SISTEMAS I (CRAMER)

Ejercicio nº 1.-

Estudia la compatibilidad de este sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y=3 \\ -x+3y=-1 \\ -x+6y=2 \\ x-y=5 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 2.-

Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

a) $\left.\begin{array}{r} -x+4y=-6 \\ 2x-3y=7 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=-3 \\ 2x+3y-z=3 \\ x-y+3z=6 \end{array}\right\}$

Ejercicio nº 3.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo si es posible:

a) $\left.\begin{array}{r} x+y+2z=6 \\ 3x-y+z=5 \\ -x+2y-z=1 \\ x+3y-z=7 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} -3x+4y-z=-3 \\ x+2y+z=5 \\ x+y+3z=6 \\ -x-y+2z=-1 \end{array}\right\}$

Ejercicio nº 4.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=1 \\ -x+y-z=2 \\ x+y+3z=3 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 5.-

Resuelve, aplicando la regla de Cramer, los siguientes sistemas:

$$a)\ \left.\begin{array}{l} -x+3y=-5 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{l} -x+2y-z=0 \\ x-3y+z=-3 \\ 2x+y-z=1 \end{array}\right\}$$

SOLUCIONES

Solución nº1:

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ -1 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=1\neq 0 \rightarrow ran(A)=2.$$

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A'=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \rightarrow ran(A')=3$$

Como *ran* (*A)* ≠ *ran* (*A*'), el sistema es incompatible.

Solución nº 2:

$$a)\ \left.\begin{array}{l} -x+4y=-6 \\ 2x-3y=7 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & 7 \end{array}\right); \quad A=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad |A|=-5$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{-10}{-5}=2; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{5}{-5}=-1$$

La solución del sistema es: *x* = 2, *y* = –1

b) $\left.\begin{array}{l} x-2y+z=-3 \\ 2x+3y-z=3 \\ x-y+3z=6 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 17$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{-15}{17}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{45}{17}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{17} = \frac{54}{17}$$

La solución del sistema es : $x = \frac{-15}{17}, \quad y = \frac{45}{17}, \quad z = \frac{54}{17}$

Solución nº 3:

a) Empezamos estudiando la compatibilidad del sistema**.** Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

Luego, *ran* (A) ≥ 2. Además: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0.$ Por tanto, *ran* (A) =3.

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Como $|A'| = 0$, tenemos que $ran\,(A') = 3$

Así, *ran* (A) = *ran* (A') = *n*º *incógnitas.* El sistema es compatible determinado.

Para resolverlo, podemos prescindir de la 4ª ecuación, que es combinación lineal de las otras tres.

Lo resolveremos aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}6 & 1 & 2\\ 5 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}}{11}=\frac{22}{11}=2;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 6 & 2\\ 3 & 5 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}}{11}=\frac{22}{11}=2;\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 6\\ 3 & -1 & 5\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}}{11}=\frac{11}{11}=1$$

La solución del sistema es: $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$

b) En primer lugar, estudiamos la compatibilidad del sistema. Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$ Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-10\neq 0$

Luego, *ran* (*A*) ≥ 2. Además: $\begin{vmatrix}-3 & 4 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=-22\neq 0$ Por tanto, *ran* (*A*) = 3.

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A'=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -1 & -3\\ 1 & 2 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 3 & 6\\ -1 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$ Como $|A'|=0$, $ran(A')=3$.

Así, *ran* (*A*) = *ran* (*A*') = *n*º *incógnitas.* El sistema es compatible determinado.
Para resolverlo, podemos prescindir de la 4ª ecuación, pues es combinación lineal de las otras tres.

Lo resolveremos aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-3 & 4 & -1\\ 5 & 2 & 1\\ 6 & 1 & 3\end{vmatrix}}{-22}=\frac{-44}{-22}=2;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}-3 & -3 & -1\\ 1 & 5 & 1\\ 1 & 6 & 3\end{vmatrix}}{-22}=\frac{-22}{-22}=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}-3 & 4 & -3\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 1 & 6\end{vmatrix}}{-22}=\frac{-22}{-22}=1$$

La solución del sistema es: $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$

Solución nº 4:

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to |A|=0 \to \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \to ran(A)=2$$

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A'=\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-5\neq 0 \to ran(A')=3$$

Como $ran\ (A) \neq ran\ (A')$, el sistema es incompatible.

Solución nº 5:

$$\text{a)}\quad \left.\begin{array}{r} -x+3y=-5 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right);\quad A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\quad |A|=-4$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{-8}{-4}=2;\quad y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{4}{-4}=-1$$

La solución del sistema es: $x = 2$, $y = -1$

$$\text{b)}\quad \left.\begin{array}{r} -x+2y-z=0 \\ x-3y+z=-3 \\ 2x+y-z=1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right);\quad |A|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-3$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3};\quad y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-9}{-3}=3;\quad z=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-14}{-3}=\frac{14}{3}$$

La solución del sistema es: $x=\frac{4}{3};\quad y=3;\quad x=\frac{14}{3}$

SISTEMAS CON PARÁMETROS I(CRAMER)

<u>Ejercicio nº 1.-</u>

Discute y resuelve el siguiente sistema, según los valores del parámetro *m*:

$$\left.\begin{array}{r} mx+y+z=2 \\ x+my\quad\;\; =1 \\ x+my+mz=1 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 2.-

Estudia el siguiente sistema según los valores de los parámetros que contiene. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} -x+y+z=\mu \\ 2x-y+z=2 \\ x+\lambda y+2z=3 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 3.-

Discute el siguiente sistema homogéneo según los diferentes valores del parámetro λ.
Resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x\qquad\quad +2z=0 \\ (\lambda-2)y+z=0 \\ (\lambda-1)x+y-z=0 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 4.-

Estudia el siguiente sistema, en función de *a* y *b*. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+az=1 \\ 2x+y+az=3 \\ x+2y-az=b \end{array}\right\}$$

SOLUCIONES

Solución nº1:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A=\begin{pmatrix} m & 1 & 1\\ 1 & m & 0\\ 1 & m & m\end{pmatrix} \;\rightarrow\; |A|=m^3-m=m\left(m^2-1\right)=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} m=0\\ m=1\\ m=-1\end{cases}$$

- Si $m\neq 0$, $m\neq 1$ y $m\neq -1$ $\rightarrow$ El sistema es compatible determinado. Para cada valor de m, distinto de 0, 1 y –1, tenemos un sistema diferente, todos ellos con solución única:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & m & 0\\ 1 & m & m\end{vmatrix}}{m\left(m^2-1\right)}=\frac{m(2m-1)}{m\left(m^2-1\right)}=\frac{2m-1}{m^2-1}\quad y=\frac{\begin{vmatrix} m & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}}{m\left(m^2-1\right)}=\frac{m(m-2)}{m\left(m^2-1\right)}=\frac{m-2}{m^2-1}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 2\\ 1 & m & 1\\ 1 & m & 1\end{vmatrix}}{m\left(m^2-1\right)}=0$$

$$Solución:\left(\frac{2m-1}{m^2-1},\frac{m-2}{m^2-1},0\right)$$

- Si $m = 0$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$ Las dos últimas filas son iguales y $\begin{vmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0.$ Luego, el sistema es compatible indeterminado.

Las soluciones serían: $\left.\begin{array}{l} y=2-z\\ x=1\\ z=\lambda\end{array}\right\}$ Es decir: $x=1,\ y=2-\lambda,\ z=\lambda,$ con $\lambda\in\mathbf{R}$

- Si $m = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$$ Las ecuaciones 1ª y 3ª son contradictorias. El sistema sería incompatible.

- Si $m = –1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)\rightarrow \begin{array}{c} \text{FILAS}\\ 1^{\text{a}}\cdot(-1)\\ 2^{\text{a}}\\ 3^{\text{a}}\end{array}\begin{array}{c}\\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)\end{array}$$

Las ecuaciones 1ª y 3ª son contradictorias. El sistema sería incompatible.

Solución nº 2:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & \lambda & 2\end{pmatrix} \;\rightarrow\; |A|=3\lambda=0 \;\rightarrow\; \lambda=0$$

- Si $\lambda\neq 0$ $\rightarrow$ El sistema es compatible determinado. Para cada valor de λ

$\neq 0$ y cada valor de μ, tenemos un sistema diferente, cada uno de ellos con solución única. Lo resolvemos:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \mu & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda & 2 \end{vmatrix}}{3\lambda}=\frac{2+2\lambda-2\mu-\lambda\mu}{3\lambda} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & \mu & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{3\lambda}=\frac{3-3\mu}{3\lambda}=\frac{1-\mu}{\lambda}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & \mu \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda & 3 \end{vmatrix}}{3\lambda}=\frac{-1+2\lambda+\mu+2\lambda\mu}{3\lambda}$$

$$Solución: \left(\frac{2+2\lambda-2\mu-\lambda\mu}{3\lambda}, \frac{1-\mu}{\lambda}, \frac{-1+2\lambda+\mu+2\lambda\mu}{3\lambda}\right)$$

- Si $\lambda = 0$, queda:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \mu \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \quad \to \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & \mu \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=\mu-1=0 \quad \to \quad \mu=1$$

Si $\lambda = 0$ y $\mu = 1$ $\to$ *ran* (A) = *ran* (A') = 2 < $n^{\underline{o}}$ *incógnitas.* El sistema es compatible determinado.

Si $\lambda = 0$ y $\mu \neq 1$ $\to$ *ran* (A) = 2 $\neq$ *ran* (A') = 3. El sistema es incompatible.

Solución nº 3:

Por tratarse de un sistema homogéneo, siempre tiene la solución trivial (0, 0, 0). Veamos si tiene, en algún caso, más soluciones.

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \to \quad |A|=-3\lambda^2+7\lambda-4=0 \quad \begin{cases} \lambda=1 \\ \lambda=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

- Para $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq \dfrac{4}{3}$ $\to$ El sistema solo tiene la solución trivial $(0, 0, 0)$.

- Para $\lambda = 1$, queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, $ran(A)=ran(A')=2$.

El sistema sería compatible indeterminado.

Para resolverlo, pasamos z al 2º miembro: $\left.\begin{array}{r} x+2z=0 \\ -y+z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=-2z \\ y=z \end{array}\Bigg\}$ Hacemos $z=\mu$

Las soluciones serían: $x = -2\mu$; $y = \mu$; $z = \mu$, con $\mu \in$ **R**

- Para $\lambda = \dfrac{4}{3}$, queda: $\begin{pmatrix} 4/3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} \end{vmatrix} = \dfrac{-8}{9} \neq 0,\ ran\,(A) = ran\,(A') = 2.$

El sistema sería compatible indeterminado.

Para resolverlo, pasamos z al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{4}{3}x + 2z = 0 \\ \frac{-2}{3}y + z = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} 4x + 6z = 0 \\ -2y + 3z = 0 \end{array}\Bigg\} \quad \begin{array}{r} 4x = -6z \\ -2y = -3z \end{array}\Bigg\} \quad \begin{array}{l} x = \frac{-6}{4}z = \frac{-3}{2}z \\ y = \frac{-3}{-2}z = \frac{3}{2}z \end{array}$$

Las soluciones serían: $x = \dfrac{-3}{2}\mu;\ y = \dfrac{3}{2}\mu;\ z = \mu,$ con $\mu \in \mathbf{R}$

Solución nº 4:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

- Si $a \neq 0 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado, cualquier que sea el valor de b.

- Si $a = 0$, queda: $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = 3b - 6 = 0 \rightarrow b = 2$

  - Si $a = 0$ y $b \neq 2 \rightarrow$ $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$. El sistema es incompatible.
  - Si $a = 0$ y $b = 2 \rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 2 <$ *nº incógnitas.* El sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ z = \lambda \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{4}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1}{3}$$

Las soluciones son: $x = \dfrac{4}{3};\ y = \dfrac{1}{3};\ z = \lambda,$ con $\lambda \in \mathbf{R}$