Examen de SEPTIEMBRE de 2004 **- 1º Bach. C. de la Naturaleza y de la Salud**

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log(11-x^2) = 2\cdot\log(5-x) - \log 2$ b) $4^{x-2} + 2^{x+1} = 20$

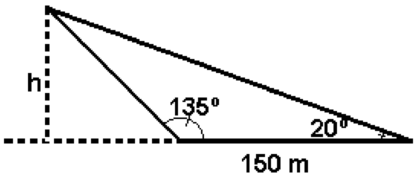
2.- Resuelve la inecuación

$$\frac{x^3 - 4x}{3x^2 - 10x + 3} \leq 0$$

3.- Resuelve las dos ecuaciones trigonométricas siguientes:

a) $6\cdot\cos^2 x + \cos 2x = 1$ b) $\operatorname{sen} 2x = \cos x$

b) 4.- En el triángulo de la figura calcula el perímetro y la altura h.



Todos los ejercicios valen un punto, salvo el número 8 que vale dos puntos.

5.- Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\left(\frac{x^2-25}{\sqrt{4+x}-3}\right)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3-2x^2}{5x-2x^2}\right)^{1-x^3}$

6.- Estudia la continuidad de la función siguiente, especificando qué ocurre en x = 0 según los valores del parámetro *a* .

$$y = \begin{cases} \dfrac{3x+9}{x^2-9} & si \quad x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{a^2}{x^2-4} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

7.- Calcula y simplifica, en lo posible, las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (tg\ x)^{\sqrt{2x}}$ b) $y = sen^2\left(\sqrt{4x - x^2}\right)$

8.- Dibuja la gráfica de la función $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ haciendo previamente un estudio de: la continuidad, las asíntotas, los puntos de corte con los ejes, el crecimiento-decrecimiento, los máximos y mínimos relativos, la concavidad-convexidad y los puntos de inflexión.

9.- Encuentra dos números que sumen 35 , de manera que sea mínima la suma del doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo.

Soluciones Examen de septiembre de 2004 - 1º Bach. C.N.S

1) a) log (11-x^2) = 2·log (5-x) - log2 $\to \log(11-x^2)=\log\frac{(5-x)^2}{2}\to$

$$(11-x^2)=\frac{(5-x)^2}{2}\to\ \Rightarrow\ 2\cdot(11-x^2)=25+x^2-10x\to -3x^2+10x-3=0\left\langle\begin{array}{l}x=3\\ x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Ambas soluciones son válidas pues log2=2log2-log2 y $\log\frac{98}{9}=\log\frac{196}{9}-\log 2$

b) $4^{x-2}+2^{x+1}=20\to\frac{4^x}{4^2}+2\cdot2^x=20\to\ \to\frac{2^{2x}}{16}+2\cdot2^x=20$

Hacemos el cambio $2^x=t:\frac{t^2}{16}+2t-20=0\to t^2+32t-320=0\to t=\left\langle\begin{array}{l}8\\ -40\end{array}\right.$

Por tanto $2^x=\left\langle\begin{array}{l}8\to 2^x=2^3\to x=3\\ -40 \text{ esto no es posible pues } 2^x \text{ es siempre positivo.}\end{array}\right.$

2) $\frac{x^3-4x}{3x^2-10x+3}\leq 0$

Para resolver la inecuación resolvemos las dos ecuaciones siguientes:

$x^3-4x=0\to x(x^2-4)\to x=0; x=2; x=-2$ $\quad 3x^2-10x+3=0\to x=3; x=\frac{1}{3}$

A la vista de las soluciones debemos probar el signo de la función en los intervalos $(-\infty,-2),(-2,0),(0,\frac{1}{3}).(\frac{1}{3},2),(2,3),(3,+\infty)$ .Para ello es más conveniente escribir la inecuación así: $\frac{x(x-2)(x+2)}{3(x-3)(x-\frac{1}{3})}\leq 0$. Tomando un valor para x encada uno de los intervalos, vemos que $\frac{x(x-2)(x+2)}{3(x-3)(x-\frac{1}{3})}$ es negativa en $(-\infty,-2)$ $\cup(0,\frac{1}{3})\cup(2,3)$ .Como la expresión se hace cero en x=-2 y no existe en x=$\frac{1}{3}$ y x=3, la solución de la inecuación es: $(-\infty,-2]\cup\left[0,\frac{1}{3}\right[\cup[2,3)$.

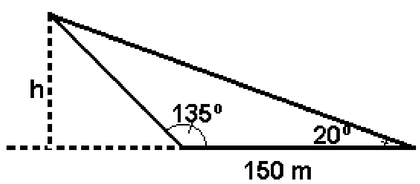
3 a)6·cos^{2}x + cos2x=1 $\to 6\cos^2 x+(\cos^2 x-sen^2 x)=1\to 7\cos^2 x-(1-\cos^2 x)=1\to$

$$8\cos^2 x = 2 \to \cos^2 x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \to \cos x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \begin{cases} \frac{1}{2} \to x = \begin{cases} 60º+360ºK \\ 300º+360K \end{cases} K \in Z \\ -\frac{1}{2} \to x = \begin{cases} 120º+360ºK \\ 240º+360K \end{cases} K \in Z \end{cases}$$

b) sen 2x = cosx $\to$ $2\,\mathrm{sen}x\cos x - \cos x = 0 \to$

$$\cos x(2\,\mathrm{sen}x - 1) = 0 \to \begin{cases} \cos x = 0 \to x = \begin{cases} 90º+360ºK \\ 270º+360ºK \end{cases} K \in Z \\ \mathrm{sen}x = \frac{1}{2} \to x = \begin{cases} 30º+360ºK \\ 150º+360ºK \end{cases} K \in Z \end{cases}$$

4)



para calcular el perímetro necesitamos la medida de todos sus lados.Primero calculamos el ángulo que falta :su medida será:180º-(135º+20º)=25º. Llamamos a, al lado opuesto al ángulo de 135º, b, al lado opuesto al ángulo de 20º y c, al lado opuesto al ángulo de 25º.

Aplicando el teorema del seno: $\frac{a}{sen135º} = \frac{b}{sen20º} = \frac{150}{sen25º}$ De aquí obtenemos:

$a = \frac{150 \cdot sen135º}{sen25º} \approx 250{,}97$ $\qquad$ $b = \frac{150 \cdot sen20º}{sen25º} \approx 121{,}39$

Por tanto el perímetro es:522,33

Para calcular h utilizamos el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es b.
Como el suplementario de 135º es 45º, podemos decir:

$sen45º = \frac{h}{b} = \frac{h}{121{,}39} \to h = 121{,}39 \cdot sen45º \approx 85{,}8$ Por tanto h =85,8m.aproximadamente

5) $\lim_{x\to 5} \left(\frac{x^2 - 25}{\sqrt{4+x} - 3} \right) = \frac{0}{0}$ Hay que quitar la indeterminación: $\lim_{x\to 5} \left(\frac{x^2 - 25}{\sqrt{4+x} - 3} \right) =$

$$\lim_{x\to 5} \left(\frac{(x^2 - 25)(\sqrt{4+x}+3)}{(\sqrt{4+x} - 3)(\sqrt{4+x}+3)} \right) = \lim_{x\to 5} \left(\frac{(x-5)(x+5)(\sqrt{4+x}+3)}{(4+x) - 9} \right) = =$$

$$= \lim_{x\to 5} \left(\frac{(x-5)(x+5)(\sqrt{4+x}+3)}{(4+x) - 9} \right) = \lim_{x\to 5} \left(\frac{(x-5)(x+5)(\sqrt{4+x}+3)}{(x-5)} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 5} (x+5)(\sqrt{4+x}+3) = 10(\sqrt{9}+3) = 60$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3-2x^2}{5x-2x^2}\right)^{1-x^3}=1^{-\infty}$ esta indeterminación está relacionada con el número e:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3-2x^2}{5x-2x^2}\right)^{1-x^3}= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3-2x^2}{5x-2x^2}-1\right)(1-x^3)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-2x^2-5x+2x^2}{5x-2x^2}(1-x^3)}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(3-5x)(1-x^3)}{5x-2x^2}}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^4-3x^3-5x+3}{5x-2x^2}}= e^{+\infty}=+\infty$$

6) $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+9}{x^2-9} & si \quad x\le 0\\[2mm] \dfrac{a^2}{x^2-4} & si \quad x>0\end{cases}$

La primera rama es continua en todos los puntos de $(-\infty,0)$ a excepción de x=-3 :

$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3x+9}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3}{(x-3)}=\dfrac{3}{-6}=\dfrac{-1}{2}$ Por tanto en x=-3 hay una discontinuidad de salto infinito. (Nótese que 3 no está en el primer intervalo.)

La segunda rama es continua en todos los puntos de $(0,+\infty)$ a excepción de x=2 donde hay una discontinuidad de salto infinito. (Nótese que -2 no está en el primer intervalo.).

Estudiemos la continuidad en x=0 : Para que la función sea continua en x=0 deben ser iguales los limites laterales y la imagen de 0 : f(0)= -1 ;

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{3x+9}{x^2-9}=-1$ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{a^2}{x^2-4}=\dfrac{a^2}{-4}$

Para que $f(x)$ sea continua en x=0 debe cumplirse:- 1= $\dfrac{a^2}{-4}\to a^2=4\to a=2; a=-2$ Por tanto para $a\neq 2$ y $a\neq -2$;ex x=0 hay una discontinuidad de salto finito.

7)a)Tomamos: $Ln\ \ y=Ln(tg\ x)^{\sqrt{2x}}\to\ Ln\ \ y=\sqrt{2x}\cdot Ln(tg\ x)\to$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{2\sqrt{2x}}\cdot Ln(tgx)+\sqrt{2x}\cdot\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2x}}\cdot Ln(tgx)+\sqrt{2x}\cdot\frac{1}{senx}\cdot\frac{1}{\cos x}=$$

$$=\frac{Ln(tgx)\cdot senx\cdot\cos x+2x}{\sqrt{2x}\cdot senx\cdot\cos x}$$

b) $y'=2sen(\sqrt{4x-x^2})\cdot\cos\sqrt{4x-x^2}\cdot\dfrac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}=$

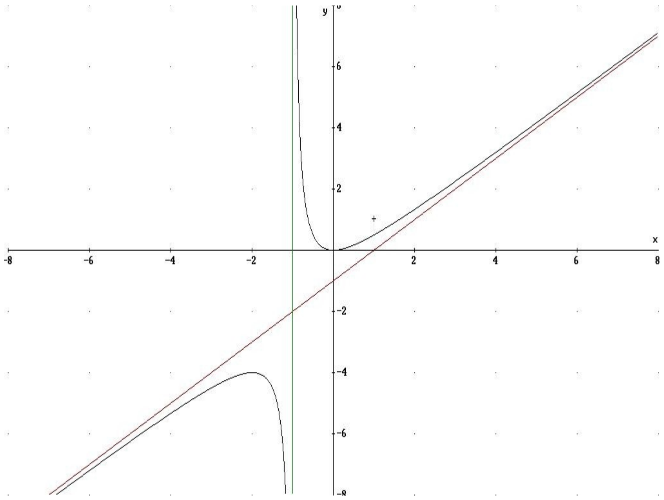
$$2sen(\sqrt{4x-x^2})\cdot\cos\sqrt{4x-x^2}\cdot\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}=(sen2(\sqrt{4x-x^2}))\cdot\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$$

8) Dom(f)=R-$\{-1\}$ Esta función es continua en R-$\{-1\}$; En x=-1 no tiene imagen.

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

En x=-1 Tiene una discontinuidad de salto infinito

Tiene por tanto una asíntota vertical de ramas divergentes en x=-1
No tiene asíntotas horizontales.
f(x) $=\frac{x^2}{x+1}$ dividiendo numerador entre denominador obtenemos $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$
por tanto tiene asíntota oblicua en y=x-1;
La posición de la curva respecto a la asíntota oblicua es: $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0^+ \Rightarrow$ curva por encima de la asíntota. $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x+1} = 0^- \Rightarrow$ curva por debajo de la asíntota.



Cortes con los ejes: $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.
Con el eje y: $f(0) = \frac{0^2}{0+1} = 0$; Corte en (0,0)
Con el eje x:
$\frac{x^2}{x+1} = 0 \to x^2 = 0 \to x = 0$ Corte en (0,0)
Para estudiar el crecimiento hallamos
$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x+1) - x^2\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \to x(x+2) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$f'(x)$ no existe en x=-1 Probamos el signo de la derivada en los intervalos: $(-\infty,-2), (-2,-1), (-1,0), (0.+\infty)$ .Vemos que es positiva en $(-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$ Y negativa en $(-2,-1) \cup (-1,0)$ Esto quiere decir que la función crece en $(-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$ y decrece en $(-2,-1) \cup (-1,0)$ Por tanto tiene un mínimo relativo en (0,0) y un máximo relativo en (–2,-4).
Para estudiar la concavidad convexidad y puntos de inflexión, estudiamos $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{(2x+2)\cdot(x+1)^2 - (x^2+2x)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(2x+2)\cdot(x+1) - (x^2+2x)\cdot 2}{(x+1)^3} =$$

$=\dfrac{2}{(x+1)^3}$; $f'''(x)$ nunca se anula y no existe en x=-1.Estudiamos el signo de $f'''(x)$ en los intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,+\infty)$ Vemos que es positiva en $(-1,+\infty)$ Y negativa en $(-\infty,-1)$ Esto quiere decir que la función es $\cup$ en $(-1,+\infty)$ y es $\cap$ en $(-\infty,-1)$.
En x=-1 no hay punto de inflexión por no pertenecer –1, al dominio de la función.

9) $x+y=35 \to y=35-x$ $S(x,y)=2x^2+3y^2 \to S(x)=2x^2+3(35-x)^2=$
$2x^2+3(35^2-70x+x^2)$

$S(x)=2x^2+3675-210x+3x^2$

$S'(x)=4x+-210+6x=10x-210$. Para que haya un mínimo, $S'(x)=0 \to$

$\to 10x-210=0 \to x=\dfrac{210}{10}=21$

Probamos el signo de $S'(x)$ en los intervalos $(-\infty,21)$,$(21,+\infty)$
$S'(x)$ es positiva en $(21,+\infty) \Rightarrow f(x)$ es creciente en $(21,+\infty)$. $S'(x)$ es negativa en $(-\infty,21) \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $(21,+\infty)$ Por tanto $S(x)$ tiene un mínimo para x=21. Los números son x=21 y=14.