GLOBAL DE FUNCIONES. 2004 **Ficha 8**

1. Dadas las cuatro funciones

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2+3x}{x^2-4x+4}} \qquad g(x)=\frac{x-4}{\log(3x-8)} \qquad h(x)=1+\sqrt{5x-7} \qquad j(x)=\frac{3x}{4x+2}$$

   a) Calcula el dominio de f y de g.
   b) Halla las fórmulas de las inversas de h y j.
   c) Halla la fórmula de $h \circ j$ simplificando la expresión final.

2 p.

2. Dadas la función $f \to y=\begin{cases} 2\sqrt{4-x} & si \quad x<0 \\ x^2-6x+5 & si \quad 0\le x<4 \\ \dfrac{x+5}{x-7} & si \quad x\ge 4 \end{cases}$

2´5 p.

   a) halla su dominio,
   b) dibuja su gráfica,
   c) halla los cortes con los ejes, si hay,
   d) halla su recorrido,
   e) a la vista de su gráfica, di si es o no inyectiva,
   f) a la vista de su gráfica, di qué discontinuidades tiene.

3. Halla los siguientes límites, haciendo el cálculo detallado:

2 p.

   a) $\lim_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\sqrt{4x^3+4}}{5+\sqrt{x^3}}\right)^{3x+4}$ b) $\lim_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x^2+x}{2x^2-5}\right)^{3-x}$

4. Dada la función $m \to y=\begin{cases} \dfrac{x}{x^2-9} & \text{si} \quad x<3 \\ \dfrac{x^2-3x}{3x^2-7x-6} & \text{si} \quad x\ge 3 \end{cases}$

2 p.

   a) Estudia su continuidad dando una idea gráfica de lo que ocurre en cada punto de discontinuidad, si los hay.
   b) Calcula, sin hacer el calculo detallado, $\lim_{x\to -\infty} m(x)$ y $\lim_{x\to +\infty} m(x)$.

5. ¿Cuánto deben valer los parámetros a y b para sea continua en todo R la función siguiente?

$$f \to y=\begin{cases} \mathrm{a}\sqrt{2-x} & \text{si} \quad x<-2 \\ 3\mathrm{a}-\mathrm{bx} & \text{si} \quad -2\le x<3 \\ 4x+\ln(x-2) & \text{si} \quad x\ge 3 \end{cases}$$

1´5 p.

SOLUCIONES GLOBAL DE FUNCIONES. 2004 **SOLUCIONES** **Ficha 8**

1

a) f(x): para que exista la imagen de un elemento, debe hacer el radicando positivo o cero:

$\frac{x^2+3x}{x^2-4x+4} \geq 0$ Resolvemos la inecuación resolviendo previamente las ecuaciones

$x^2+3x=0$ y $x^2-4x+4=0$ Las soluciones de la primera son x=0 y x=-3 y la de la segunda x=2.

Probamos un valor intermedio en los intervalos $(-\infty,-3)(-3,0)(0,2)(2,+\infty)$ y vemos que el radicando es positivo en $(-\infty,-3)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$.

Por tanto el dominio de f(x)= $(-\infty,+3]\cup[0,2)\cup(2,+\infty)$

G(x):Debemos ver donde (3x-8)es estrictamente positivo y además el denominador debe ser distinto de cero;como $\log 1=0$ debe ser (3x-8) distinto de 1.resolvemos 3x-8=1$\rightarrow$ x=3 Por tanto el dominio de g(x)= $(\frac{8}{3},3)\cup(3,+\infty)$.

b) Cálculo de $h^{-1}(x): x=1+\sqrt{5y-7} \rightarrow x-1=\sqrt{5y-7} \rightarrow (x-1)^2=5y-7 \rightarrow y=\frac{(x-1)^2+7}{5}$;

$$h^{-1}(x)=\frac{(x-1)^2+7}{5}$$

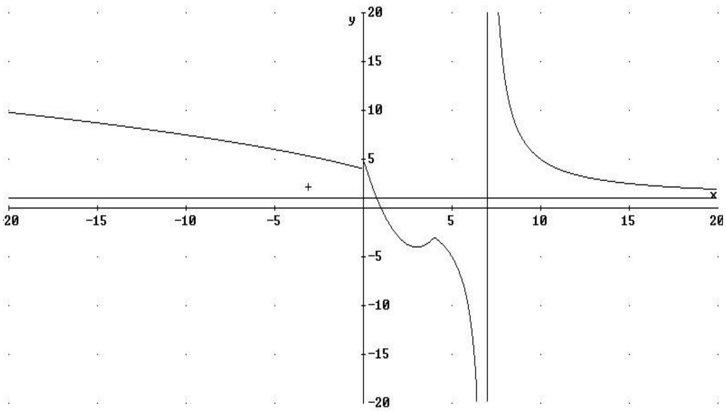
Cálculo de $j^{-1}(x)$: x= $\frac{3y}{4y+2} \rightarrow 4xy+2x=3y \rightarrow 2x=(3-4x)y \rightarrow \frac{2x}{3-4x}=y$; $j^{-1}(x)==\frac{2x}{3-4x}$

c) $(h\circ j)(x)=h(j(x))=h\left(\frac{3x}{4x+2}\right)=1+\sqrt{5\frac{3x}{4x+2}-7}=1+\sqrt{\frac{15x}{4x+2}-7}=1+\sqrt{\frac{-13x-14}{4x+2}}$

2

a) $\sqrt{4-x}$ se puede calcular en x<0; x^2-6x+5 se puede calcular en todo $\Re$; $\frac{x+5}{x-7}$ no se puede calcular en x=7. Por tanto D(f)= $\Re - \{7\}$

b)Gráfica:



c) Cortes: $\begin{cases} \text{Zona 1: no hay cortes.} \\ \text{Zona 2:} \begin{cases} \text{corte con eje x: (1,0)} \\ \text{corte co eje y: (0,5)} \end{cases} \\ \text{Zona 3: No hay cortes.} \end{cases}$

d) observando la gráfica:Rec= $\Re$.
e) No es inyectiva ya que por ejemplo: f(0)=5 y f(10)=5
f)Hay dos discontinuidades:
en x=0 de salto finito y en x=7 de salto infinito.
3

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{4x^3+4}}{5+\sqrt{x^3}}\right)^{3x+4}=2^{+\infty}=+\infty$

Detallamos : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{4x^3+4}}{5+\sqrt{x^3}}\right)=\lim_{x\to+\infty}=\frac{\frac{\sqrt{4x^3+4}}{\sqrt{x^3}}}{\frac{5+\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}}}=\lim_{x\to+\infty}=\frac{\sqrt{4+\frac{4}{x^3}}}{\sqrt{\frac{5^2}{x^3}+1}}=\frac{\sqrt{4}}{2}=1.$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+x}{2x^2-5}\right)^{3-x}=1^{-\infty}=e^{\lim_{x\to+\infty}(3-x)\left(\frac{2x^2+x}{2x^2-5}-1\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}(3-x)\left(\frac{2x^2+x-2x^2+5}{2x^2-5}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2-2x+15}{2x^2-5}\right)}=$

$e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

4 a) $x^2-9=0\rightarrow x=\begin{cases}+3\\-3\end{cases}$; $3x^2-7x-6=0\rightarrow x=\begin{cases}3\\-\frac{2}{3}\end{cases}$ Teniendo en cuenta los intervalos donde se aplica cada fórmula, los candidatos a discontinuidad son: x=3,y x= –3

En x=3: $m(3)=\frac{9-9}{27-21-6}=\frac{0}{0}$ no existe imagen.

$$\lim_{x\to3}m(x)=\begin{cases}\lim_{x\to3^-}m(x)=\lim_{x\to3^-}\frac{x}{x^2-9}=\frac{3}{0^-}=-\infty\\ \lim_{x\to3^+}m(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{x^2-3x}{3x^2-7x-6}=\frac{x(x-3)}{(x-3)(3x+2)}=\frac{3}{11}\end{cases}$$ No existe límite. En x=3;hay una discontinuidad de salto infinito.

En x=-3: $m(-3)=\frac{3}{0}$ no existe imagen.

$$\lim_{x\to-3}m(x)=\begin{cases}\lim_{x\to-3^-}m(x)=-\infty\\ \lim_{x\to-3^+}m(x)=+\infty\end{cases}$$ No existe límite. En x=-3;hay una discontinuidad de salto infinito.

b) $\lim_{x\to-\infty}m(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-9}=0$ $\lim_{x\to+\infty}m(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x}{3x^2-7x-6}=\frac{1}{3}$

5Observando las fórmulas de cada intervalo vemos que los únicos puntos donde puede haber discontinuidad son los puntos frontera: x=-2 y x=3.

En x=-2: $f(-2)=3a+2b$; $\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-} a\sqrt{2-x}=a\sqrt{4}=2a$; $\lim_{x\to -2^+} f(x)=$

$\lim_{x\to -2^+}(3a-bx)=3a+2b$

Por tanto debe cumplirse: $2a=3a+2b\to a+2b=0$

En x=3: $f(3)=12+Ln1=12$; $\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(3a-bx)=3a-3b$; $\lim_{x\to 3^+} f(x)=$

$\lim_{x\to 3^+}(4x+Ln(x-2))=12$

Por tanto debe cumplirse: $3a-3b=12$

Para ser continua en todo $\Re$ debe cumplirse : $\begin{cases} a+2b=0 \\ 3a-3b=12 \end{cases}$ Resolviendo el sistema obtenemos:

$a=\frac{8}{3}; b=-\frac{4}{3}$