El alumno elegirá y desarrollará en su totalidad una de las opciones propuestas, no pudiendo en ningún caso combinar ambas.

OPCIÓN A

1. a) Tres amigos, Marcos, Luis y Miguel, son aficionados a la música. Entre los tres poseen un total de discos compactos (CD), comprendidos entre 16 y 22. Marcos presta 4 CD a Miguel, Luis presta 1 CD a Marcos y Miguel presta 2 CD a Luis, con lo cual los tres amigos tiene ahora el mismo número de CD. ¿Cuántos CD pueden tener en total (2 puntos).

b) **Si A y B son dos matrices cualquiera, ¿es correcta la siguiente cadena de igualdades?:**

$$(A + B)(A - B) = A(A - B) + B(A - B) = AA - AB + BA - BB =$$
$$= A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$$

Justifique la respuesta. (1 punto).

2. Un rectángulo mide 8 dm de largo y 4 dm de ancho. De cada esquina se recorta un cuadrado de lado x con el fin de hacer una caja sin tapa.

b) **Calcule el volumen de la caja en función de x. (1 punto).**
c) **Halle x para que el volumen sea máximo. (1 punto).**
d) **Halle dicho volumen máximo. (1 punto).**

<u>3. Parte I</u>

Ana, Juan y Raúl, que están esperando para realizar una consulta médica, sortean, al azar, el orden en que van a entrar.

a) **Calcule la probabilidad de que los dos últimos en entrar sean hombres. (0,75 puntos).**

b) **Determine si son independientes los sucesos S_1 y S_2, siendo:**

S_1: "la mujer entra antes que alguno de los hombres".
S_2: "Los dos hombres entran consecutivamente" (1,25 puntos).

<u>3. Parte II</u>

Se ha tomado una muestra de los precios de un mismo producto alimenticio en 16 comercios, elegidos al azar en un barrio de una ciudad, y se han encontrado los siguientes precios:

95, 108, 97, 112, 99, 106, 105, 100, 99, 98, 104, 110, 107, 111, 103, 110

Suponiendo que los precios de este producto se distribuyen según una normal de varianza 25 y media desconocida:

a) **¿Cuál es la distribución de la media muestral? (1 punto).**

b) **Determine el intervalo de confianza, al 95%, para la media poblacional. (1 punto).**

Hay que elegir y desarrollar un ejercicio de (el 1 o el 2) de cada uno de los cuatro apartados que siguen (A, B, C y D). Los ejercicios d ellos apartados A y B se evalúan sobre un máximo de 3 puntos y los de los apartados C y D sobre un máximo de 2 puntos.

Apartado A

A1. Resolver la ecuación matricial AX=BX+C, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A2. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. La unidad de tipo A se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 4.000 pesetas. La de tipo B se vende a 5.000 pesetas y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata.
Si sólo dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Apartado B

B1. De una función *f*(x) se sabe que está definida en el intervalo [0, 4] y que la gráfica de su derivada *f*´(x) es la línea quebrada que une los puntos (0, 1), (2, -1) y (4, 1).
Hallar razonadamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*(x) y sus extremos relativos.

B2. Calcular $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$
¿Cuál es el significado geométrico del valor de esa integral?

Apartado C

C1. Si se elige al azar una permutación de las cifras 1, 2, 3, 4, 5, ¿cuál es la probabilidad de que no encontremos cifras impares juntas?

C2. Un estudiante se presenta a un examen tipo test compuesto por cien preguntas, cada una de las cuales va acompañada de cuatro respuestas (y sólo una es correcta).

Sesenta de las preguntas corresponden a la parte del programa que el estudiante ha preparado y en las que tiene una probabilidad del 80% de contestar acertadamente. En las preguntas restantes, señalará al azar una de las cuatro respuestas.
Si se elige al azar una de las preguntas, ¿cuál es la probabilidad de que su respuesta sea correcta?

Apartado D

D1. En la ciudad A, la edad de sus 400.000 habitantes sigue una distribución normal de media 41 años y desviación típica 12 años. En la ciudad B, con el doble de habitantes, la edad se distribuye normalmente con media 47 años y desviación típica 8 años.
¿En cuál de las dos ciudades es mayor la proporción de habitantes mayores de 65 años?
¿Cuál de las dos ciudades tiene mayor número de habitantes con edad superior a 65 años?

D2. Según la ley electoral de cierto país, para obtener representación parlamentaria un partido político ha de conseguir, en las elecciones correspondientes, al menos el 5% de los votos.
Próximas a celebrarse tales elecciones, una encuesta realizada sobre 1.000 ciudadanos elegidos al azar revela que 36 de ellos votarán al partido P. ¿Puede estimarse, con un nivel de significación del 5%, que P tendrá representación parlamentaria? ¿Y con un nivel de significación del 1%?

Solución A1:

$AX = BX + C \qquad AX - BX = C \qquad (A - B)X = C \qquad X = (A - B)^{-1}C$

Como $A - B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, su adjunta es $(Adj) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $|A - B| = -1$, se tiene que

$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Luego,

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución A2:

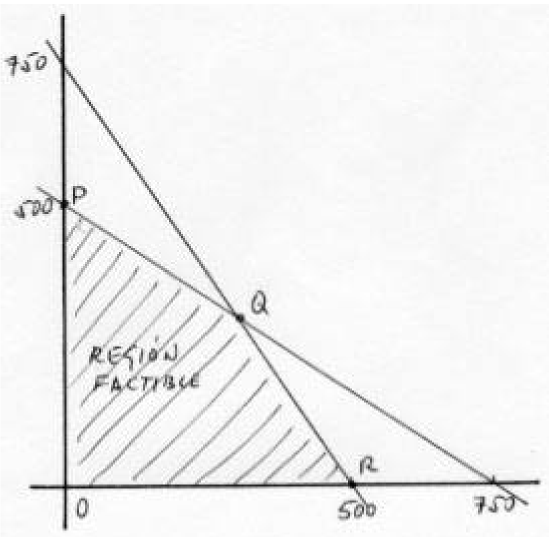
Con los datos del problema se tiene:

	Cantidad	Oro	Plata	Precio
A	x	1x	1,5x	4000x
B	y	1,5y	1y	5000y
Existencias		750 g	750 g	

El objetivo es obtener máximo beneficio (que admitimos que coincide con el máximo de ingresos por venta). Esto es:

Maximizar $B(x, y) = 4000x + 5000y$
sujeta a las restricciones: $x + 1{,}5y \leq 750$
$1{,}5x + y \leq 750$
$x \geq 0;\ y \geq 0$

Estas restricciones generan la región factible dada en la figura adjunta.



Como sabemos, la solución óptima se da en la frontera de esa región factible, Más en concreto, en alguno de sus vértices, que son: O=(0, 0), P=(0, 500), Q=(300, 300) y R(500, 0). Donde Q es la solución del sistema:

$$x + 1{,}5y = 750$$
$$1{,}5x + y = 750.$$

El beneficio en esos puntos es:

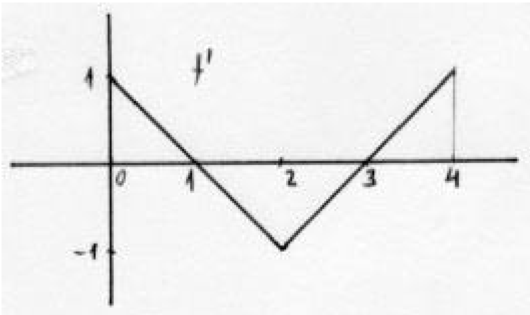
En O, B(0, 0) = 0.
En P, B(0, 500) = 2.500.000
En Q, B(300, 300) = 2.700.500.

En R, B(500, 0) = 2.000.000.

El beneficio máximo se obtiene en Q=(300, 300), fabricando 300 joyas de cada tipo.

Solución B1:

La gráfica de f' es la dada en siguiente figura:



Como puede verse, $f'>0$ en los intervalos [0, 1) y (3, 4]; por tanto, f será creciente en esos intervalos.
Igualmente, $f'<0$ en el intervalo (1, 3); por tanto, f será decreciente entre 1 y 3.

En x = 1 y x = 3, $f' = 0$, luego, en esos puntos puede haber máximos o mínimos.
Como a la izquierda de x = 1, f es creciente, y a su derecha es decreciente, en x = 1 hay un máximo.

Idéntico razonamiento, pero al revés, nos permite deducir que en x = 3 hay un mínimo.

Solución B2:

La expresión $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$.

Luego,

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + L(x+1)\right]_0^1 = L2 - \frac{1}{2}$$

Como la función $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ es positiva en el intervalo de integración, [0, 1], el valor hallado es el número correspondiente al área encerrada en la curva de $f(x)$, el eje OX, y las rectas x = 0 y x = 1.

Solución C1:

Si I designa impar y P, par, la colocación buscada debe ser IPIPI.

Su número $P_3 \cdot P_2 = 6 \cdot 2 = 12$.

Por otra parte, el número de permutaciones de 5 es, $P_5 = 120$.

Luego, la probabilidad pedida es, $p = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$

Solución C2:

Sea RC = respuesta correcta; PP = pregunta preparada; PN = pregunta no preparada.

Por la probabilidad total, se tiene:

$$P(RC) = P(PP)\cdot P(RC/PP) + P(PN)\cdot P(RC/PN) =$$

$$= 0{,}6\cdot 0{,}8 + 0{,}4\cdot 0{,}25 = 0{,}48 + 0{,}1 = 0{,}58.$$

Solución D1:

Ciudad A: N(41, 12)

$$P(X>65) = P\left(Z > \frac{65-41}{12}\right) = P(Z>2) = 1\text{-}0{,}9772=0{,}0228$$

Ciudadanos mayores de 65: 400.000·0,0228 = 9.120

Ciudad B: N(47, 8)

$$P(X>65) = P\left(Z > \frac{65-47}{8}\right) = P(Z>2{,}25) = 1 - 0{,}9878 = 0{,}0122$$

Ciudadanos mayores de 65: 800.000·0,0122 = 9.760

La proporción de mayores de 65 años es superior en la ciudad A.

El número de ciudadanos mayores de 65 años es mayor en B.

Solución D2:

El intervalo de confianza para la proporción de la población es:
$\left(p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}},\ \ p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$, siendo p la proporción de la muestra, q=1-p, n el tamaño y $Z_{\alpha/2}$ es el valor correspondiente, en la tabla normal, para una significación α.

En nuestro caso, p = 0,036, q = 0,964 y n = 1000.

Para el 95% de confianza (significación del 5%) $Z_{\alpha/2}$ =1,96, luego el intervalo para la proporción es:

$$\left(0{,}036 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}036\cdot 0{,}964}{1000}},\ 0{,}036 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}036\cdot 0{,}964}{1000}}\right) = (0{,}0245,\ \ 0{,}0475)$$

Como el valor 0,05, correspondiente al 5%, no cae en ese intervalo, para un 95% de confianza hay que concluir que el partido P no tendrá representación parlamentaria.

Para el 99% de confianza ($Z_{\alpha/2}$ =2,57), el intervalo para la proporción es

(0,0209, 0,0511)

Como el valor 0,05 cae en ese intervalo, para un 99% de confianza (significación 1%) hay que concluir que el partido P puede obtener representación parlamentaria.

Nota: Podría argumentarse que se ha utilizado un valor de *p* no correcto: que *p* tendría que ser 0,05, y, en consecuencia, habría que hacer un estudio basándonos en la normal N(0,05, 0,00689), que es el resultado para p = 0,05, q = 0,95 y n = 1000. Indicando, además, las hipótesis nula y alternativa:

H_0: p>0,5 H_1: p<0,5

Si así fuese:

· el 95% de las muestras obtenidas de esa población tendrían una proporción muestral superior a $0{,}05-1{,}645\sqrt{\frac{0{,}05\cdot 0{,}95}{1000}}$ =0,0387. (El valor 1,645= Z_α , para α =0,05)

Como 0,036<0,0387, habrá que rechazar la hipótesis de que p>0,05, con una confianza del 95%.

· el 99% de las muestras obtenidas de esa población tendrían una proporción muestral superior a $0{,}05-2{,}33\sqrt{\frac{0{,}05\cdot 0{,}95}{1000}}$ =0,0339. (El valor 2,33= Z_α , para α =0,01)

Como 0,036>0,0339, para una confianza del 99% no se puede rechazar la hipótesis de que p>0,05; y el resultado de la encuesta podría ser debido al azar.

El alumno deberá elegir y responder a dos cuestiones de cada uno de los bloques A, B, C.

BLOQUE A. **(Puntuación: 6,5 puntos)**

1. **Discutir, según los valores del parámetro λ, el sistema de ecuaciones lineales**

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 2x + y + \lambda z &= \lambda \\ x + y - \lambda z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

2. **Un capitán tiene tres compañías: una de suizos, otra de zuavos y una tercera de sajones. Al asaltar una fortaleza promete una recompensa de 901 escudos que se repartirán de la siguiente forma: el soldado que primero suba y todos los de su compañía recibirán un escudo; el resto de la recompensa se repartirá a partes iguales entre el resto de los soldados.**
   Sabiendo que si el primero que sube es un suizo, los de las demás compañías reciben medio escudo; si el primero es zuavo, los restantes reciben un tercio de escudo, y si el primero es sajón, un cuarto de escudo, ¿cuántos hombres hay en cada compañía?

3. **Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos. Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y que el número de mecánicos no supere el doble que el de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos. El beneficio de la empresa por jornada es de 25.000 pesetas por electricista y 20.000 pesetas por mecánico.**
   ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio?

BLOQUE B: **(Puntuación: 7 puntos)**

1. **Representar gráficamente la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } -3 \le x \le 0 \\ 0, & \text{si } 0 < x \le 1 \\ -1, & \text{si } 1 < x \le 2 \\ -2, & \text{si } 2 < x \le 3 \\ 0, & \text{si } x < -3 \text{ o } x > 3 \end{cases}$$

¿En qué puntos es continua la función?

¿Cuál es la gráfica de $|f(x)|$?

2. **Encontrar entre todos los rectángulos de perímetro 2p el que tiene diagonal mínima.**

3. **Representar gráficamente la curva $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ encontrando:**

iii) **Dominio, corte con los ejes y simetrías.**
iv) **Asíntotas y regiones.**
¿Cuántos extremos tendrá, al menos, la curva y de qué tipo? Hallarlos.

BLOQUE C **(Puntuación 6,5 puntos)**

1. **De una baraja española de 40 cartas se extrae una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea bastos o menor que cinco?**

2. **La media de ventas diarias de un vendedor de unos grandes almacenes es de 95.000 pesetas y la desviación típica es 20.000 pesetas.**
   Suponiendo que la distribución de ventas es normal, ¿cuál es la probabilidad de vender más de 125.000 pesetas en un día?

3. **En un dado trucado, la probabilidad de sacar un 6 es doble que la de cualquiera de los restantes valores. Se lanza el dado 20 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salga 6 más de 15 veces?**

BLOQUE A

Solución 1:

La matriz asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ f2-2f1 \\ f3-f1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & \lambda-2 & \lambda-2 \\ 0 & 2 & -\lambda-1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3f3-2f2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & \lambda-2 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & -5\lambda+1 & 1-2\lambda \end{pmatrix}$$

La tercera ecuación, queda: $(-5\lambda+1)z = 1-2\lambda$. Esta ecuación tiene sentido, y solución, cuando $\lambda \neq 1/5$.

Por tanto, tenemos:

Si $\lambda \neq 1/5$, el sistema es compatible determinado.
Si $\lambda = 1/5$, el sistema es incompatible.
Nota: En este caso, quizá, hubiese sido más contundente la utilización de determinantes para calcular el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada, para utilizar el teorema de Rouché.

Solución 2:

Sean x, y, z el número de suizos, zuavos y sajones, respectivamente.

De acuerdo con el enunciado se tiene:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 901 \\ \frac{1}{3}x + y + \frac{1}{3}z = 901 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + z = 901 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + z = 1802 \\ x + 3y + z = 2703 \\ x + y + 4z = 3604 \end{cases}$$

Haciendo las transformaciones que se indican, queda:

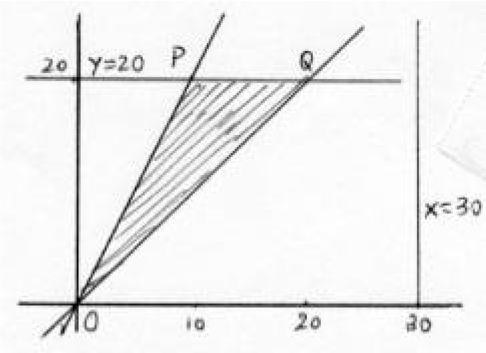
$$\begin{matrix} E1 - 2E3 \\ E2 - E3 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} -y - 7z = -5406 \\ 2y - 3z = -901 \\ x + y + 4z = 3604 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ E2 + 2E1 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} -y - 7z = -5406 \\ -17z = -11713 \\ x + y + 4z = 3604 \end{cases} \qquad \begin{matrix} y = 583 \\ z = 689 \\ x = 265 \end{matrix}$$

Solución 3:

Sean x los electricistas e y los mecánicos que conviene elegir.
El objetivo es maximizar los beneficios: B(x, y) = 25.000x + 20.000y máximo.
Sujeto a las restricciones:

$$\begin{matrix} y \geq x \\ y \leq 2x \\ 0 \leq x \leq 30 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{matrix}$$

Estas restricciones generan la región factible dada en la figura adjunta.



Los vértices son: O=(0, 0), P=(10, 20), Q=(20, 20).
El beneficio, para esa cantidad de trabajadores, es:

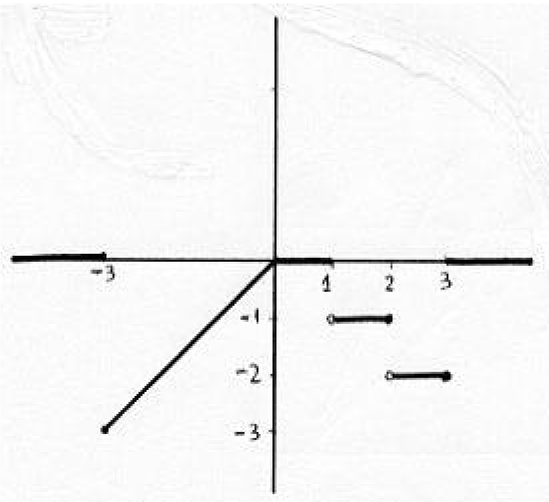
En O, B(0, 0) = 0.
En P, B(10, 20) = 650.000
En Q, B(20, 20) = 900.000.

El beneficio máximo se obtiene empleando 20 electricistas y 20 mecánicos.

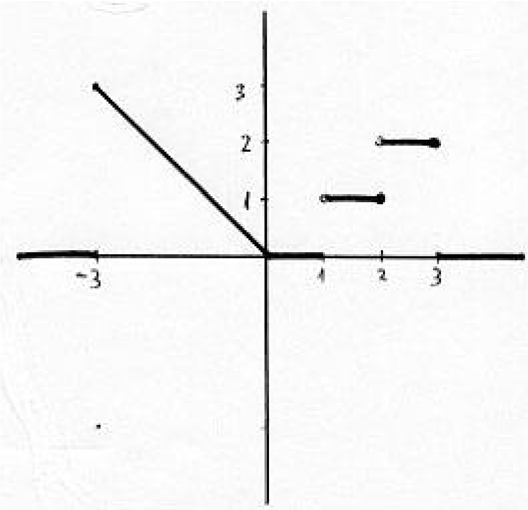
BLOQUE B

Solución 1:

La representación gráfica se da en la figura siguiente.

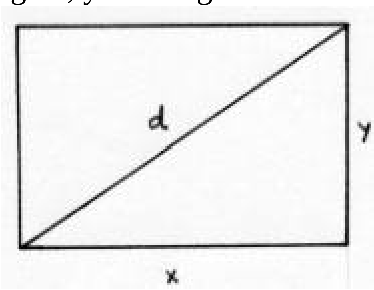


Como puede verse por la figura, la función no es continua en x = -3, x = 1, x = 2 y
 x = 3; en los demás puntos es continua.



Solución 2:

Sean *x* e *y* las longitudes de la base y de la altura de ese rectángulo; y *d* la diagonal.



Se tiene las siguientes relaciones:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ 2x + 2y = 2p \qquad x + y = p;\ y = p - x$$

El mínimo de *d* se da cuando $d'=0$ (y $d''>0$).
Sustituyendo el valor de *y* en *d*, y derivando de tiene:

$$d = \sqrt{x^2 + (p-x)^2} \qquad d' = \frac{2x + 2(p-x)}{2\sqrt{x^2 + (p-x)^2}} \qquad x = \frac{p}{2}$$

Como para $x < \frac{p}{2}$, $d' < 0$, se tiene que *d* decrece, y como para $x > \frac{p}{2}$, $d' > 0$, la función *d*, crece. Por tanto, en $x = \frac{p}{2}$ hay mínimo; siendo $d = \frac{\sqrt{2}p}{2}$.

Solución 3:

i) Está definida en todo **R.**
Es una función impar: simétrica respecto del origen; pues *f(x)* = *f(-x)*.

ii) Asíntotas: Si $x \to -\infty$, $f(x) \to 0^-$ Si $x \to +\infty$, $f(x) \to 0^+$

Luego y = 0 es una asíntota horizontal.
No hay más asíntotas.

Para todo $x < 0$, la función toma valores negativos; para valores de $x > 0$, la función es positiva.

Crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

$f'(x) = 0$ en $x = -1$ y $x = +1$.

Si $x < -1$, $f'(x) < 0$, de donde $f(x)$ decrece.

Si $-1 < x < 1$, $f'(x) > 0$, de donde $f(x)$ crece.

Si $x > 1$, $f'(x) < 0$: $f(x)$ decrece.

Como a la izquierda de -1 es decreciente y a su derecha creciente, en $x = -1$ hay un mínimo. En $x = 1$ sucede al revés, luego se da un máximo relativo. Sus valores son:

$f(-1) = -1/2$; $f(1) = 1/2$

Concavidad y convexidad :

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

$f''(x) = 0$ en $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ y $x = +\sqrt{3}$.

Si $x < -\sqrt{3}$, $f''(x) < 0$, luego $f(x)$ convexa ($\cap$).

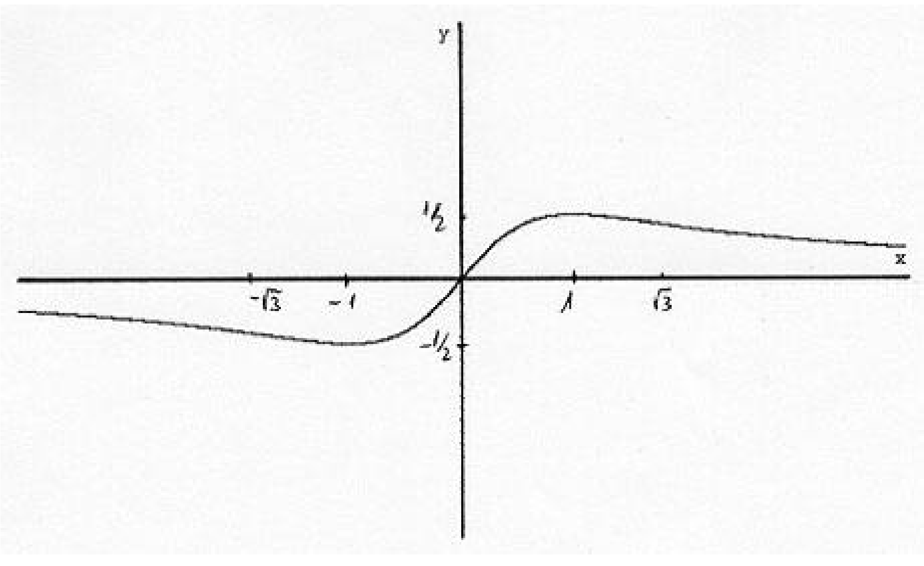
Si $-\sqrt{3} < x < 0$, $f''(x) > 0$: $f(x)$ cóncava.

Si $0 < x < \sqrt{3}$, $f''(x) < 0$: $f(x)$ convexa.

Si $x > \sqrt{3}$, $f''(x) > 0$: $f(x)$ cóncava.

De lo anterior se deduce que en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$ hay puntos de inflexión.

La gráfica de $f(x)$ es:



BLOQUE C

Solución 1:

Los casos favorables a bastos o menor que 5 son 22 = 10 bastos + 4·3 menores de 5.

Luego,

$$P(\text{bastos o menor que 5}) = \frac{22}{40}$$

Solución 2:

Es una N(95.000, 20.000), luego,

$$P(X > 125.000) = P\left(Z > \frac{125000 - 95000}{20000}\right) = P(Z > 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$$

Solución 3:

Sea P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = p. Luego, P(6) = 2p.

Como P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 7p = 1 $p = \frac{1}{7}$ y $P(6) = \frac{2}{7}$.

El experimento propuesto se puede estudiar como una binomial $B(20, \frac{2}{7})$, que a su vez se puede aproximar mediante la normal $N(20\cdot\frac{2}{7}, \sqrt{20\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{7}}) = N(5,71,\ 2,02)$. (Esta aproximación puede hacerse, ya que $np = 20\cdot\frac{2}{7} > 5$ y $nq = 20\cdot\frac{5}{7} > 5$).

Con esto, si X es la variable que mide el número de seises del experimento, se tiene:

$$P(X > 15) = P(X' > 15,5) = P\left(Z > \frac{15,5 - 5,71}{2,02}\right) = P(Z > 4,84) = 0$$

debiéndose interpretar este resultado de 0 como probabilísticamente imposible, aunque en la práctica pueda darse.

Nota: Haciendo el cálculo mediante la binomial, que es largo y pesado, salen valores insignificante. Por ejemplo,

$$P(X = 16) = \binom{20}{16}\left(\frac{2}{7}\right)^{16}\left(\frac{5}{7}\right)^{4} = 0,000002487$$

siendo menor todavía las probabilidades de X = 17, 18, 19 o 20.

Opción A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.
Calcular el valor de la integral

$$\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \operatorname{sen} x \, dx$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.
Se considera la ecuación $x^3 + \lambda x^2 - 2x = 1$. Utilizando el teorema de Bolzano de los valores intermedios.

a) (1 punto) Probar que si $\lambda > 2$, la ecuación admite alguna solución menor que 1.

b) (1 punto) Probar que si $\lambda < 2$, la ecuación admite alguna solución mayor que 1.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

a) (1 punto) Determinar el centro y el radio de la circunferencia
$C \equiv x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$

b) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a C en el punto P(4, 0).

c) (1 punto) Encontrar la ecuación de la circunferencia concéntrica con C que es tangente a la recta de ecuación $2x - y + 2 = 0$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.
Se considera el sistema de ecuaciones en las incógnitas x, y, z, t

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + 2z + t = 0 \\ 2x + 2\lambda y - t = 0 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Encontrar los valores de λ para los que el rango de la matriz de los coeficientes del sistema es 2.

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema anterior para $\lambda = 0$.

Solución 1:

En el intervalo considerado, la función $f(x) = |x| \operatorname{sen} x = \begin{cases} -x \operatorname{sen} x, & x \quad [-\pi, 0) \\ x\operatorname{sen} x, & x \quad [0, 2\pi] \end{cases}$

Con esto,

$$\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \operatorname{sen} x \, dx = \int_{-\pi}^{0} -x \operatorname{sen} x \, dx + \int_{0}^{2\pi} x \operatorname{sen} x \, dx$$

Calculo de $\int x \operatorname{sen} x \, dx$. Por partes:

Haciendo $\quad x = u; \quad \operatorname{sen} x \, dx = dv,$

se tiene $\quad dx = du, \quad -\cos x = v$

luego,

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx .= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x.$$

Por tanto

$$\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \operatorname{sen} x \, dx = \int_{-\pi}^{0} -x \operatorname{sen} x \, dx + \int_{0}^{2\pi} x \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$= (x \cos x - \operatorname{sen} x)\Big|_{-\pi}^{0} + (-x \cos x + \operatorname{sen} x)\Big|_{0}^{2\pi} = -\pi - 2\pi = -3\pi$$

Solución 2:

a) Consideramos la función $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 2x - 1$, que es continua en todo **R**.
En particular, $f(x)$ es continua en $[0, 1]$.
Como $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = \lambda - 2 > 0$ si $\lambda > 2$, se deduce que existirá algún $x_0 \quad (0, 1)$ tal que $f(x_0) = 0$. 0bviamente, x_0 será la solución de la ecuación dada.

b) Si $\lambda < 2$ tendremos:

$f(0) = -1$

$f(1) = \lambda - 2 < 0$

Pero para x suficiente grande, por ejemplo para $x = 4 - \lambda$, se tiene que

$f(4-\lambda) = 4\lambda^2 - 30\lambda + 55$, que es positivo siempre que $\lambda < 2$.

Obsérvese que $4\lambda^2 - 30\lambda + 55 < 0$ cuando $\lambda \quad \left(\frac{30 - \sqrt{20}}{8}, \frac{30 + \sqrt{20}}{8} \right)$, intervalo que tiene por extremos las raíces de la ecuación $4\lambda^2 - 30\lambda + 55 = 0$.

Luego la ecuación dada, para $\lambda < 2$, tiene una solución entre 1 y $4 - \lambda$.

Solución 3:

a) $C \equiv x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5,$
de donde: centro $O=(2, -1)$ y radio $r = \sqrt{5}$

b) El punto P(4, 0) es de la circunferencia C.
La tangente a C por P será la recta

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-4}{1} = \frac{y}{-2} \Leftrightarrow y = -2x + 8$$

pues su dirección es perpendicular al vector OP=(2, 1).

c) El radio de esta circunferencia, r´, es igual a la distancia de O a la recta 2x - y + 2 =0:

$$r' = \frac{4+1+2}{\sqrt{4+1}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

Su ecuación será $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 49/5$.

Solución 4:

La matriz asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2\lambda & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{f3-2f1}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2\lambda - 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Para que el rango sea 2 es necesario que la 2ª y 3º fila sean proporcionales. Para ello:
$-1 = 2\lambda - 4 \quad \lambda = 3/2$.

b) Si $\lambda = 0$, el rango de la matriz de coeficientes será 3, y el sistema inicial tendrá por matriz asociada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -t \\ 0 & -4 & -2 & t \end{array}\right) \underset{f3+4f2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -t \\ 0 & 0 & 6 & -3t \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + 2z = -t \\ 6z = -3t \end{cases}$$

cuya solución es $\begin{cases} x = t/2 \\ y = 0 \\ z = -t/2 \end{cases}$

El alumno debe resolver solamente un ejercicio de cada uno de lo bloques temáticos. Puntuación máxima de cada uno de los ejercicios: Álgebra, 3 puntos; Análisis, 3,5 puntos; Estadística, 3,5 puntos.

Álgebra

1. **a) Dado el sistema de ecuaciones lineales** $\begin{cases} x + y = 10000 \\ x - \frac{2}{3}y - 200 = 0 \end{cases}$, **expresarlo en la forma matricial AX = B, calcular la matriz inversa de A y resolverlo.**

   b) Un tanque de un camión de 10.000 litros de volumen se llenó con agua procedente de dos depósitos de almacenamiento, A y B. El agua del depósito A se bombeó a dicho tanque a razón de 20 litros por minuto. El agua del depósito B se bombeó a dicho tanque a razón de 30 litros por minuto. Ambas bombas operaron el mismo tiempo; sin embargo, a causa de un fusible fundido, la bomba A estuvo parada 10 minutos. ¿Cuántos litros de cada depósito de almacenamiento se utilizaron para llenar el tanque del camión?

2. **En una fábrica de maquetas de aviones se construyen dos tipos de maquetas, A y B. La fábrica está dividida en dos salas: una de montaje y otra de acabado. Para la fabricación de cada modelo A se requieren 3 horas semanales en la sala de montaje y 3 en la de acabado. La fabricación de cada modelo B requiere 5 horas semanales en la sala de montaje y 3 en la de acabado. La sala de montaje puede estar funcionando como máximo 150 horras a la semana, y la de acabado, 120.**
   Si el beneficio es de 300 dólares en cada modelo A y de 400 en cada modelo B, ¿cuántos modelos de cada tipo habrá que fabricar cada semana para maximizar los beneficios, suponiendo que se venden todos?

Análisis

1. **Dada la función** $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^3$, **calcular los puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos de concavidad y convexidad, asíntotas. Representar gráficamente *f*(x).**

2. **En su modelo para los costes de almacenamiento y transporte de materiales para el proceso de manufactura, Lancaster (1976) obtiene la siguiente función de coste:**

$$C(x) = 100(100 + 9x + \frac{144}{x})$$

donde $C(x)$ es el coste total (en dólares) de almacenamiento y transporte (durante tres meses) de x toneladas de material.

a) ¿Qué cantidad de materiales hace que el coste sea mínimo?
b) ¿Cuáles son las asíntotas de esta función?
c) Representar dicha función para los valores de $x \geq 0$.

Estadística.

1. El número de kilogramos diarios de cierto producto que se vende por kilos es una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9000}x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 30 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si compramos el kilo a 6.000 pesetas y lo vendemos a 10.000 pesetas:

a) ¿Qué porcentaje de días ganaremos más de 40.000 pesetas?
b) ¿Qué media diaria de beneficios se espera obtener?

2. Un país está habitado por dos grupos étnicos, M y N, que se encuentran en las proporciones 75% y 25%, respectivamente. Se conoce que la talla de los individuos adultos varones es N(μ , σ), con μ = 170 y σ = 5 cm para el grupo M, μ = 175 y σ = 5 cm para el grupo N. Se conviene en que un individuo es alto si su talla es superior a 180 cm. Se pide:

b) Porcentaje de individuos altos en el grupo M
c) Porcentaje de altos en el grupo N.
d) Porcentaje de altos en el país.
e) Si un individuo es alto, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al grupo N?

Álgebra:

Solución 1:

$$\begin{cases} x + y = 10000 \\ x - \frac{2}{3}y - 200 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000 & 200 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000 & 200 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 10000 & 200 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4120 & 5880 \end{pmatrix}$$

Pues, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2/3 \end{vmatrix} = -5/3$; la matriz de los adjuntos es: $A_{ij} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Luego, $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{5} & \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{3}{5} & -\dfrac{3}{5} \end{pmatrix}$

b) Si desde A se bombea durante x minutos, desde B lo hará durante x+10.
Por tanto,

$20x + 30(x + 10) = 10.000 \qquad x = 194$ minutos. (Desde B, lo hará 204 min).

Los litros bombeados desde A serán 20·194 = 3.880. Desde B, 30·204 = 6.120

Solución 2:

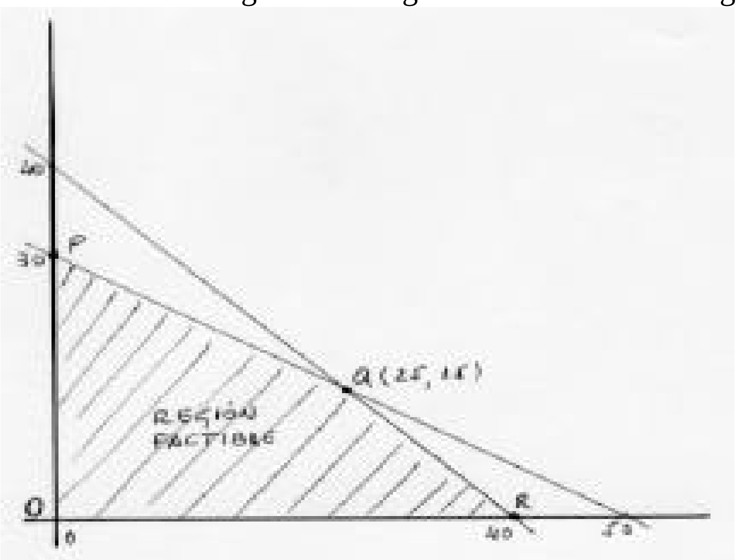
Con los datos anteriores se obtiene:

	Cantidad	Montaje	Acabado	Beneficio
Maqueta A	x	3x	3x	300x
Maqueta B	y	5y	3y	400y
Disponibilidades		150 horas	120 horas	

El objetivo es conseguir máximo beneficio:

Maximizar $B(x, y) = 300x + 400y$
sujeta a las restricciones: $3x + 5y \le 150$
$3x + 3y \le 120$
$x \ge 0$; $y \ge 0$

Estas restricciones generan la región factible dada en la figura adjunta.



Los vértices son: O=(0, 0), P=(0, 30), Q=(25, 15) y R(40, 0). Donde Q es la solución del sistema: 3x + 5y = 120; 3x + 3y = 120.

El beneficio, en dólares, en esos puntos es:

En O, B(0, 0) = 0.
En P, B(0, 30) = 12.000
En Q, B(25, 15) = 13.500.
En R, B(40, 0) = 12.000.

El beneficio máximo se obtiene en Q = (25, 15), fabricando 25 maquetas del tipo A y 15 del B.

Análisis:

Solución 1:

Corte con OX: $0 = x^2 - \frac{2}{3}x^3$ $3x^2 - 2x^3 = 0$ $x^2(3 - 2x) = 0$ $x = 0, x = 3/2$.
Puntos: (0, 0) y (3/2, 0).

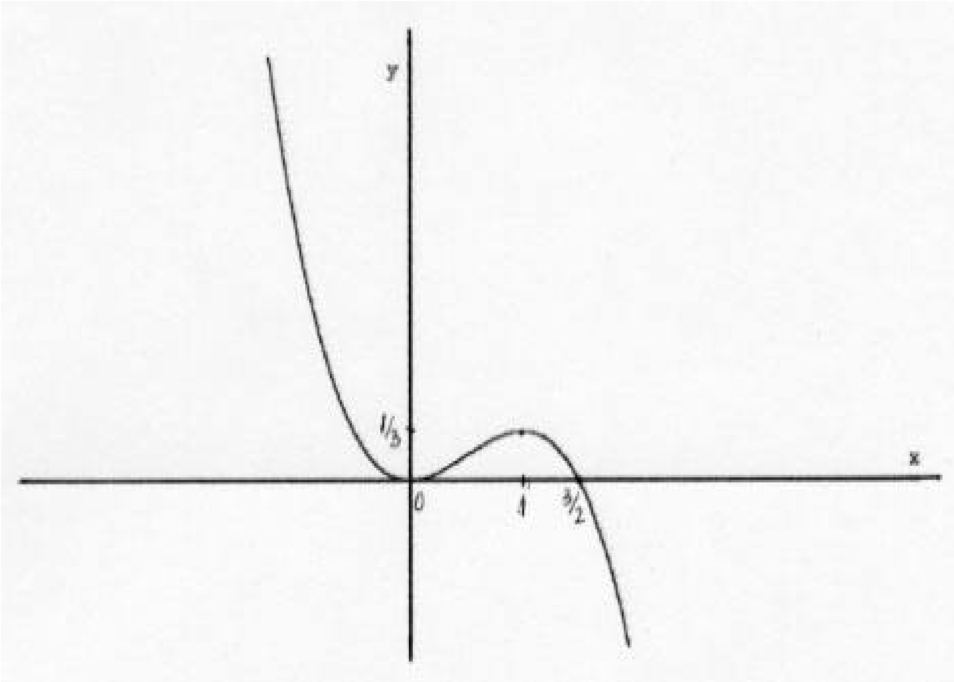
Corte con eje OY: (0, 0).

$f'(x) = 2x - 2x^2 = 2x(1 - x)$.
$f' = 0$ en x = 0 y x = 1.
Si $x < 0$, $f'(x) < 0$, de donde *f(x)* decrece.
Si $0 < x < 1$, $f'(x) > 0$, de donde *f(x)* crece.
Si $x > 1$, $f'(x) > 0$: *f(x)* crece.
Como a la izquierda de 0 es decreciente y a su derecha creciente, en x = 0 hay un mínimo.
En x = 1 sucede al revés, luego en x = 1 hay un máximo relativo.

$f''(x) = 2 - 4x$, que vale 0 en x = 1/2.
Si $x < 1/2$, $f'' > 0$, *f(x)* cóncava ( )
Si $x > 1/2$, $f'' < 0$, *f(x)* convexa.

Esta función no tiene asíntotas, pues es un polinomio.

Su gráfica es la siguiente:



Solución 2:

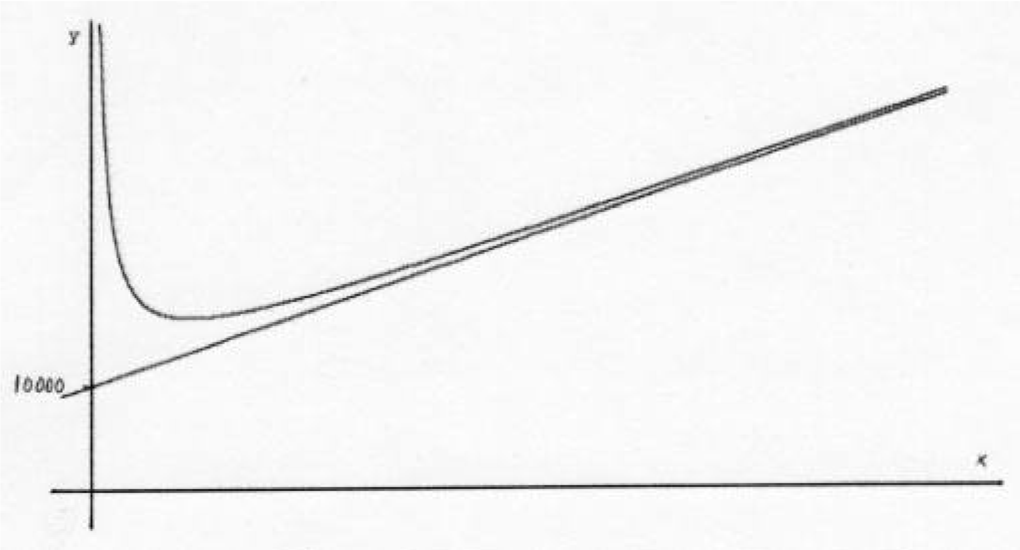
$C(x) = 10000 + 900x + \dfrac{14400}{x}$. Luego, $C´(x) = 900 - \dfrac{14400}{x^2}$

a) Para mínimo $C´(x) = 0$, que se da cuando x = 40, pues $C´´(x) = \dfrac{28800}{x^3}$ >0 para ese valor.

b) En x = 0^+ hay una asíntota vertical, pues si x $\to 4^+$, $C(x) \to +\infty$

La recta $y = 10000 + 900x$ es asíntota oblicua, pues si x $\to +\infty$, $\dfrac{14400}{x^2} \to 0^+$. La función va por encima de la asíntota.

c) Su gráfica es:



<u>Estadística:</u>

Solución 1:

La función dada es una función de densidad, pues $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

En efecto:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{27000}x^3, & \text{si } 0 \le x \le 30 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$, cumple que F(30)=1

a) Si compra a 6.000 y vende a 10.000 gana 4.000 pesetas por kilo. Por tanto, para ganar más de 40.000 pesetas deberá vender más de 10 kilos. Calculamos esa probabilidad:

P(X ≥ 10) = 1 - F(10) = 1 - $\dfrac{1}{27} = \dfrac{26}{27}$, que supone un 96,3%, aproximadamente.

b) La media de kilos vendidos es $\mu = \int_0^{30} xf(x)dx = \int_0^{30} \dfrac{x^3}{9000}dx = \left[\dfrac{x^4}{36000}\right]_0^{30}$ = 22,5.

Como gana 4.000 pesetas por kilo, la media de ganancias será 22,5·4.000 = 90.000 pta.

Solución 2:

a) Para una N(170, 5), P(X > 180) = P($Z > \dfrac{180-170}{2}$) =

= P(Z > 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228. El 2,28%

b) Para una N(175, 5), P(X > 180) = P($Z > \dfrac{180-175}{2}$) =

= P(Z > 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587. El 15,87%

c) Para el país, el porcentaje de altos será: $0,75 \cdot 2,28 + 0,25 \cdot 15,87 = 5,6775$

d) $P(N/alto) = \dfrac{P(N \text{ y alto})}{P(alto)} = \dfrac{0,25 \cdot 15,87}{5,6775} = 0,6988$.

Puntuación máxima del ejercicio: 10 (Problema 1: 3,5; Problema 2: 3; Problema 3: 3,5.)

PRIMER REPERTORIO

1. **Una fábrica de productos alimenticios elabora patés de dos variedades distintas en envases de 100 gramos de peso neto. Cada envase de la variedad A contiene 80 gramos de hígado de cerdo y 20 gramos de fécula y los de la variedad B, 60 gramos de hígado de cerdo y 40 gramos de fécula. Durante los procesos de elaboración no pueden manipularse más de 240 kilogramos de hígado de cerdo ni más de 100 kilogramos de fécula. Sabiendo que los beneficios por lata son de 30 pesetas (variedad A) y 24 pesetas (variedad B), se pide:**

a) Hallar el número de latas que habría que fabricar para obtener un beneficio máximo.

b) ¿Cuál sería dicho beneficio máximo?. Justificar las respuestas.

2. **Una compañía de transportes ha comprobado que el número de viajeros diarios depende del precio del billete, según la función:**
   $n(p) = 3000 - 6p$
   donde $n(p)$ es el número de viajeros cuando p es el precio del billete.

Obtener:

a) **La función que expresa los ingresos diarios(I) de esta empresa en función del precio del billete (p).**

b) **El precio del billete que hace máximos dichos ingresos.**

c) **¿A cuánto ascenderán dichos ingresos máximos?**

Justificar las respuestas.

3. **Una biblioteca pública está organizada en cinco secciones (en el cuadro adjunto se indica el número de libros existentes en cada sección). Con el objeto de estimar el porcentaje de libros de edición española, se quiere seleccionar una muestra de un 5% del número total de libros, a través de muestreo estratificado aleatorio, considerando como estratos las secciones. Determinar el número de libros que habría que seleccionar en cada sección, si: a) Consideramos afijación igual. b) Consideramos afijación proporcional.**

Sección 1	Sección 2	Sección 3	Sección 4	Sección 5
500	860	1200	700	740

Solución 1:

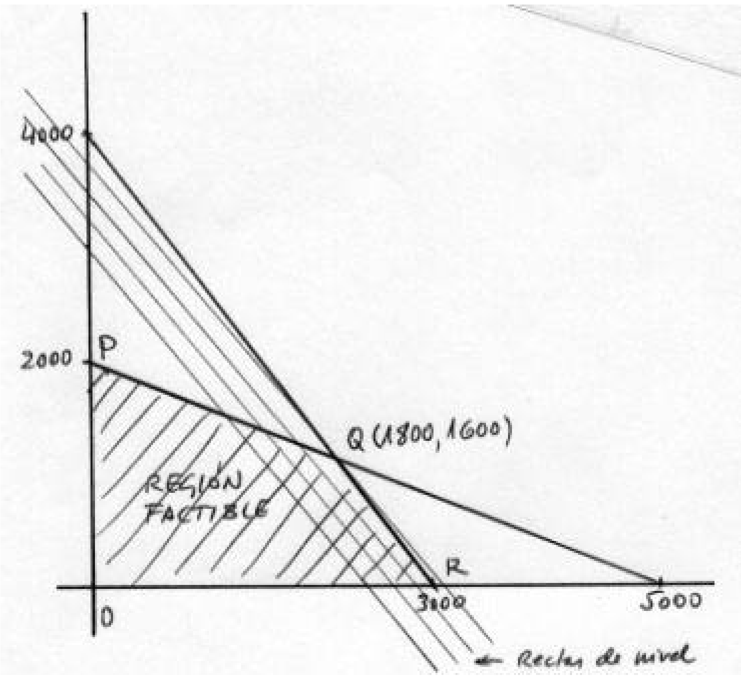
Con los datos anteriores se obtiene:

	Cantidad	H. Cerdo(g)	Fécula (g)	Beneficio
Variedad A	x	80x	20x	30x
Variedad B	y	60y	40y	24y
Disponibilidades		240.000	100.000	

La función objetivo es que el beneficio, $B(x, y) = 30x + 24y$, sea máximo,
sujeto a las restricciones:

$$80x + 60y \leq 240.000$$
$$20x + 40y \leq 100.000$$
$$x \geq 0; \quad y \geq 0$$

Estas restricciones generan la región factible dada en la figura adjunta.



a) Los vértices son: O=(0, 0), P=(0, 2000), Q=(1800, 1600) y R=(3000, 0).

Representando las recta de nivel asociadas a la función objetivo, $30 + 24y = k$, se observa que el máximo se alcanza en el punto Q, que supone una producción de 1800 latas de la variedad A y de 1600 de la variedad B.

b) El beneficio, en pesetas, en esos puntos son:

En O, $B(0, 0) = 0$.

En P, $B(0, 2000) = 48.000$

En Q, $B(1800, 1600) = 92.400$, que es el máximo.

En R, $B(3000, 0) = 90.000$.

Solución 2:

a) Ingresos = número de billetes vendidos por el precio de cada billete.

$$I = n(p) \cdot p = (3000 - 6p) \cdot p = 3000p - 6p^2$$

b) Para el máximo de I, su derivada debe ser cero:

$$I' = 3000 - 12p = 0 \qquad p = 250$$

Que efectivamente es máximo, pues $I'' = -12 < 0$.

c) Para $p = 250$, $n(250) = 1500$, luego, $I = 1500 \cdot 250 = 375.000$

Solución 3:

La suma total de los libros es 4.000. Su 5% son 200.

El tamaño de la muestra es $n = 200$.

a) La afijación igual indica que en cada sección se toma el mismo número. En nuestro caso, una quinta parte: 40 libros de cada sección.

b) La afijación proporcional consiste en tomar tamaños proporcionales al número de elementos de cada estrato. En nuestro caso, el 5% de cada sección; que son:

25 43 60 35 37

para las secciones 1, 2, 3, 4 y 5, respectivamente.

Opción A

1. **a) Propón un ejemplo de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que sea compatible y determinado.**

b) La suma de las cifras de un número comprendido entre 100 y 999 es 13. Si intercambiamos las cifras de las unidades y la de las centenas, el número disminuye en 198. Si intercambiamos las de las unidades y las de las decenas, el número aumenta en 36. ¿Cuál es el número? (4 puntos: 2 puntos cada apartado)

2. **a) Explica qué quiere decir que dos sucesos son independientes y qué quiere decir que son incompatibles.**
   ¿Dos sucesos con probabilidades no nulas pueden ser independientes e incompatibles a la vez? Justifica la respuesta.

b) Calcula la probabilidad P(A B) sabiendo que P(A) = 0,3, P(B) = 0,5 y P(A/B) = 0,2. (2 puntos: 1 cada apartado)

2. **Considera la función $y = \dfrac{x^2}{x+a}$. Di para qué valores del parámetro *a* la función es creciente en el punto de abscisa x = 1. (2 puntos).**

4. **Tiramos una moneda perfecta cien veces. Hacemos la predicción de que saldrán un número de caras comprendido entre 44 y 56. Calcula la probabilidad de no acertar. (2 puntos).**

Solución 1:

a) Partiendo del "sistema": $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$, podemos llegar a proponer cualquier otro equivalente a él; por ejemplo: $\begin{cases} x - y - z = -4 \\ y - z = -1 \\ z = 3 \end{cases}$, que obviamente es compatible y determinado.

b) Sean *a*, *b*, *c* las cifras de las centenas, decenas y unidades. Por tanto, el número buscado es *abc*.
Si intercambiamos las cifras de unidades y centenas, el número será: *cba*.
Intercambiando unidades y decenas, quedaría *acb*.

Los números anteriores pueden expresarse como sigue:

$abc = 100a + 10b + c$

$cba = 100c + 10b + a$

$acb = 100a + 10c + b$

Según los datos del problema:

$a + b + c = 13$

$abc = cba + 198$ $\quad 100a + 10b + c = 100c + 10b + a + 198$ $\quad 99a - 99c = 198$

$acb = abc + 36$ $\quad 100a + 10c + b = 100a + 10b + c + 36$ $\quad -9b + 9c = 36$

Se tiene así, el sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 13 \\ 99a - 99c = 198 \\ -9b + 9c = 36 \end{cases}$$

Cuya solución es: $a = 7$, $b = 1$ y $c = 5$.

Solución 2:

a) Dos sucesos son independientes cuando la realización de uno no afecta ala probabilidad de que se de el otro. Esto es, A y B son independientes si p(A/B) = P(A) y P(B/A) = P(B).

Para sucesos independientes se cumple que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Dos sucesos son incompatibles cuando no pueden darse a la vez. En consecuencia, si A y B son incompatibles, $P(A \cap B) = 0$

No es posible que dos sucesos A y B con probabilidades no nulas ($P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$) pueden ser independientes e incompatibles a la vez, pues:

por independientes, $P(A \cap B) \neq 0$ y

por incompatibles, $P(A \cap B) = 0$.

b) Como, $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A/B) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1$ y

$P(A \quad B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, se tendrá que

$P(A \quad B) = 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}7$

Solución 3:

Su derivada y' debe ser mayor que cero cuando x = 1.

$$y' = \frac{2x(x+a) - x^2}{x+a} = \frac{x^2 + 2ax}{(x+a)^2}$$

Para x = 1, $y' = \frac{1+2a}{(1+a)^2}$ $y' > 0$ si $1+2a > 0$ $a > -\frac{1}{2}$

Solución 4:

Se trata de una distribución binomial, B(100, 0,5), que puede aproximarse mediante la normal de media $\mu = 100 \cdot 0{,}5 = 50$ y $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 5$: N(50, 5).

Con esto, $P(44 \leq X \leq 56) = P(43{,}5 < X' < 56{,}5)$, haciendo la corrección de continuidad.
Así,
$P(43{,}5 < X' < 56{,}5) = P\left(\frac{43{,}5 - 50}{5} < Z < \frac{56{,}5 - 50}{5}\right) = P(-1{,}3 < Z < 1{,}3) = 0{,}8064.$

La probabilidad de no acertar será la complementaria: 1 - 0,8064 = 0,1936.

Criterios generales de evaluación
Cada pregunta de la 1 a 3 se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. La pregunta 4 se puntuará sobre un máximo de 1 punto

BLOQUE A

1A. Un país importa 21.000 vehículos mensuales de las marcas X, Y, Z al precio de 1,2, 1,5 y 2 millones de pesetas, respectivamente. Si el total de la importación asciende a 32.200 millones, y de la marca X se importa el 40% de la suma de las otras dos marcas, ¿cuántos vehículos de cada marca entran en ese país?

2A. Se ha lanzado verticalmente hacia arriba una piedra. La altura en metros alcanzada al cabo de *t* segundos viene dada por la expresión $e=f(t)=20t-2t^2$.
a) **Halla la velocidad media en el intervalo de tiempo comprendido entre t=0 y t=5 segundos.**
b) **¿En algún momento la velocidad de la piedra ha sido de 15 m/s? Si es así ¿a qué altura sucedió?**

3A. En una urna hay dos bolas blancas y 1 negra. Si se considera el siguiente experimento aleatorio "*Se extrae una bola al azar. Se observa su color y se devuelve a la urna*". Calcula la probabilidad de que en dos extracciones se obtengan:
a) **2 bolas blancas.**
b) **1 bola blanca y 1 negra.**
c) **2 bolas negras.**

4A. En una ciudad el peso de los recién nacidos se ha distribuido según la ley Normal de media μ =3.100 gramos y desviación típica σ =150 g.
Halla los parámetros de la distribución que siguen las medias de las muestras de tamaño 100.

Solución 1A:

Sean x, y, z los coches importados de las marcas X, Y y Z, respectivamente.

Se tiene:

$x+y+z=21.000 \qquad 1,2x+1,5y+2z=32.200 \qquad x=0,4(y+z)$

que genera el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 21000 \\ 1,2x + 1,5y + 2z = 32200 \\ x - 0,4y - 0,4z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ E2 - 1,2E1 \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 21000 \\ 0,3y + 0,8z = 7000 \\ -1,4y - 1,4z = -21000 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \\ \Leftrightarrow \\ 0,3E3 + 1,4E2 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 21000 \\ 0,3y + 0,8z = 7000 \\ 0,7z = 3500 \end{cases}$$

De la última ecuación se obtiene z=5.000. Sustituyendo en la segunda, y=10.000. Llevando esos dos valores a la primera, x=6.000.

Solución 2A:

a) Se trata de calcular la tasa de variación media en el intervalo [0, 5], que vale:

$$\frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{50 - 0}{5} = 10 \text{ m/s}$$

b) La velocidad de la piedra en el instante *t* viene dada por *f´(t).*

f´(t)=20-4t

que vale 15 cuando 20-5*t*=15 $\quad t = \frac{5}{4}$.

Su altura en ese instante es $f(\frac{5}{4}) = \frac{175}{8}$.

Solución 3A:

Se trata de un experimento de extracción de bolas con reemplazamiento. En el que,

P(blanca)=P(B)=$\frac{2}{3}$ y P(negra)=P(N)=$\frac{1}{3}$.

a) P(BB)=$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

b) P(BN)= $2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{9}$

c) P(NN)= $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

Solución 4A:

La distribución de medias muestrales de tamaño n, extraídas de una población N(μ ,σ), sigue una distribución N(μ , $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

En nuestro caso, será N(3.100, 15), pues $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{150}{\sqrt{100}}$ = 15.

El alumno resolverá cuatro cuestiones eligiendo para ello A) o B) en cada uno de los bloques. Cada cuestión tiene una puntuación máxima de 2,5 puntos.

BLOQUE 1

A) Los gastos diarios de tres estudiantes, Marta, Raúl y Pedro suman 1545 pesetas. Si a los que gasta Marta se le suma el triple de la diferencia entre los gastos de Raúl y Pedro obtendremos lo que gasta Pedro. Ocho veces la diferencia entre el gasto de Raúl y el de marta es igual al gasto de Marta. Averiguar cuál es la cantidad que gasta cada uno.

B) Una fábrica decide distribuir sus excedentes en tres productos alimenticios A, B y C a cuatro países de África P_1, P_2, P_3 y P_4 según se describe en la matriz M_1 (cantidades en toneladas). Esta fábrica ha recibido presupuesto de dos empresas para el transporte de los productos a los países de destino como indica la matriz M_2 (en euros por tonelada).

$$M_1 = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 200 & 100 & 120 \\ 110 & 130 & 200 \\ 220 & 200 & 100 \\ 150 & 160 & 150 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M_2 = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 500 & 450 & 375 & 350 \\ 510 & 400 & 400 & 350 \end{pmatrix} \end{array}$$

Efectúa el producto de las matrices y responde a las cuestiones:

i) ¿Qué representa el elemento a_{11} de la matriz producto?

ii) ¿Qué elemento de la matriz producto nos indica lo que cuesta transportar el producto C con la empresa E_2?

iii) Indica qué elementos de la matriz producto te permiten decir cuál es la empresa que más barato transporta el producto B a todos los países.

BLOQUE 2

A) En unos grandes almacenes se ha iniciado una campaña de venta de lavadoras y de televisores. Se ha calculado que un vendedor invierte 8 minutos en la venta de una lavadora y 10 en la venta de un televisor, mientras que un instalador dedica 12 minutos a una lavadora y 5 minutos a un televisor. Se dispone de 4 vendedores y 3 instaladores cada uno de los cuales dedica 5 horas diarias a la venta o a la instalación de los electrodomésticos durante los 16 días que dura la campaña. Si se sabe que se obtiene un beneficio de 45.000 pesetas por televisor y de 50.000 pesetas por lavadora vendidos. ¿Cuántas lavadoras y cuántos televisores conviene poner a la venta para obtener máximo beneficio?

B) La probabilidad de que tenga lugar el contrario de un suceso A es 1/3, la probabilidad de un suceso B es 3/4 y la probabilidad de que ocurran a la vez los sucesos A y B es 5/8. Determinar:

ii) Probabilidad de que se verifique el suceso A o el suceso B.
iii) Probabilidad de que no se verifique A y no se verifique B.
iv) Probabilidad de que ocurra A sabiendo que se ha verificado B.
v) Independencia de los sucesos a y B.

BLOQUE 3

A) Dada la función f(x) se pide:
i) Gráfica de la misma.
ii) Estudiar su continuidad y hallar *a* para que sea continua en x = 4.
iii) Determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento.
iv) Hallar la pendiente de la recta tangente a f(x) en x=3 y x=5.

$$f(x)=\begin{cases} |x+1|, & x\leq 1 \\ \dfrac{2}{x} & 1<x\leq 4 \\ a & 4<x \end{cases}$$

B) Un publicista diseña un panel publicitario que tiene la siguiente forma: base horizontal de 10 metros de longitud y resto del contorno limitado por la función

$$g(x)=\begin{cases} -x^2+6x & 0\leq x\leq 5 \\ -x+10 & 5<x\leq 10 \end{cases}$$

Se pide:
i) Dibujar la gráfica del recinto correspondiente al cartel publicitario.
ii) Calcular la superficie del mismo.

BLOQUE 4

A) Se tienen dos urnas U_1 y U_2 cuyo contenido en bolas rojas, azules y verdes es; en la urna U_1 4 bolas azules, 3 bolas rojas y 3 verdes, en la urna U_2 4 rojas, 5 azules y una verde. Se lanzan tres monedas y si se obtienen exactamente dos caras se extrae una bola de la urna U_1, en otro caso se extrae de la urna U_2. Se pide:
i) Hacer un diagrama para el experimento aleatorio de lanzar tres monedas.
ii) Calcular la probabilidad de que la bola extraída sea azul.

B) El estudio de un test de satisfacción de usuario que rellenan todos los demandantes de servicios de una gran empresa revela que la nota media que otorgan es de 5,70 puntos con una desviación típica de 0,5. Posteriormente se ha realizado un muestreo a 100 usuarios de la zona de influencia A, y a 49 usuarios de la zona B, obteniéndose puntuaciones medias respectivas de 5,6 y 5,85. Con una confianza del 95% ¿se puede afirmar que las diferencias entre las medias de cada muestra y de la población son debidas al azar, o se puede afirmar que son diferentes la nota media de la población y la de cada muestra? Formula la hipótesis nula y alternativa. Define error de tipo I y error de tipo II.

BLOQUE 1

Solución A:

Sean x, y, z los gastos diarios de Marta, Raúl y Pedro, respectivamente.

Las relaciones dadas en el enunciado son:

$$x + y + z = 1545 \qquad x + 3(y - z) = z \qquad 8(y - x) = x$$

Se tiene así el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1545 \\ x + 3y - 4z = 0 \\ -9x + 8y = 0 \end{cases}$$

cuya solución es: x=480, y=540, z=525

Solución B:

$$M_2 \cdot M_1 = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \end{array}\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ 500 & 450 & 375 & 350 \\ 510 & 400 & 400 & 350 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array}\begin{pmatrix} A & B & C \\ 200 & 100 & 120 \\ 110 & 130 & 200 \\ 220 & 200 & 100 \\ 150 & 160 & 150 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \end{array}\begin{pmatrix} A & B & C \\ 284500 & 239500 & 240000 \\ 286500 & 239000 & 233700 \end{pmatrix}$$

i) El elemento a_{11} de la matriz producto da el coste de transporte del alimento A a los cuatro países, mediante la empresa E_1.

ii) Es el elemento $a_{23} = 233700$.

iii) El elemento $a_{12} = 239500$ da el coste mediante E_1;
$a_{22} = 239000$, el coste mediante E_2.

Sale 500 euros más barato con E_2.

BLOQUE 2

Solución A:

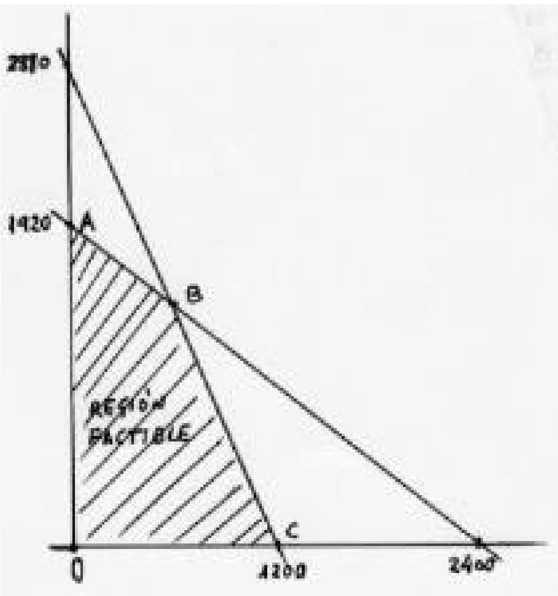
Con los datos anteriores se obtiene:

	Cantidad	Vendedor	Instalador	Ganancia
Lavadoras	x	8x	12x	50000x
Televisores	y	10y	5y	45000y
Disponibilidades		19200 min	14400 min	

Los 19200 minutos es el resultado de $4 \cdot 5 \cdot 16 \cdot 60$ (4 vendedores, 5 horas, 16 días, 60 minutos).
Los 14400 minutos vienen de $3 \cdot 5 \cdot 16 \cdot 60$.

La función objetivo es Ganancia = $50000x + 45000y$ máxima,
sujeta a las restricciones: $8x + 10y \le 19200$
$12x + 5y \le 14400$
$x \ge 0$; $y \ge 0$

Estas restricciones generan la región factible dada en la figura adjunta.



Los vértices son: O=(0, 0), A=(0, 1920), B=(600, 1440) y C=(1200, 0).
Las ganancias, en pesetas, en esos puntos son:

Ganancia en O = 0.
Ganancia en A = 86.400.000
Ganancia en B = 94.800.000, que da el máximo beneficio.

Ganancia en C = 60.000.000.

Solución B:

Si $P(A^c) = 1/3$, se tiene que $P(A) = 2/3$.

También sabemos: $P(B) = \frac{3}{4}$; $P(A \cap B) = \frac{5}{8}$

i) Es la probabilidad de la unión:

$$P(A \quad B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{19}{24}$$

ii) Es la probabilidad del complementario de la unión.

$$P((A \quad B)^c) = 1 - P(A \quad B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{5}{24}$$

iii) Es la probabilidad de A condicionado por B:

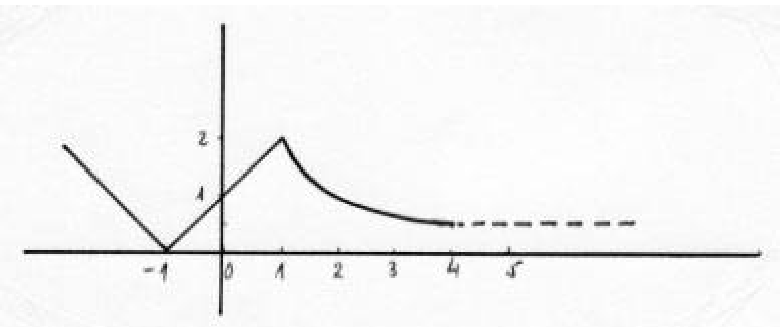
$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{6}$$

iv) Como $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2}$, es distinto de $P(A \cap B)$, los sucesos no son independientes.

BLOQUE 3

Solución A:

i) La gráfica de f(x), salvo la determinación de *a*, es la siguiente:



ii) En esa gráfica hemos dibujado $f_3(x) = a$ con línea de trazos. Si deseamos que sea continua en x = 4, la función debe seguir, necesariamente, esos trazos. Por tanto, $a = \frac{1}{2}$

iii) Decreciente: $(-\infty,-1) \quad (1,4)$.
Creciente: (-1, 1)

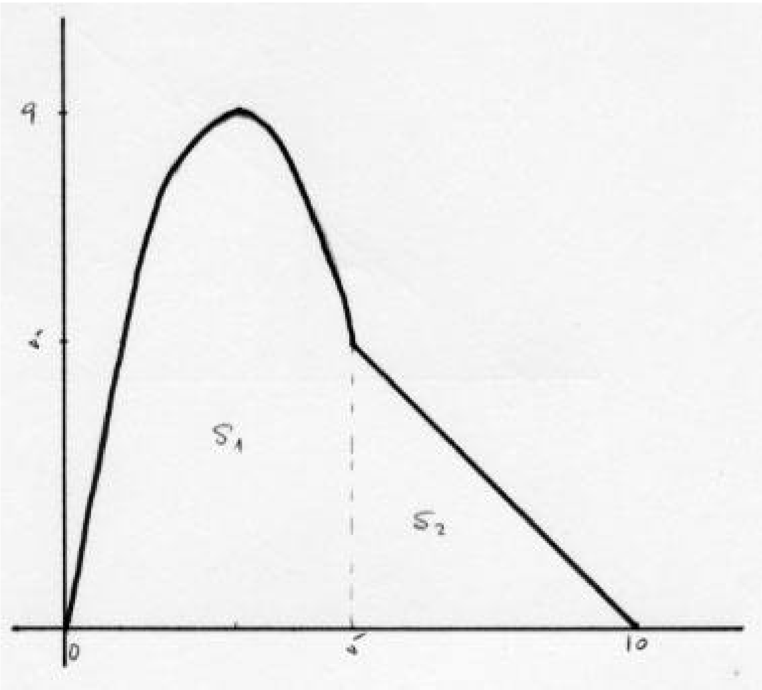
iv) Pendiente de la tangente (es la derivada en el punto):

· en x = 3, $f(x)=\dfrac{2}{x}$ y $f'(x)=\dfrac{-2}{x^2}$. Luego, $f'(3)=\dfrac{-2}{9}$

· en x = 5, $f(x)=\dfrac{1}{2}$ y $f'(x) = 0$. Luego, $f'(5) = 0$.

Solución B:

i) La gráfica es la siguiente:



ii) La superficie pedida es $S = S_1 + S_2$. Donde S_2 es la superficie de un triángulo de base 5 y altura 5, que vale 25/2, y S_1 vale:

$$S_1=\int_0^5(-x^2+6x)dx=\left[\frac{-x^3}{3}+3x^2\right]_0^5=\frac{100}{3}$$

Luego,

$$S = S_1 + S_2 = \frac{100}{3}+\frac{25}{2}=\frac{275}{6}$$

BLOQUE 4

Solución A:

i) No haremos diagrama. El espacio muestral es:

CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, CCC

La P(de obtener exactamente dos caras) = P(2C) = $\frac{3}{8}$.

La P(no obtener 2 caras) = P($(2C)^c$) = $\frac{5}{8}$

ii) Si A = bola azul. Se tendrá:

$$P(A) = P(2C)\cdot P(A/U_1) + P((2C)^c)\cdot P(A/U_2) = \frac{3}{8}\cdot\frac{4}{10}+\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{10}=\frac{37}{80}$$

Solución B:

El intervalo de confianza, para las muestras de tamaño muestral n de media $\bar{x}$, es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$$

siendo σ la desviación típica poblacional y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de 1-α.

En nuestro caso, para el 95% de confianza $Z_{\alpha/2}$ = 1,96. Luego:

· Para $\bar{x}$ = 5,6 y n = 100, el intervalo es

$$\left(5{,}6 - 1{,}96\cdot\frac{0{,}5}{\sqrt{100}},\ 5{,}6 + 1{,}96\cdot\frac{0{,}5}{\sqrt{100}}\right) = (5{,}502,\ 5{,}698)$$

Como la media poblacional, 5,7, cae fuera de ese intervalo, estimamos que las medias son diferentes.

· Para $\bar{x}$ = 5,85 y n = 49, el intervalo es

$$\left(5{,}85 - 1{,}96\cdot\frac{0{,}5}{\sqrt{49}},\ 5{,}85 + 1{,}96\cdot\frac{0{,}5}{\sqrt{49}}\right) = (5{,}71,\ 5{,}99)$$

Como la media poblacional, 5,7, vuelve a caer fuera de ese intervalo, estimamos también que las medias son diferentes.

Nota: Se llega al mismo resultado haciendo la inferencia a partir de la media poblacional. Así, para n=100, el intervalo de probabilidad es (5,7 - 0,098, 5,7 + 0,098) = (5,602, 5,798), que no contiene a 5,6.
Igualmente, si n=49, se obtiene (5,7 - 0,14, 5,7 + 0,14) = (5,56, 5,84), que no contiene a 5,85.

Hipótesis nula, H_0: $\mu = \bar{x}$

Hipótesis alternativa, H_1: $\mu \neq \bar{x}$

Cuando se rechaza la hipótesis nula siendo verdadera, se dice que se ha cometido un error de tipo I.

Cuando no se rechaza la hipótesis nula siendo falsa, se dice que se comete un error de tipo II.

Indicaciones al alumno

El examen consta de 3 Bloques. Cada bloque tiene dos opciones a y b. El alumno debe resolver los tres bloques, permitiéndosele elegir en cada bloque una de las dos opciones.

BLOQUE 1. (3,5 puntos)

Opción 1-a

Estudiar el sistema que se expresa a continuación, de dos ecuaciones con dos incógnitas x e y, en función del parámetro n.

$$n^2x + ny = 2$$
$$-4n^3x - y = 8n^2 - 20n + 4$$

Opción 1-b.

Se desea realizar una mezcla con dos sustancias A y B, que ha de contener como mínimo 10 unidades de cada una de ellas. Estas sustancias nos las venden dos proveedores en forma de lotes.

El lote del primer proveedor es tal que los contenidos de B y A están en la relación de 4 a 1 y contiene una unidad de A.

El lote del segundo proveedor es tal que los contenidos de A y B están en la relación de 4 a 1 y contiene una unidad de B.

El primer proveedor vende cada lote a 1.000 pesetas, precio que es la mitad de a lo que vende el segundo el suyo. Ambos proveedores nos venden lotes enteros o fracciones de ellos.

¿Qué número de lotes hemos de comprar para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es ese coste?

BLOQUE 2. (3 puntos)

Opción 2-a

En un determinado lugar hay tres lugares de diversión a los que suelen ir un grupo de amigos. Las probabilidades de que vayan al primero, segundo o tercero son , respectivamente, 0,3, 0,5 y 0,7. Hallar la probabilidad de que el grupo de amigos vaya :

1. **Solamente a uno de los lugares.**
2. **Únicamente a dos de los lugares.**
3. **A los tres lugares.**

Opción 2-b

Se conoce que 25 de cada 1.000 objetos elaborados por una empresa son defectuosos.

De qué tamaño conviene tomar una muestra para que la proporción estimada de defectuosos no difiera de la verdadera en más de un 5% con un nivel de confianza de un:

1. **95%**
2. **99%**
3. **99,9%**

BLOQUE 3 **(3,5 puntos)**

Opción 3-a

Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2}{4-x}$. **Determinar:**

1. **Su dominio de definición.**
2. **Sus asíntotas.**
3. **Situación de la curva en relación a sus asíntotas.**
4. **Máximos y mínimos.**
5. **Intervalos de crecimiento y decrecimiento.**
6. **Área encerrada por la curva, la asíntota correspondiente y las rectas x = k, x = 2k, siendo k el punto en el que la función tiene un máximo relativo.**

Opción 3-b.

Deseamos comprar 18 ordenadores y en el mercado hay dos tipos. Sabemos que el beneficio que podemos obtener de su uso está dado por: El producto del número de ordenadores de un tipo que se compra por el cuadrado del número de ordenadores del otro tipo que se adquiere.

Determinar el número de ordenadores de cada tipo que debemos adquirir para que el beneficio sea máximo.

Solución 1-a:

Multiplicando la primera ecuación por 4n y sumando las dos ecuaciones queda:

$$y(4n^2 - 1) = 8n^2 - 12n + 4 \qquad y = \frac{8n^2 - 12n + 4}{(2n-1)(2n+1)}$$

Multiplicando la segunda ecuación por n y sumando las dos ecuaciones queda:

$$xn^2(1 - 4n^2) = 8n^3 - 20n^2 + 4n + 2 \qquad x = \frac{8n^3 - 20n^2 + 4n + 2}{n^2(1-2n)(1+2n)}$$

Ambas soluciones tienen sentido cuando el denominador es distinto de cero.

Luego, si $n \neq 0$, $n \neq \frac{1}{2}$ y $n \neq -\frac{1}{2}$ el sistema tiene solución.

Veamos qué pasa si n = 0, n = $\frac{1}{2}$ o n = -$\frac{1}{2}$.

Para n = 0, el sistema queda:

$\begin{cases} 0 = 2 \\ -y = 4 \end{cases}$, que obviamente es incompatible.

Para n = $\frac{1}{2}$, se tiene

$\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = 2 \\ -\frac{1}{2}x - y = 2 - 10 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 8 \\ -x - 2y = -8 \end{cases}$, que es compatible determinado,

pues ambas ecuaciones están repetidas.

Para n = -$\frac{1}{2}$, queda:

$\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = 2 \\ \frac{1}{2}x - y = 2 + 10 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 8 \\ x - 2y = 16 \end{cases}$, que es incompatible, pues restando

ambas ecuaciones se obtiene 0 = 8.

Solución 1-b:

La información suministrada por el problema se resume en la tabla:

Lote	Cantidad	A	B
1º	x	x	4y
2º	y	4y	y

La función objetivo es: Coste = 1000x + 2000y mínimo,

sujeta a las restricciones:

$x + 4y \geq 10$

$4x + y \geq 10$

$x \geq 0;\ y \geq 0$

Estas restricciones generan la región factible dada en la figura adjunta.

Solución 2-a:

Llamemos A, B y C a los sucesos ir al primero, segundo o tercer lugar, respectivamente; A^c, B^c y C^c son sus contrarios.

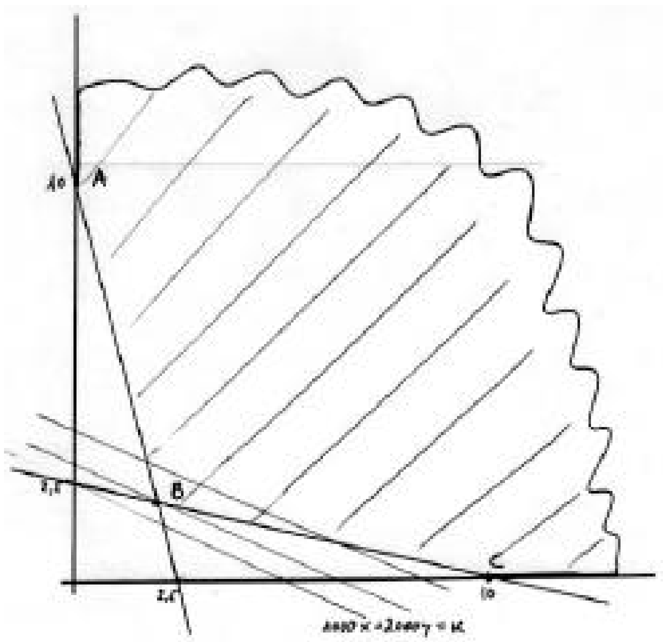
Se tiene:

$P(A) = 0,3 \quad P(B) = 0,5 \quad P(C) = 0,7$
$P(A^c) = 0,7 \quad P(B^c) = 0,5 \quad P(C^c) = 0,3$

1. P(ir sólo a un lugar) = $P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A^c \cap B \cap C^c) + P(A^c \cap B^c \cap C) =$
   $= 0,3 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,395.$

2. P(ir únicamente a dos lugares) = $P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A^c \cap B \cap C) =$
   $= 0,3 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,395.$

3. P(ir a los tres lugares) = $P(A \cap B \cap C) = 0,3 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,105.$



Los vértices son: A=(0, 10), B=(2, 2) y C=(10, 0).

El coste es mínimo en B(2, 2); esto es, cuando x = 2 e y = 2, siendo Coste = 6000 pesetas.

Esta solución se comprueba trazando las recta de nivel 1000x + 2000y = k, que tienen su nivel mínimo (k mínimo) cuando tocan en B=(2, 2).

Solución 2-b:

Sabemos que el error admitido E, viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}$, siendo p la proporción de defectuosos, q la de no defectuosos, n el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor de la variable normal correspondiente a una confianza $1-\alpha$.

De la expresión anterior se deduce: $n = (Z_{\alpha/2})^2 \frac{pq}{E^2}$

Con esto:

1. Para una confianza del 95%, α = 0,05, $Z_{\alpha/2}$ = 1,96 (valor de Z correspondiente a P(X < Z) = 0,975), p = 0,05, q = 0,95. De donde n = 37,4.

Luego el tamaño muestral debe ser n>37; un mínimo de 38.

2. Para una confianza del 99%, α = 0,01, $Z_{\alpha/2}$ = 2,575, p = 0,05, q = 0,95. De donde n = 64,65.

Luego el tamaño muestral debe ser n = 65.

3. Para una confianza del 99,9%, α = 0,001, $Z_{\alpha/2}$ = 3,27, p = 0,05, q = 0,95. De donde n = 104,25.

Luego el tamaño muestral debe ser n > 104.

Solución 3-a:

1. El dominio de la función es **R**-{4}.

Puede verse que para x < 4, f(x) > 0 y para x > 4, f(x) < 0.

2. y 3. En x = 4 hay una asíntota vertical.

Si $x \to 4^-$, $f(x) \to +\infty$ Si $x \to 4^+$, $f(x) \to -\infty$

La recta y = -4 - x es asíntota oblicua, pues $f(x) = \dfrac{x^2}{4-x} = -4 - x + \dfrac{16}{4-x}$

Si $x \to -\infty$, $\dfrac{16}{4-x} \to 0^+$, luego f(x) va por encima de la asíntota.

Si $x \to +\infty$, $\dfrac{16}{4-x} \to 0^-$, luego f(x) va por debajo de la asíntota.

4. y 5. Como $f'(x) = \dfrac{2x(4-x)+x^2}{(4-x)^2} = \dfrac{-x(x-8)}{(4-x)^2}$.

f´(x) = 0 en x = 0 y x = 8.

Hay que ver el signo de la derivada a izquierda y derecha de 0, 4 y 8. Se tiene:

Si x < 0, *f´(x)* < 0, de donde *f(x)* decrece.

Si 0 < x < 4, *f´(x)* > 0, de donde *f(x)* crece.

Si 4 < x < 8, *f´(x)* > 0: *f(x)* crece.

Si x > 8, *f´(x)* < 0: *f(x)* decrece.

Como a la izquierda de 0 es decreciente y a su derecha creciente, en x = 0 hay un mínimo.

En x = 8 sucede al revés, luego se da un máximo relativo.

6. Como k = 8, hay que calcular:

$$\int_8^{16}(-4-x-\frac{x^2}{4-x})dx=\int_8^{16}\frac{16}{x-4}dx=16L(x-4)\Big|_8^{16}=16L3$$

Solución 3-b:

Compramos x ordenadores de un tipo e y del otro.

Se tiene: $x + y = 18$

Se desea: $B = x \cdot y^2$, máximo.

Luego, $B = (18 - y)\cdot y^2 = 18y^2 - y^3$
Para extremo: $B' = 0$ $\quad B' = 36y - 3y^2 = 0$ $\quad y = 0$ e $y = 12$.

Como $B'' = 36 - 6y$, el máximo se da para $y = 12$, pues $B''(12) < 0$.

En consecuencia, $x = 6$.

El alumno deberá elegir una prueba (A o B) y, dentro de ella, hacer solamente cuatro preguntas.

Prueba A

1. **Se ha aplicado un test de fluidez verbal a 500 alumnos de primero de E.S.O. de un centro de secundaria. Se supone que las puntuaciones obtenidas se distribuyen según una normal de media 80 y desviación típica 12. Se pide:**

a) **¿Qué puntuación separa el 25% de los alumnos con menos fluidez verbal?**

b) **¿A partir de qué puntuación se encuentra el 25% de los alumnos con mayor fluidez verbal?**

2. **Una encuesta realizada sobre 40 aviones comerciales revela que la antigüedad media de estos es de 13,41 años con una desviación típica muestral de 8,28 años. Se pide:**

b) **¿Entre qué valores, con un 90% de confianza, se encuentra la auténtica media de la flota comercial?**

c) **Si se quiere obtener un nivel de confianza del 95% cometiendo el mismo error de estimación que en el apartado anterior y suponiendo también que s=8,28 años, ¿cuántos elementos deberían componer la muestra?**

3. **Hace 10 años, el 52 de los ciudadanos estaban en contra de una ley. Recientemente, se ha elaborado una encuesta a 400 personas y 184 se mostraron contrarios a la ley. Con estos datos y con un nivel de significación del 0,01, ¿podemos afirmar que la proporción de contrarios a la ley ha disminuido?**

4. **El dueño de un manantial de agua llega a la conclusión de que, si el precio a que vende la botella es x pesetas, sus beneficios vendrán dados por la fórmula**

$$B = 10x - x^2 - 21$$

en miles de pesetas por día.

Representa la función precio-beneficios e indica cuál será el precio de la botella para obtener el beneficio máximo.

5. **Se mezclan tres clases de vino de la siguiente manera:**

e) **5 litros de Tenerife, 6 de La Palma y 3 de Lanzarote, resultando una mezcla de 120 pesetas/litro.**

f) **1 litros de Tenerife, 3 de La Palma y 6 de Lanzarote, dando un vino de 111 pesetas/litro.**

g) **3 litros de Tenerife, 6 de La Palma y 6 de Lanzarote, dando un vino de 116 pesetas/litro.**

Halla el precio por litro de cada clase de vino.

6. **Escribe el sistema en forma matricial y resuélvelo:**

x - 2y + z = 0; -3x + 3z = 4; -2x + y + z = 2

Solución 1:

Se trata de una distribución N(80, 12), que se tipifica mediante la normal N(80, $\frac{X-80}{12}$)

a) Hay que calcular el valor de z_0 tal que P(Z < z_0) = 0,25 $z_0 \approx$ -0,675.

Luego, -0,675 = $\frac{X-80}{12}$ X = 71,9.

b) En este caso, hay que calcular el valor de z_0 tal que P(Z < z_0) = 0,75 $z_0 \approx$ 0,675.

Luego, 0,675 = $\frac{X-80}{12}$ X = 88,1.

Solución 2:

a) La distribución de las medias muestrales de tamaño n, obtenidas en una población normal se ajusta a la normal N($\bar{x}$, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$). En nuestro caso, con n = 40, la distribución de

b) medias muestrales será N(13,41, $\frac{8,28}{\sqrt{40}}$): N(13,41, 1,31).

El intervalo de confianza es :

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de 1-α .

En nuestro caso, para el 90% de confianza $Z_{\alpha/2}$ = 1,645.
Luego, el intervalo de confianza para media poblacional es:

(13,41 - 1,645·1,31, 13,41 + 1,645·1,31) = (11,26, 15,56)

b) Sabemos que el error admitido *E*, viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, siendo σ la desviación típica poblacional, que en su defecto puede ser reemplazada por la desviación típica muestral *s*.

De la expresión anterior se deduce: $n = (Z_{\alpha/2})^2 \frac{s^2}{E^2}$

En nuestro caso, para una confianza del 95%, $\alpha = 0{,}05$, $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$, $s = 8{,}28$ y $E =$ 2,15, se tendrá: $n = (1{,}96)^2 \dfrac{8{,}28^2}{2{,}15^2} = 56{,}98$, esto es $n = 57$.

Solución 3:

La distribución de las proporciones muestrales de tamaño n, obtenidas en una población con proporción p se ajusta a una normal $N\left(p, \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)$, siendo $q = 1 - p$ y n el tamaño muestral. En nuestro caso, $p = 0{,}52$, $q = 0{,}48$ y $n = 400$; luego, será N(0,52, 0,025).

En la encuesta reciente, $p' = 184/400 = 0{,}46$.

La probabilidad $P(p < 0{,}46) = P\left(Z < \dfrac{0{,}46 - 0{,}52}{0{,}025}\right) = P(Z < -2{,}4) = 1 - 0{,}9918 = 0{,}0082$.

Como este valor es menor que 0,01, habrá que admitir que la proporción de contrarios a la ley ha disminuido (con una confianza del 99%).

Solución 4:

La representación es una parábola de eje vertical, con vértice en el máximo.
Corta al eje OX en x = 3 y x = 7 (con esto, el máximo se da en x = 5, y vale 4. A este mismo resultado se llega aplicando derivadas: B´ = 10 - 2x = 0 x = 5).

Puntos de su gráfica son: (3, 0), (5, 0) y (5, 4).

Solución 5:

Sean x, y, z el precio, respectivo, del litro de vino de Tenerife, La Palma y Lanzarote.
Con los datos dados, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 5x + 6y + 3z = 120 \cdot 14 \\ x + 3y + 6z = 111 \cdot 10 \\ 3x + 6y + 6z = 116 \cdot 15 \end{cases}$$

Multiplicando la tercera ecuación por $\dfrac{9}{6}$ y restándole las otras dos ecuaciones, queda:

$\dfrac{9}{6}$(3x + 6y + 6z = 1740) - (5x + 6y + 3z = 1680) - (x + 3y + 6z = 1110)

$\dfrac{-3}{2}x = -180$ x = 120.

Y con esto, y = 130, z = 100.

Solución 6:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Formando la matriz ampliada y utilizando el método de Gauss, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ f2+3f1 \\ f3+2f1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Se observa que la segunda y tercera ecuación son proporcionales. En consecuencia, el sistema es compatible indeterminado, equivalente a:

$$\begin{cases} x-2y=-z \\ 3y=-2+3z \end{cases}$$

cuya solución es: $\begin{cases} x=-\dfrac{4}{3}+t \\ y=-\dfrac{2}{3}+t \\ z=t \end{cases}$

Contesta de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas.

Opción A

1. **Tres familias van a una heladería. La primera familia pide dos helados grandes, uno mediano y uno pequeño; la segunda familia pide uno grande, dos medianos y dos pequeños, y la tercera familia pide dos grandes y tres pequeños.**

a) Escribe una matriz 3x3 que exprese el nombre de los helados grandes, medianos y pequeños que pide cada familia. (0,5 puntos).

b) Si la primera, la segunda y la tercera familia han gastado en total en la heladería 700, 800 y 775 pesetas, respectivamente, calcula el precio de un helado grande, el de un helado mediano y el de un helado pequeño, (2 puntos).

2. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 2x^3 - 2x$ y el eje de abscisas.

3. **Una fábrica tiene tres máquinas, A, B y C, que producen tornillos. Del total de tornillos se producen, respectivamente, el 50%, el 30% y el 20%. La máquina A produce un 5% de tornillos defectuosos, la B un 4% y la C, un 2%.**
   c) **Calcula la probabilidad de que un tornillo, elegido al azar, sea defectuosos. (1 punto).**
   d) **Si un tornillo elegido al azar resulta defectuoso, calcula la probabilidad de que lo haya producido la máquina C. (1,5 puntos).**

4. **Se supone que la estatura de los chicos de 18 años de cierta población sigue una normal de media 162 cm y desviación típica 12 cm. Se toma una muestra al azar de 100 de esos chicos encuestados y se calcula sus media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media esté entre 159 y 165 cm?**

Opción B

5. De tres amigos, Arnau, Joan y Pere, se sabe lo siguiente:
"El doble de la edad de Arnau más el triple de la edad de Joan es tres años superior a cuatro veces la edad de Pere. El triple de la edad de Pere menos el doble de la edad de Joan es siete años inferior al doble de la edad de Arnau. El doble de la edad de Arnau más el doble de la edad de Pere es tres años inferior a cinco veces la edad de Joan".
Calcular la edad de cada uno de los tres amigos.

6. **Dibujara la región de terminada por las inecuaciones**

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \\ 2y \geq 3x \end{cases}$$

y maximizar la función *f*(x, y) = 4x + 3y sometida a las restricciones dadas por estas inecuaciones.

7. **Se desea construir una caja abierta (sin tapa) recortando cuadrados iguales de cada una de las esquinas de una hoja de cartón rectangular de dimensiones 3 y 8 dm. Calcular la longitud del lado del cuadrado que se ha de cortar para obtener un caja de volumen máximo.**

8. **En una determinada población se toma una muestra al azar de 256 personas. De esta muestra, el 20% de las personas lleva gafas graduadas y el 80% restante no.**
   Calcula el intervalo de confianza aproximada para la proporción de personas que llevan gafas graduadas con un nivel de confianza del 95%.

Opción A:

Solución 1:

a) La matriz será: $\begin{array}{c} \\ F1 \\ F2 \\ F3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} G & M & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$

b) Sean x, y, z los precios de los helados grandes, medianos y pequeños, respectivamente. Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 700 \\ x + 2y + 2z = 800 \\ 2x + 3z = 775 \end{cases} \begin{array}{c} E1 - 2E2 \\ \Leftrightarrow \\ E3 - 2E2 \end{array} \begin{cases} -3y - 3z = -900 \\ x + 2y + 2z = 800 \\ -4y - z = -825 \end{cases} \begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ E1 : (-3) \\ \end{array} \begin{cases} x + 2y + 2z = 800 \\ y + z = 300 \\ -4y - z = -825 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \\ \Leftrightarrow \\ E3 + E2 \end{array} \begin{cases} x + 2y + 2z = 800 \\ y + z = 300 \\ -3y = -525 \end{cases} \qquad y = 175,\ z = 125 \text{ y } x = 200 \text{ pesetas.}$$

Solución 2:

La curva $y = 2x^3 - 2x$ corta al eje de abscisas en $x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$, que son las soluciones de $2x^3 - 2x = 2x(x^2 - 1) = 0$.

Entre -1 y 0 la curva va por encima del eje; entre 0 y 1, va por debajo. (Es fácil verlo gráficamente). Con esto, el área pedida vale:

$$A = \int_{-1}^{0} (2x^3 - 2x)dx - \int_{0}^{1} (2x^3 - 2x)dx = \left[\frac{x^4}{2} - x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^4}{2} - x^2\right]_{0}^{1} = 1.$$

Solución 3:

Sea D el suceso "el tornillo es defectuoso". Sean A, B, C, los sucesos "el tornillo se fabrica en A", en B o en C, respectivamente.

.

a) P(D) = P(A)·P(D/A) + P(B)·P(D/B) + P(C)·P(D/C) =

= 0,5·0,05 + 0,3·0,04 + 0,2·0,02 = 0,041

b) $P(C/D) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}02}{0{,}041} = \dfrac{4}{41}$

Solución 4:

La distribución de la media muestral de tamaño n, obtenidas en una población de media μ y desviación típica σ, $N(\mu, \sigma)$, se distribuye según una normal $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

En nuestro caso, con n=100, la distribución de medias muestrales será N(162, 1,2), pues $\dfrac{12}{\sqrt{100}} = 1{,}2$.

Luego,

$$P(159 < X < 165) = P\left(\frac{159 - 162}{1{,}2} < Z < \frac{165 - 162}{1{,}2}\right) = P(-2{,}5 < Z < 2{,}5) = 0.9876$$

Opción B:

Solución 5:

Si los años de esos amigos son:

Arnau = x años   Joan = y años   Pere = z años

Se tiene:

2x + 3y = 4z + 3   3z -2y = 2x -7   2x +2z = 5y -3

Esto es:

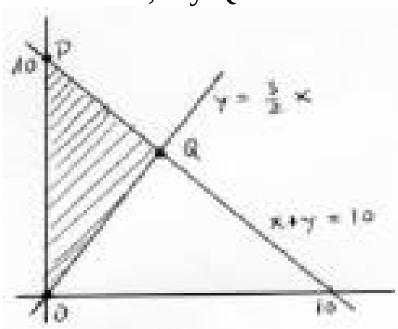
$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y-4z=3 \\ -2x-2y+3z=-7 \\ 2x-5y+2z=-3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ E2+E1 \\ E3-E1 \end{array} \left.\begin{array}{r} 2x+3y-4z=3 \\ y-z=-4 \\ -8y+6z=-6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ E3+8E2 \end{array} \left.\begin{array}{r} 2x+3y-4z=3 \\ y-z=-4 \\ -2z=-38 \end{array}\right\}$$

Despejando y sustituyendo, se tiene:

x = 17   y = 15   z = 19

Solución 6:

La región del plano determinada por las inecuaciones dadas es la indicada en la figura adjunta: el triángulo e vértices O, P y Q.



Las coordenadas de esos vértices son:

O = (0, 0)   P = (0, 10)   Q: $\left\{\begin{array}{l} x+y=10 \\ y=\frac{3}{2}x \end{array}\right.$, Q = (4, 6)

Cómo sabemos, el máximo de *f*(x, y) = 4x + 3y se da en uno de esos vértices, teniéndose:

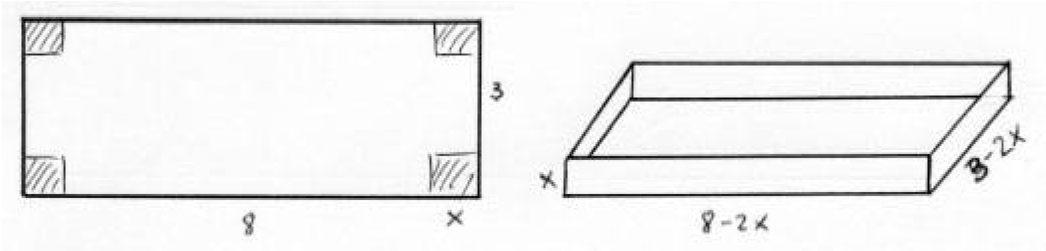
f(0, 0) = 0   *f*(0, 10) = 30   *f*(4, 6) = 34

El máximo se alcanza cuando x = 4 e y = 6.

Solución 7:

Cortando un cuadrado de lado x, las dimensiones de la caja (véase la figura) serán:

largo, 8 - 2x   ancho, 3 - 2x   alto, x



El volumen es

$$V = (8 - 2x)(3 - 2x)x \quad = 4x^3 - 22x^2 + 24x$$

Para máximo, $V' = 0$ y $V'' < 0$.

$V' = 12x^2 - 44x + 24 = 0$, si $x = 3$ (que hay que rechazar, pues nos quedamos sin cartón) y si $x = \frac{2}{3}$.

La solución buena es $x = \frac{2}{3}$, pues $V''(x) = 24x - 44$ y $V''(\frac{2}{3}) = -28$.

Luego hay que cortar un cuadrado de lado $\frac{2}{3}$ dm.

Solución 8:

El intervalo de confianza para la proporción de la población es:

$$\left(p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}},\ p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \right)$$

siendo p la proporción de la muestra, $q = 1 - p$, n el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

En nuestro caso:

$p = 0{,}2$ $\qquad q = 0{,}8$ $\qquad n = 256$ $\qquad Z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

Luego, el intervalo de confianza será:

$$\left(0{,}20 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{256}},\ 0{,}20 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{256}} \right) = (0{,}20 - 0{,}049,\ 0{,}20 + 0{,}049) =$$

$$= (0{,}151,\ 0{,}249).$$

El porcentaje pedido está entre el 15,1% y el 24,9%.

El alumno deberá contestar a cuatro bloques elegidos entre los seis que siguen.

1. Una autoescuela tiene abiertas tres sucursales en la ciudad. El número total de matriculados es 352, pero los matriculados en la tercera son tan sólo una cuarta parte de los matriculados en la primera.
Además, la diferencia entre los matriculados en la primera y los matriculados en la segunda es inferior en dos unidades al doble de los matriculados en la tercera.
a) Plantear un sistema de ecuaciones para averiguar el número de alumnos matriculados en cada sucursal.
b) Resolverlo.

2. Una confitería es famosa por sus dos especialidades en tartas: la tarta Imperial y la tarta de Lima.
La tarta Imperial requiere para su elaboración medio kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 1.200 pesetas. La tarta de Lima necesita 1 kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 1.500 pesetas.
Debido a una mala previsión, se encuentra con la imposibilidad de realizar pedidos de huevos y azúcar, y elaborados ya todos los demás productos que ofertan, les quedan en el almacén 10 kilos de azúcar y 120 huevos para la preparación de las citadas tartas.

a) **¿Qué combinaciones de especialidades puede hacer? Plantear el problema y representar gráficamente el conjunto de soluciones.**
b) **¿Cuántas unidades de cada especialidad han de producirse para obtener el mayor ingreso por ventas? ¿A cuánto asciende dicho ingreso?**

3. Cierta empresa de material fotográfico oferta una máquina que es capaz de revelar y pasar a papel 15,5 fotografías por minuto. Sin embargo, sus cualidades se van deteriorando con el tiempo, de forma que el número de fotografías por minuto será función de la antigüedad de la máquina, de acuerdo a la siguiente expresión (F(x) representa el número de fotografías por minuto cuando la máquina tiene x años):

$$F(x) = \begin{cases} 15{,}5 - 1{,}1x, & 0 \le x \le 5 \\ \dfrac{5x+45}{x+2}, & x > 5 \end{cases}$$

a) **Estudiar la continuidad de la función F.**
b) **Comprobar que el número de fotografías por minuto decrece con la antigüedad de la máquina. Justificar que si tiene más de 5 años revelará menos de 10 fotografías por minuto.**
c) **Justificar que, por muy vieja que sea la máquina, no revelará menos de 5 fotografías por minuto.**

4. Dada la función $f(x) = x + \frac{a}{x^3}$, donde *a* es una constante,

a) **Encontrar una primitiva de *f*.**
b) **Si *F* es una primitiva de *f*, ¿puede serlo también *G(x) = F(x) + 2x*?**
c) **Encontrar *a* sabiendo que $\int_1^2 f(x)dx$ = 1,5**

5. El 25% de las familias de cierta comunidad autónoma española no sale fuera de la misma durante las vacaciones de verano. El 65% veranea por el resto de España y el 10% restante se va al extranjero. De los que se quedan en su comunidad, sólo un 10% no utiliza el coche en sus desplazamientos. Esta cantidad aumenta al 30% entre los que salen por el resto de España, y al 90% entre los que viajan al extranjero.

a) **calcula el porcentaje de familias de esa comunidad que utiliza el coche en sus desplazamientos de vacaciones de verano.**
b) **Una familia no usa el coche en sus vacaciones de verano. ¿Cuál es la probabilidad de que salga de su comunidad moviéndose por el resto de España?**

6. En los últimos tiempos, las ventas medias en un comercio rondaban las 120.000 pesetas diarias. Sin embargo, hace unos meses abrió una superficie comercial cerca del mismo. El establecimiento defiende que las ventas medias se mantiene o, incluso, han aumentado, pero no han disminuido.
Para contrastar estadísticamente este supuesto se ha seleccionado una muestra de las ventas diarias realizadas después de la apertura de la superficie comercial.

a) **Establecer la hipótesis nula y alternativa.**
b) **¿Qué nombre recibe la probabilidad de que el establecimiento concluya erróneamente que las ventas medias han disminuido? Explica cómo se denomina y en qué consiste el otro error posible?**
c) **El establecimiento ha encargado el estudio a un especialista y en su informe afirma textualmente que "el valor obtenido al realizar el contraste es significativo", pero el establecimiento no entiende el significado de la frase. ¿Significa que el establecimiento debe concluir que sus ventas medias disminuyeron, o es lo contrario?**

Solución 1:

Sean x, y, z, los alumnos matriculados en la primera, segunda y tercera autoescuela, respectivamente.

Según el enunciado, se cumple:

$$\begin{cases} x + y + z = 352 \\ z = \dfrac{1}{4}x \qquad (\quad x = 4z) \\ x - y = 2z - 2 \end{cases}$$

Sustituyendo, queda: $\begin{cases} 5z + y = 352 \\ 2z - y = -2 \end{cases}$ $\qquad 7z = 350$

Luego, la solución es:

x = 200; y = 102; z = 50

Solución 2:

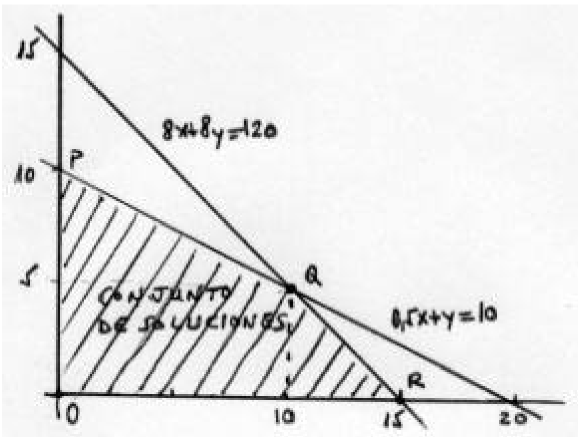
Con los datos anteriores se obtiene:

	Cantidad	Azúcar	Huevos	Ingresos
T. Imperial	x	0,5x	8x	1200x
T. Lima	y	y	8y	1500y
Existencias		10 kilos	120 huevos	

a) Las combinaciones posibles son las soluciones del sistema de inecuaciones:

$$0{,}5x + y \leq 10$$
$$8x + 8y \leq 120$$
$$x \geq 0; \; y \geq 0$$

Estas soluciones son las de la región factible dada en la figura adjunta.



Más concretamente, todos los puntos de coordenadas enteras, interiores o de frontera del cuadrilátero de vértices:

O=(0, 0), P=(0, 10), Q=(10, 5) y R=(15, 0).

b) Se trata de maximizar I(x, y) = 1200x + 1500y, sujeta a las restricciones anteriores.

El óptimo se da cuando x = 10 e y = 5, y supone un ingreso de
I(10, 5) = 19.500 pesetas.

(En los otros vértices se obtiene: I(0, 10) = 15.000; I(15, 0) = 18.000).

Solución 3:

a) El único punto donde puede haber discontinuidad es en x = 5. En ese punto se tiene:

$F(5) = 10 \qquad F(x \to 5^-) \to 10 \qquad F(x \to 5^+) \to 10$

Como los tres valores coinciden, F es continua en x = 5. Por tanto, F es continua en todo punto de su dominio.

b) Hasta los 5 años es obvio que decrece, pues 15,5 - 1,1x es una recta de pendiente negativa.

Para x > 5, $F(x) = \dfrac{5x+45}{x+2}$ y $F'(x) = \dfrac{-35}{(x+2)^2}$.

Como *F´* es siempre negativa, *F* será decreciente siempre.

Al valer F(5) = 10, la máquina revelará menos de 10 fotos a partir del 5º año.

c) La función $F(x) = \dfrac{5x+45}{x+2}$ tiene una asíntota horizontal, y = 5, pues si $x \to +\infty$, $F(x) \to 5$.

Además, *F*(x) > 5, ya que $F(x) = \dfrac{5x+45}{x+2} = 5 + \dfrac{35}{x+2}$

Solución 4:

a) $F(x) = \int (x + \dfrac{a}{x^3})dx = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{a}{2x^2} + c$

b) *G*(x) no puede ser otra primitiva, pues su diferencia con *F*(x) debe ser una constante; en este caso es 2x.

c) $\int_1^2 (x + \dfrac{a}{x^3})dx = \left[\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{a}{2x^2}\right]_1^2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3a}{2}$

Si $\int_1^2 f(x)dx$ = 1,5, entonces $\dfrac{3}{2} + \dfrac{3a}{2}$ = 1,5 $\qquad a$ = 0.

Solución 5:

La situación descrita se muestra en la tabla siguiente:

	No sale	Por España.	Extranjero.
Porcentaje	25	65	10
No usa coche	10%	30%	90%
Usa coche	90%	70%	10%

a) Por la probabilidad total:

P(Usar coche) = 0,25·0,9 + 0,65·0,7 + 0,1·0,1 = 0,69
P(No usar coche) = 0,25·0,1 + 0,65·0,3 + 0,1·0,9 = 0,31 = 1 - 0,69.

b) Por Bayes:

$$P(\text{Por España/no usa coche}) = \frac{0{,}65 \cdot 0{,}3}{0{,}31} = \frac{195}{310} = 0{,}629.$$

Solución 6:

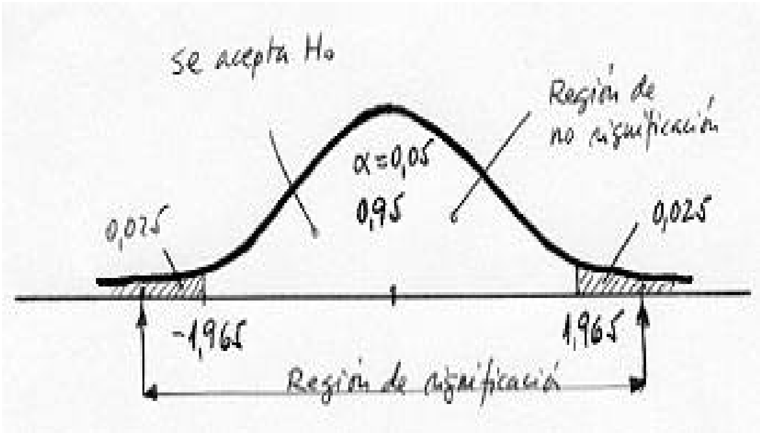
a) Hipótesis nula, H_0: las ventas no han variado
Hipótesis alternativa, H_1: las ventas han disminuido

b) Si se rechaza la hipótesis nula siendo verdadera, se comete un error llamado de tipo I. El nombre que recibe esta probabilidad es el de *nivel de significación*; suele denotarse por α. Esta probabilidad se suele especificar antes de tomar la muestra; valores frecuentes de α son 0,05 o 0,01. Tomar α = 0,05 indica que se asume un riesgo del 5% de cometer un error de tipo I. O, lo que es lo mismo, se tiene una confianza de acertar del 95%.

El otro error posible, llamado de tipo II, se comete cuando no se rechaza la hipótesis nula siendo falsa.

c) Pensamos que la expresión del experto no es del todo clara. Que “el valor obtenido al realizar el contraste es significativo”, puede significar que la diferencia entre la vieja media y la nueva es lo suficientemente grande como para rechazar la hipótesis nula. Por ejemplo, para α = 0,05, una diferencia superior a 1,96 desviaciones típicas respecto de la media antigua indica que la nueva media cae dentro de “región crítica de la hipótesis”, dentro de la “región de significación”; los valores de Z normales entre -1,96 y 1,96 determinan la región de aceptación de la hipótesis (o región de no significación). Gráficamente se indica en la figura adjunta.

d)



Se acepta Ho
Región de
no significación
α=0,05
0,95
0,025
0,025
-1,965
1,965
Región de significación

Opción A

1. **a) Considerar una matriz A de orden m x n con $m \neq n$.**
   Razonar si se puede calcular la expresión $AA^t - A^tA$, siendo A^t la matriz traspuesta de A. (4 puntos).

b) **Considerar la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$**. Resolver por el método de Gauss:**

ii) **El sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es A^tA.**
(4 puntos).

iii) **El sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es AA^t.**
(4 puntos).

2. **Dada la función** $f(x) = 2x^2 + 4\ln x$**, se pide:**
   b) **¿Cuál es el dominio de definición de *f*(x)? (1 punto).**
   c) **Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*(x). razonar si existen máximo y mínimo y, en caso afirmativo, calcularlos. (3 puntos).**
   d) **Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de *f*(x). Razonar si existen puntos de inflexión y, en caso afirmativo, calcularlos. (4 puntos).**
   e) **Determinar, si existen, las asíntotas de *f*(x). (2 puntos).**

3. **Tenemos tres cajas, una verde, una roja y una amarilla y, en cada caja, hay un amoneda. La de la caja verde está trucada y la probabilidad de que salga cara es doble de la probabilidad de que salga cruz; la moneda de la caja roja tiene dos caras y la de la caja amarilla no está trucada. Se toma una caja al azar y se lanza la moneda que está en la caja. Calcula razonadamente:**
   c) **La probabilidad de que salga cara. (5 puntos).**
   d) **La probabilidad de que, sabiendo que ha salido cara, se haya lanzado la moneda de la caja roja. (5 puntos).**

Solución 1:

a) Indicando la dimensión, se tiene:

$AA^t = A_{m \times n} \cdot A^t_{n \times m} = M_{m \times m}$

$A^tA = A^t_{n \times m} \cdot A_{m \times n} = M_{n \times n}$

Como m $\neq$ n, la operación $AA^t - A^tA$ no se puede realizar.

b) La matriz de coeficientes es: $A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Haciendo transformaciones en esa matriz (restando a la segunda fila la primera, y a la tercera, el doble de la primera), queda:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ -9 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la segunda y tercera fila son proporcionales, el sistema asociado es:

$\begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ -3x - y = 0 \end{cases}$ (y = -3x). La solución es: $\begin{cases} x = t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$

ii) La matriz de coeficientes es: $AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

Siendo el sistema asociado

$\left.\begin{aligned} 2x + y = 0 \\ x + 6y = 0 \end{aligned}\right\}$, cuya única solución es x = 0 e y = 0.

Solución 2:

a) Dominio: números reales mayores que 0.

b) $f'(x) = 4x + \dfrac{4}{x} = \dfrac{4x^2 + 4}{x}$ > 0, para todo x del dominio. Luego f es creciente en todos su dominio.

En consecuencia, no tiene máximos ni mínimos.

c) $f''(x) = 4 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{4x^2 - 4}{x^2}$.

f'' = 0 en x = 1 (la solución x = -1 cae fuera del dominio).

Si 0 < x < 1, f'' < 0, luego f es convexa ($\cap$)
Si x > 1, f'' > 0, y f cóncava.

En x = 1 hay inflexión. El punto de inflexión es (1, f(1)) = (1, 2).

d) Existe una asíntota vertical: x = 0^+, hacia $-\infty$, pues $\lim\limits_{x \to 0^+} (2x^2 + 4\ln x) = -\infty$

Solución 3:

Sean V, R y A las cajas verde, roja y amarilla. Y sea C, el suceso salir cara.

Se tiene:

Para V: P(C/V) = $\frac{2}{3}$ Para R: P(C/R) = 1 Para A: P(C/A) = $\frac{1}{2}$

La probabilidad de elegir cada una de esas cajas es P(V) = P(R) = P(A) = $\frac{1}{3}$

a) Luego:

$$P(C) = P(V)P(C/V) + P(R)P(C/R) + P(A)P(C/A) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{13}{18}$$

b) $$P(R/C) = \frac{P(R)P(C/R)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{13}{18}} = \frac{6}{13}$$

El alumno elegirá el Ejercicio A o el B, del que sólo hará TRES de los cuatro problemas propuestos. Cada problema se puntuará de 0 a 3,33.

EJERCICIO A

Problema 1.- Con 2000 pesetas se pueden comprar los artículos A, B, C y D en la tienda "Compre barato", y con 2.100 pesetas se pueden comprar los mismos cuatro artículos en la tienda "Vendemos calidad". En esta segunda tienda los precios de A, B y C son un 20% superiores a los de la primera tienda, en tanto que el precio de D en la segunda es un 15% más barato que en la primera. Averiguar razonadamente el precio de D en la tienda primera, y justificar que no podemos hallar el precio de A, con los datos que nos han dado

Problema 2.- Se considera el triángulo de vértices (0, 0), (2, 8) y (10, 3). Determinar razonadamente:

a) **El punto del triángulo donde la función f(x, y) = -4x + y + 9 alcanza el máximo.**
b) **El punto del triángulo donde la función g(x, y) = 4x + y + 12 alcanza el máximo**.

Problema 3.- Hallar las dimensiones de una ventana de 6 metros de perímetro para que tenga la máxima superficie posible, y, así, produzca máxima luminosidad.

Problema 4.- Sacamos al azar, y sin reposición, cuatro cartulinas numeradas del 1 al 4. Averiguar la probabilidad de que salgan ordenadas.
Razona si la probabilidad sería menor o mayor en el supuesto de tener sólo tres cartulinas numeradas.
Razona si la probabilidad sería menor o mayor si tuviésemos 10 cartulinas numeradas.

Solución 1:

Sean *a, b, c, d* los precios de los artículos A, B, C y D, respectivamente, en la tienda "Compre barato". Se tendrá:

$$a + b + c + d = 2000$$

En la otra tienda se cumple que $1{,}2a + 1{,}2b + 1{,}2c + 0{,}85d = 2100$.

Se tiene, pues:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 2000 \\ 1{,}2a + 1{,}2b + 1{,}2c + 0{,}85d &= 2100 \end{aligned}$$

Multiplicando por 1,2 la primera ecuación y restándole la segunda, queda:

$$1{,}2d - 0{,}85d = 1{,}2\cdot 2000 - 2100 \qquad 0{,}35d = 300 \qquad d \approx 857.$$

Ninguna de las otras incógnitas puede determinarse con estos datos: faltan ecuaciones.

Solución 2:

Se trata de un problema de programación lineal en el que la región factible viene definida por los puntos interiores y del borde del triángulo dado.

Como sabemos, los valores máximos o mínimos se dan en el borde la región factible: en los vértices o en un lado, si en los dos vértices que lo determinan la función alcanza el mismo valor.

a) Para $f(x, y) = -4x + y + 9$, se tiene

$$f(0, 0) = 9 \qquad f(2, 8) = 9 \qquad f(10, 3) = -28$$

Como el máximo se da en dos de los vértices, (0, 0) y (2, 8), también se dará en cualquiera de los puntos del segmento (lado) que determinan.

b) Para $g(x, y) = 4x + y + 12$, se tiene

$$g(0, 0) = 12 \qquad g(2, 8) = 28 \qquad g(10, 3) = 55$$

El máximo se da en el punto (10, 3).

<u>Nota:</u> Un estudio gráfico, representando el triángulo y las rectas de nivel asociadas a cada una de las funciones, confirma de manera clara nuestro resultado.

Solución 3:

Sea x la base e y la altura del rectángulo.
Se tiene que

$$2x + 2y = 6 \qquad y = 3 - x$$

Se desea hacer máxima su superficie,

$$S = xy = x(3 - x) = 3x - x^2$$

Luego, $S' = 0$.

$$S' = 3 - 2x = 0 \qquad x = \frac{3}{2}$$

Como $S'' = -2 < 0$, se trata de un máximo.

Por tanto, la solución es: base $x = \frac{3}{2}$, altura $y = \frac{3}{2}$. Será una ventana cuadrangular.

Solución 4:

Suponemos que se entiende por salir ordenadas el que lo hagan en orden creciente.
Con esto:

· Para cuatro cartulinas, $P(1, 2, 3, 4) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$

· Para tres cartulinas, $P(1, 2, 3) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$, que es mayor que la anterior.

· Para diez cartulinas, $P(1, 2, \ldots, 10) = \frac{1}{10!} = \frac{1}{3628800}$, que es menor que las dos anteriores

Solución 1:

a) Sean x, y, z los CD de Marcos, Luis y Miguel, respectivamente. Se tiene que

$$16 \le x + y + z \le 22$$

La evolución del número de CD en función de los prestamos que se hacen, se da en la tabla:

	Inicio	Marcos presta…	Luis presta …	Miguel presta…	Final
Marcos	x	x - 4	x - 4 + 1		x - 3
Luis	y		y - 1	y + 1	y + 1
Miguel	z	z + 4		z + 4 - 2	z + 2

Al final se tiene que

$$x - 3 = y + 1 = z + 2$$

donde cada miembro puede tomar el valor 6 o 7, pues su suma tiene que ser un número entero entre 16 y 22.

Si $x - 3 = y + 1 = z + 2 = 6$ $\quad x = 9,\ y = 5,\ z = 4$. En total 18 CD.
· Si $x - 3 = y + 1 = z + 2 = 7$ $\quad x = 10,\ y = 6,\ z = 5$. En total 21 CD.

b) La cadena es correcta hasta la última igualdad, pues AB no es igual, en general, a BA. En consecuencia no se pueden anular mutuamente.

Solución 2:

a) Al cortar un cuadrado de lado x en cada esquina queda una caja de dimensiones:

largo: $8 - 2x$ ancho: $4 - 2x$ alto: x

Su volumen es

$$V = (8 - 2x)(4 - 2x)x = 4x^3 - 24x^2 + 32x$$

b) El máximo se da cuando $V' = 0$, luego:

$$V' = 12x^2 - 48x + 32$$

que vale 0 cuando $x = \dfrac{48 \pm \sqrt{768}}{24} \approx \begin{cases} 0{,}85 \\ 3{,}15 \end{cases}$

La solución $x = 3{,}15$ no es posible. El máximo se da cuando $x = 0{,}85$; como puede comprobarse viendo que $V'' = 24x - 48 < 0$ para ese valor.

c) Ese volumen es, aproximadamente, V = 12,32.

Solución 3:

Parte I

a) Los dos hombres son últimos cuando la mujer es la primera. Esto se produce con una probabilidad de 1/3. Esto es:

$P(MHH) = \frac{1}{3}$

(Puede verse que las posiciones posibles son: MHH, HMH y HHM)

b) La mujer entra antes que alguno de los hombres en 2 de las tres ocasiones, luego,

$P(S_1) = \frac{2}{3}$

Los dos hombres entran consecutivamente en 2 de las tres ocasiones, luego,

$P(S_2) = \frac{2}{3}$

Con esto, $P(S_1) \cdot P(S_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

La $P(S_1 \cap S_2) = \frac{1}{3}$ (Es el caso MHH, de los tres posibles)

Como $P(S_1) \cdot P(S_2) \neq P(S_1 \cap S_2)$, los sucesos no son independientes.

Solución 3:

Parte II:

a) La distribución de la media muestral de tamaño n y desviación típica σ, se distribuye según una normal $N(\bar{x}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

En nuestro caso, $\bar{x} = 104$, $\sigma = 5$ y n = 16. Luego, será N(104, 1,25).

b) El intervalo de confianza es $\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

siendo σ la desviación típica poblacional y $Z_{\alpha/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1-\alpha$. En nuestro caso, para el 95% de confianza $Z_{\alpha/2}$ = 1,96.

Luego, el intervalo será:

$$(104 - 1{,}96 \cdot 1{,}25,\ \ 104 + 1{,}96 \cdot 1{,}25) = (101{,}55,\ \ 106{,}45)$$

Dos urnas A y B, que contienen bolas de colores, tiene la siguiente composición:

A: 5 blancas, 3 negras y 2 rojas.

B: 4 blancas y 6 negras.

También tenemos un dado que tiene 4 caras marcadas con la letra A y las otras dos con la letra B. Tiramos el dado y sacamos una bola al azar de la urna que indica el dado

a) **(0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?**
b) **(0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?**
c) **(0,75 puntos) La bola ha resultado ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?**

Solución:

Se tienen las siguientes probabilidades:

P(A) = 2/3 P(B) = 1/3

P(blanca/A) = P(b/A) = 5/10 P(n/A) = 3/10 P(r/A) = 2/10

P(b/B) = 4/10 P(n/B) = 6/10

a) $P(\text{blanca}) = P(b) = P(A) \cdot P(b/A) + P(B) \cdot P(b/B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} = \frac{7}{15}$

b) $P(\text{roja}) = P(r) = P(A) \cdot P(r/A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{10} = \frac{2}{15}$

c) $P(B/b) = P(B) \cdot P(b/B) : P(b) = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{7}{15}} = \frac{2}{7}$

Un estudio realizado sobre 100 usuarios revela que un automóvil recorre anualmente un promedio de 15200 km con una desviación típica de 2250 km.

a) **(1 punto) Determine un intervalo de confianza, al 99%, para la cantidad promedio de kilómetros recorridos.**

b) **(1 punto) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido no sea superior a 500 km, con igual confianza?**

Solución:

a) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media $\overline{x}$, es:

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo s la desviación típica poblacional y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de 1- α.

Para $\overline{x}$ = 15200, σ = 2250, n =100 y, para el 99% de confianza $Z_{\alpha/2}$= 2,575, se tiene

$$\left(15200 - 2{,}575\frac{2250}{\sqrt{100}},\ 15200 + 2{,}575\frac{2250}{\sqrt{100}}\right) =$$

$$= (15200 - 579{,}375,\ \ 15200 + 579{,}375) \approx (14621,\ \ 15779)$$

b) Sabemos que el error admitido E, viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$.

En nuestro caso,

$$2{,}575 \cdot \frac{2250}{\sqrt{n}} < 500 \ \Rightarrow\ \sqrt{n} > 11{,}5875 \ \Rightarrow\ n > 134$$

Calcule las funciones derivadas de las siguientes:

a) **(1 punto)** $f(x) = \dfrac{Lx}{x^2}$ **(Lx indica logaritmo neperiano de x)**

b) **(1 punto)** $g(x) = (1 - x^3)\cos x$

c) **(1 punto)** $h(x) = 4x^3 - 5x + \dfrac{1}{e^x}$

Solución:

a) $f(x) = \dfrac{Lx}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}x^2 - 2xLx}{x^4} = \dfrac{1 - 2Lx}{x^3}$

b) $g(x) = (1 - x^3)\cos x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -3x^2 \cos x - (1 - x^3) senx$

c) $h(x) = 4x^3 - 5x + \dfrac{1}{e^x} \quad \Rightarrow \quad h(x) = 4x^3 - 5x + e^{-x} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 12x^2 - 5 - \dfrac{1}{e^x}$

(3 puntos) Para fabricar dos tipos de cables, A y B, que se venderán a 150 y 100 pta el metro, respectivamente, se emplean 16 kg de plástico y 4 kg de cobre para cada hm (hectómetro) del tipo A y 6 kg y 12 kg de cobre paca cada hm del tipo B. Sabiendo que la longitud del cable fabricado del tipo B no puede ser mayor que el doble de la del tipo A y que, además, no pueden emplearse más de 252 kg de plástico ni más de 168 kg de cobre, determine la longitud, en hm, de cada tipo de cable que debe fabricarse para que la cantidad de dinero obtenida en su venta sea máxima.

Solución:

Con los datos anteriores se obtiene:

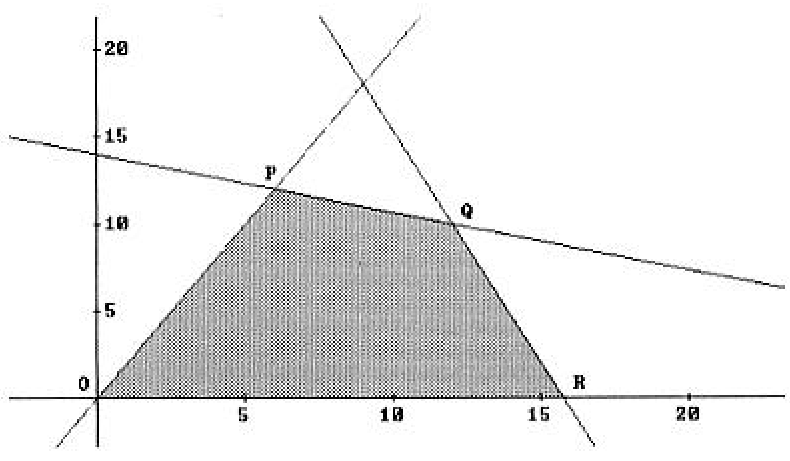
	hm	Plástico	Cobre	Ingresos
Tipo A	x	16x	4x	15000x
Tipo B	y	6x	12y	10000y
Disponibilidades		252 kg.	168 kg	

El objetivo es maximizar los ingresos: $I(x, y) = 15000x + 10000y$

restringido por: $y \leq 2x$

$$16x + 6y \leq 252$$
$$4x + 12\,y \leq 168$$
$$x \geq 0;\quad y \geq 0$$

Estas restricciones generan la región factible (sombreada) en la siguiente figura.



Los vértices son:

O = (0, 0), P: $\begin{cases} y = 2x \\ 4x + 12y = 168 \end{cases} \Rightarrow$ P = (6, 12)

Q: $\begin{cases} 16x + 6y = 252 \\ 4x + 12y = 168 \end{cases} \Rightarrow$ Q = (12, 10) y R = (15,75, 0).

Los ingresos para esos niveles de producción son:

En O, I(0, 0) = 0.
En P, I(6, 12) = 210.000 pta
En Q, I(12, 10) = 280.000 pta
En R, I(15,75, 0) = 236.250 pta

Los ingresos máximos se obtienen fabricando 12 hm de cable de tipo A y 10 hm del tipo B.