto, con un sólo problema de multiplicar es suficiente.

Respecto a los cuatro problemas de dividir, han de decirse cosas similares. ¿No son prácticamente idénticos CA3 y CA4? Lo sustancial de los mismos es que se indica cómo se ha repartido el dividendo (CA3 = 70 €; CA4 = 7 €), para a partir de ello averiguar la pregunta. ¿Y en el caso de CA2 y CA5? Se trata, en ambos casos, de repartir el dividendo entre las unidades que se señalan en el divisor. Nótese la diferencia entre CA3 y CA4 por un lado, y CA2 y CA5 por el otro: en el primer caso, se “dividen” euros por euros y obtenemos de cociente libros o niños. En el segundo caso, “repartimos” euros entre libros o niños y obtenemos de cociente, como es lógico, euros.

Por ello, la categoría de cambio multiplicativo se reduce a tres problemas tipo (uno de multiplicar y los dos de dividir), y se pone el acento más en las características del divisor y del multiplicando, que en las que presenta la situación. Por esta razón, en lugar de designar esta categoría como de Cambio Multiplicativo, se llama de Isomorfismo de Medidas o de Grupos Iguales.

COMBINACIÓN. La categoría aditiva de Combinación tiene su correlato en la multiplicativa de Producto Cartesiano, por lo que el nombre de Combinación Multiplicativa también podría ser apropiado. Señalados los elementos de dos o más conjuntos, se trata de establecer cuántas combinaciones elemento a elemento se pueden formar.

Combinación 1 (aditiva): “Hay 8 niños y 12 niñas. ¿Cuántos hay en total?”

Combinación 1 (multiplicativa): “Hay 8 niños y 12 niñas. ¿Cuántas parejas distintas niño-niña se pueden formar?”

El problema de Combinación 2 se replica en su versión multiplicativa. En ambos casos se trata de, conociendo el total y una de las partes, averiguar la otra:

Combinación 2 (aditiva): “Hay 20 alumnas y alumnos. 8 son niños. ¿Cuántas niñas hay?”

Combinación 2 (multiplicativa): “Se pueden formar 96 parejas distintas niño-niña. Si hay 8 niños, ¿cuántas niñas hay?”

Sin embargo, si bien se conserva el mismo número de tipos, no se hace lo mismo con el nombre de la categoría. Se emplea el de Producto Cartesiano, que identifica mejor la característica peculiar del tipo de modelo y de operación que hay que desarrollar para encontrar la solución.

COMPARACIÓN. En una comparación hay tres elementos sustanciales: lo que se compara, aquello con lo que se compara y la diferencia existente. Por otro lado, se puede buscar la comparación en cuánto sobrepasa o en cuánto falta. Por ello, hay también seis problemas de comparación multiplicativa, que se explican más adelante. Hay autores que los denominan Comparación Multiplicativa, y también se les llama de Razón. Pero nosotros hemos decidido emplear el nombre de Escalares, porque no sólo se hace más breve el enunciado, sino que destaca más la característica que tienen estos problemas: la escala o razón de comparación entre las dos cantidades.

IGUALACIÓN. También hay, naturalmente, problemas de Igualación Comparativa. El problema aditivo de Igualación 1 se convierte en "Pedro tiene 25 € y Luis tiene 5 €. ¿Cuántas veces más euros debe tener Luis para que tenga los mismos que Pedro?". Y así sucesivamente, en cada uno de los tipos restantes. Ahora bien, se ha decidido prescindir de esta categoría, puesto que no tiene sentido volver a repetir lo que el alumno ya ha trabajado con anterioridad. Además, las peculiaridades de las operaciones a emplear y las dificultades semánticas que plantea la categoría de Igualación Multiplicativa son idénticas a las de los problemas de Escalares.

Por todo lo anterior, las Categorías Semánticas de las estructuras multiplicativas son:

- **ISOMORFISMO DE MEDIDAS (IM)**, con tres tipos de problemas, de los cuales uno es de multiplicar y dos de dividir.
- **ESCALARES**, con seis tipos de problemas, de los cuales dos son de multiplicar y cuatro de dividir. Por razones didácticas, de una mejor adaptación a las características de los alumnos y con el fin de facilitar su seriación, se divide esta categoría en dos: Escalares Grandes (EG), cuando en la comparación se pregunta por cuántas veces más; y Escalares Pequeños (EP), cuando se pregunta por cuántas veces menos.
- **PRODUCTO CARTESIANO**, con dos tipos de problemas, de los cuales uno es de multiplicar y el otro de dividir.

Una visión general de cada una de las categorías es como sigue:

3.2. La categoría de Isomorfismo de Medidas

T I P O	TEXTO	CANTI- DAD INICIAL	CANTI- DAD "N"	RESUL- TADO	SENTI- DO	OPERA- CIÓN
IM1	En cada hoja del álbum puedo pegar 8 cromos. Si el álbum tiene 12 hojas, ¿cuántos cromos se pueden pegar en él?	8	12	Incógnita	Multipli- cación	Producto (x)
IM2	He pegado 96 cromos en un álbum. El álbum tiene 12 hojas. ¿Cuántos cromos pegaré en cada una?	96	Incógnita	12	Partición	División (:)
IM3	Una colección consta de 96 cromos. Si en cada página del álbum pegamos 8 cromos, ¿cuántas páginas tendrá el álbum?	8	Incógnita	96	Cuotición	División (:)

Tabla 5. Problemas de Isomorfismo de Medidas.

Son problemas que se pueden conceptualizar como "sumas o restas abreviadas", puesto que se podrían resolver de esta forma. Pero hay que tener en cuenta dos consideraciones. Por una parte, se trata de diferenciarlos netamente de los problemas de las estructuras aditivas. Por otra, de entender el papel del multiplicando con respecto al multiplicador.

En el primer caso, no se trata tanto de que el alumno no vea la situación planteada por el problema como susceptible de ser modelizada por una suma (aspecto éste inevitable), sino de que comprenda la rentabilidad de emplear la multiplicación como un sistema más rápido y seguro. En realidad, cuando un alumno dice que un problema de Isomorfismo de Medidas 1 se soluciona con una suma, está dando una respuesta acertada. La cuestión estriba en determinar si es más económico o no aplicar una u otra operación. El artificio que supone la multiplicación sobre la suma explica la naturaleza distinta de las cantidades de cada uno de los factores. La rapidez y economía en la realización de los cálculos debe llevar a los alumnos a elegir el momento en que debe pasar de utilizar un tipo de algoritmo u otro.

No es sólo economía. En el segundo caso, se trata de trabajar de forma específica la transformación de uno de los factores en un mero indicador de las veces que se debe repetir el otro. En un problema del tipo: "Un paquete de caramelos vale 3 €. ¿Cuánto cuestan 23 paquetes?", no se trata de que el alumno entienda que mezcla caramelos con euros (como haría en el caso del producto cartesiano: "¿Cuántos di-

bujos distintos podemos obtener con 23 plantillas y 8 tramas?”), sino que el número de caramelos es el artificio que se emplea para saber cuántas veces se ha de repetir la cantidad de 8 euros.

3.3. *La categoría de Escalares*

Los problemas de ESCALARES son comparativos (incluyen la “escala” que relaciona a las dos cantidades). La diferencia radical entre la categoría anterior (Isomorfismo de Medidas) y ésta es fundamentalmente la naturaleza del multiplicador, que se deriva de la relación que se da entre las cantidades. En primer lugar, no se trata de una cantidad que se repita un número determinado de veces (los treinta y dos euros de Luisa no tienen nada que ver con los de Juan; sin embargo, los noventa y seis cromos del álbum no son más que la reunión de los ocho que hay en cada página). En segundo lugar, el multiplicador no es algo físico, un objeto o una acción que se repita, sino una razón, una proporción, una relación que se establece por la mente. En el caso del álbum, el elemento de repetición son las hojas, que existen y se pueden contar. En Escalares no hay nada real que tenga un cardinal de cuatro: este número es el resultado de una operación mental de comparación, que sólo existe en nuestra cabeza.

Desde un punto de vista didáctico, y a la vista de la experiencia acumulada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de estos problemas, es conveniente separar esta categoría en dos. Una, referida a los problemas impares, aquellos en los que la comparación se hace en más. Pasaría a ser denominada como ESCALARES GRANDES. La otra recogería los problemas pares, aquellos en los que la comparación se hace en menos. Esta subcategoría se denomina ESCALARES PEQUEÑOS.

Para nuestro trabajo, y para el resto de referencias del libro, hablaremos de Escalares Grandes (EG) en los tipos y características de la Tabla 6.

T I P O	TEXTO	CANTI- DAD INICIAL	ESCA- LAR	RESUL- TADO	SENTI- DO	OPERA- CIÓN
EG1	Juan tiene 8 euros. Luisa tiene 4 veces más dinero que él. ¿Cuánto dinero tiene Luisa?	8	4	Incógnita	Aumento	Producto (x)
EG2	Luisa tiene 32 euros y tiene 4 veces más dinero que Juan. ¿Cuánto dinero tiene Juan?	Incógnita	4	32	Partición	División (:)
EG3	Luisa tiene 32 euros. Juan tiene 8. ¿Cuántas veces más dinero tiene Luisa que Juan?	8	Incógnita	32	Cuotición	División (:)

Tabla 6. Problemas de Escalares Grandes

E, igualmente, hablaremos de Escalares Pequeños (EP) en los tipos y características de la Tabla 7.

T I P O	TEXTO	CANTI- DAD INICIAL	ESCA- LAR	RESUL- TADO	SENTI- DO	OPERA- CIÓN
EP1	Juan tiene 8 euros. Tiene 4 veces menos dinero que Luisa. ¿Cuánto dinero tiene Luisa?	8	4	Incógnita	Disminución	Producto (x)
EP2	Luisa tiene 32 euros y Juan tiene 4 veces menos dinero que ella. ¿Cuánto dinero tiene Juan?	Incógnita	4	32	Partición	División (:)
EP3	Luisa tiene 32 euros. Juan tiene 8. ¿Cuántas veces menos dinero tiene Juan que Luisa?	8	Incógnita	32	Cuotición	División (:)

Tabla 7. Problemas de Escalares Pequeños.

3.4. La categoría de Producto Cartesiano

TIPO	TEXTO	CANTIDADES	RESULTADO	SENTIDO	OPERACIÓN
PC1	¿De cuántas formas distintas se pueden combinar 4 camisas y 3 corbatas?	4 y 3	Incógnita	Aumento	Multiplicación (x)
PC2	Se pueden combinar de 12 formas distintas camisas con corbatas. Si hay 4 camisas, ¿cuántas corbatas son necesarias?	Incógnita en una de ellas (4 y ?)	12	Disminución	División (:)

Tabla 8. Problemas de Producto Cartesiano.

Los problemas de Producto Cartesiano son los que se han conceptualizado en último lugar. Son muy difíciles para los alumnos. Emplean cantidades simétricas, por lo que son los únicos de las estructuras multiplicativas que presentan solamente dos tipos. Su presencia en los libros de texto y cuadernos de trabajo de los alumnos es puramente testimonial o, sencillamente, inexistente. Sin embargo, la vida del alumno proporciona situaciones susceptibles de ser modelizadas a través del producto cartesiano, por lo que el interés didáctico de este tipo de problemas es evidente.

El resultado de la multiplicación cartesiana presenta unas características bastante distintas a las que ofrecen los productos de las dos anteriores categorías. Es la que hace referencia a la inexistencia real del resultado en muchas situaciones particulares modelizadas por este tipo de problemas, que sólo es posible como una construcción mental. Sobre tal característica nos extenderemos en el apartado correspondiente del capítulo dedicado a la multiplicación.

4. EXTRAYENDO CONCLUSIONES

Si contamos el número de problemas, nos encontramos con que hay en total treinta y uno: siete de sumar, trece de restar, cuatro de multiplicar y siete de dividir. Por tanto, hemos pasado del infinito a treinta y uno. Ya sí se puede entrenar a los alumnos en esos treinta y un tipos. A lo largo de los seis cursos, tenemos el tiempo y el espacio suficiente para hacerlo. Aprenderán los alumnos “la conjugación del verbo”, y la podrán aplicar a cualquiera de los verbos que se le presenten. En nuestro caso, lo aplicarán a cualquier problema, aunque cambie el escenario, los protagonistas o agentes, o los datos.

Ahora bien, ¿cuándo hay que abordar el aprendizaje concreto de cada uno de los tipos? ¿En qué orden se deben abordar? Responder a estas preguntas no es nada sencillo, pues la respuesta depende de la metodología que se emplee. Si se trata de una metodología clásica, texto escrito y resolución, la investigación nos ha dado respuestas. La secuenciación que se debe llevar en la progresión del dominio de los problemas de una etapa u operación es la que sigue:

Secuenciación de Problemas de una operación.

- PRIMER CICLO: CA1, CA2, CA6, CO1, CM2, CM3, CM4, IG2, IG5, IG6.
- SEGUNDO CICLO: CA3, CA4, CA5, CO2, CM1, CM5, IG1, IG3, IM1, IM2, IM3, ES1.
- TERCER CICLO: CM6, IG4, ES2, ES3, ES4, ES5, ES6, PC1, PC2.

En resumen, en el primer ciclo habría que trabajar diez tipos de problemas: tres de Cambio (1, 2 y 6), uno de Combinación (el 1), tres de Comparación (2, 3 y 4), y otros tres de Igualación (2, 5 y 6).

En el segundo ciclo son doce tipos: tres de Cambio (3, 4 y 5), uno de Combinación (el 2), dos de Comparación (1 y 5), dos de Igualación (1 y 3), los tres de Isomorfismo de Medidas, y, por último, uno de Escalares (el 1).

Finalmente, en el tercer ciclo hay nueve tipos: uno de Comparación (el 6), uno de Igualación (el 4), cinco de Escalares (2, 3, 4, 5 y 6), y los dos de Producto Cartesiano (1 y 2).

Sin embargo, experiencias que hemos llevado a cabo empleando la metodología que recomendamos en cada uno de los problemas, y que se recoge en los correspondientes capítulos dedicados a cada una de las operaciones, permiten un adelanto general de los diversos tipos, y que la totalidad de problemas de una operación se puedan abordar en los dos primeros ciclos de la Educación Primaria. En los capítulos correspondientes a los algoritmos ABN, se ofrece la secuenciación pormenorizada de cada uno de ellos.