I.E.S. “Gonzalo Nazareno” **Matemáticas II**

CONTROL DE GEOMETRÍA **16 Abril-2002**

1) a) Calcula algún valor del parámetro **m** para que el producto vectorial:

(1,2,m) x (1,m,0) tenga la dirección del eje OZ. **(1 punto)**

b) Sean A(1,-5,m), B(3,m,0) y C(m,-5,2) los vértices del triángulo ABC. Determina el valor de **m** para que el triángulo ABC sea rectángulo en A. **(1 punto)**

2) Halla para qué valores de **k** son paralelos el plano π: x + ky – z + 1 = 0 y la recta

$r \equiv \dfrac{x+1}{2} = y = \dfrac{z-1}{-2}$. **(1´5 puntos)**

3) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1,2,3) y es paralela a la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x+3y-z=-2 \\ x-y+3z=4 \end{cases}.$$ **(2 puntos)**

4) a) Halla la posición relativa de las rectas $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{2}$ y $s: x = y = \dfrac{z-1}{5}$.

(1´5 puntos)

b) Calcula la ecuación del plano que contiene a r y pasa por el punto (0,0,1).

(1 punto)

5) a) Dado el tetraedro ABCD, calcula las ecuaciones de los planos que contienen a cada una de sus caras. A(-1,2,6), B(2,1,6), C(4,2,7) y D(-1,5,5). **(1 punto)**

b) Halla el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$. **(1 punto)**

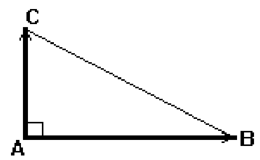
SOLUCIONES

1)a)

$$\begin{matrix}(1,2,m)\\(1,m,0)\end{matrix} \to (1,2,m)x(1,m,0)=\left(\begin{vmatrix}2&m\\m&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}m&1\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\1&m\end{vmatrix}\right)=(-m^2,m,m-2)=a(0,0,1)$$

(para que sea paralelo al vector $\vec{k}$); $\to \begin{matrix}-m^2=0\\ m=0\\ m-2=a\end{matrix} \to \mathbf{m=0}\quad y \quad a=-2$

b)



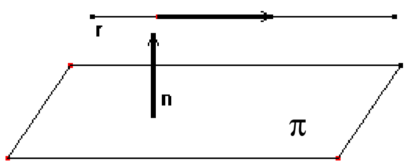
Los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$ deben ser perpendiculares,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0;\ \overrightarrow{AB}=(2,m+5,-m),\ \overrightarrow{AC}=(m-1,0,2-m)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2(m-1)+0+(-m)\cdot(2-m)=0\to m^2-2=0$

$\mathbf{m=\pm\sqrt{2}}$

2) Para que el plano y la recta sean paralelos debe ocurrir que el vector perpendicular al plano, $\overrightarrow{n_\pi}$, y el vector director de la recta, $\overrightarrow{d_r}$, sean perpendiculares.



$\overrightarrow{n_\pi}=(1,k,-1)$, $\overrightarrow{d_r}=(2,1,-2)\to \overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{d_r}=0$

$2+k+2=0\to \mathbf{k=-4}$

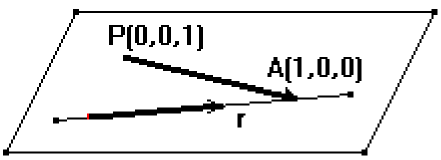
3) Hay que hallar la dirección de la recta r, para ello se hallan las ecuaciones paramétricas de r resolviendo el sistema.

$$r \equiv \begin{cases} 2x+3y-z=-2 \\ x-y+3z=4 \end{cases} \to \begin{cases} 2x+3y=-2+z \\ -2x+2y=-8+6z \end{cases} \to 5y=-10+7z$$

$$\begin{cases} 2x+3y-z=-2 \\ x-y+3z=4 \end{cases} \to \begin{cases} 2x+3y=-2+z \\ 3x-3y=12-9z \end{cases} \to 5x=10-8z \to r \equiv \begin{cases} x=5-\frac{8}{5}t \\ y=-5+\frac{7}{5}t \\ z=t \end{cases} \to \vec{d}_r=(-8,7,5)$$

$$r' \equiv \begin{cases} x=1-8t \\ y=2+7t \\ z=3+5t \end{cases}$$

4) a) $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2}$ y $s: x=y=\frac{z-1}{5}$, para estudiar la posición relativa se hallan, primero, las ecuaciones paramétricas. $r \equiv \begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=2t \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1+5t \end{cases}$ y ahora se resuelve el sistema determinado por las ecuaciones de r y s.



$$\begin{cases} 1+2t = t' \\ 3t = t' \\ 2t = 1+5t' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1+2t = 3t \\ \\ 2t = 1+15t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ \\ t = -\dfrac{1}{13} \end{cases}$$

, por lo tanto el sistema es incompatible y no se cortan. Los vectores directores de **r** y **s** son $\overrightarrow{d_r} = (2,3,2)\ y\ \overrightarrow{d_s} = (1,1,5)$, no son proporcionales, luego **r y s se cruzan**.

b) $\overrightarrow{PA} = (1,0,-1); \overrightarrow{d_r} = (2,3,2); A = (1,0,0)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \mathbf{3x-4y+3z-3=0}$$

5) a) Plano ABC:

$$A(-1,2,6),\ \overrightarrow{AB} = (3,-1,0),\ \overrightarrow{AC} = (5,0,2) \rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-6 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \mathbf{x+3y-5z+35=0}$$

Plano ABD:

$$A(-1,2,6),\ \overrightarrow{AB} = (3,-1,0),\ \overrightarrow{AD} = (0,3,-1) \rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-6 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \mathbf{x+3y+9z-59=0}$$

Plano ACD:

$$A(-1,2,6),\ \overrightarrow{AC} = (5,0,2),\ \overrightarrow{AD} = (0,3,-1) \rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-6 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \mathbf{6x-5y-15z+106=0}$$

Plano BCD:

$$B(2,1,6),\ \overrightarrow{BC} = (2,1,1),\ \overrightarrow{BD} = (-3,4,-1) \rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-6 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \mathbf{5x+y-11z+55=0}$$

b) $\overrightarrow{AB} = (3,-1,0),\ \overrightarrow{AC} = (5,0,2), \overrightarrow{AD} = (0,3,-1) \rightarrow \text{Volumen} = \left\| \begin{matrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{matrix} \right\| = |-23| = \mathbf{23\,u^3}$