1.- Determina dos matrices cuadradas *X* e *Y* de orden 2 tales que: $X - 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $2X + Y = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

2.- Estudia la independencia lineal de las matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.- Prueba que las siguientes matrices son una base del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.- Se considera el conjunto $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} a, b \in R \right\}$. Prueba que *A* es un subespacio vectorial

5.- Halla dos matrices cuadradas de orden dos y no nulas de modo que su producto sea la matriz nula

6.- Las matrices *A*, *B* y *C* son no nulas y cuadradas, verificando que *A*•*B* = *A*•*C*. ¿Se puede asegurar que *B* = *C*?

7.- Calcula la potencia enésima de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

8.- Calcula la potencia enésima de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

9.- Calcula la potencia enésima de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10.- Demuestra que si *A* conmuta con *B* y *C*, también conmuta con *B* + *C*

11.- Demuestra que si *A* y *B* conmutan, $(A+B) \bullet (A-B) = A^2 - B^2$

12.- Determina dos matrices *A* y *B* de manera que $3A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $-A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

13.- Decide sobre la dependencia lineal de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

14.- Se considera el conjunto $M = \left\{ \begin{pmatrix} c & b \\ b & -c \end{pmatrix} b, c \in R \right\}$. Prueba que *M* es un subespacio

15.- Prueba que las matrices del tipo $\begin{pmatrix} a & b & 2a \\ a & b & b \\ b & -b & -a \end{pmatrix}$ forman un subespacio vectorial

16.- Se dice que una matriz cuadrada *A* es simétrica si $A = A^t$ y antisimétrica si $A = -A^t$

a) Comprueba que para cualquier matriz cuadrada *A*, las matrices $A+A^t$ y $A-A^t$ son simétrica y antisimétrica resp.

b) Prueba que cualquier matriz cuadrada se puede descomponer como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica

c) Aplica el resultado anterior a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

17.- Dada una matriz cuadrada *A*, se dice que *B* es inversa de *A* si y sólo si se cumple *A*•*B* = *B*•*A* = *I*. Prueba que si *B* y *C* son inversas de *A* entonces *B* = *C*

18.- Sean *a* y *b* números reales y $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula *A*•*B*. ¿Conmutan *A* y *B* para cualesquiera *a* y *b*?

b) ¿Tiene inversa cualquier matriz de ese tipo?

c) Induce una fórmula para A^{-1}

19.- Comprueba que si una matriz cuadrada A verifica $A^2 + 3A - 3I = 0$ entonces esta matriz tiene inversa

20.- Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y sea $N = A - I$. Halla el cubo de N y una fórmula para la inversa de A

21.- Calcula la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

22.- Halla la potencia enésima de $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

23.- Halla la potencia enésima de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

24.- Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = A - I$. Calcular las potencias de A y de B

25.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

26.- Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$ (idempotente). Si $B = 2A - I$, prueba que $B^2 = I$

27.- Demostrar que si A verifica la relación $A^2 - A - I = 0$, entonces existe inversa de A

28.- Demostrar que una matriz A es involutiva ($A^2 = I$) si y sólo si $(I-A)\bullet(I+A) = 0$

29.- Determinar dos matrices X e Y tales que $2X - 5Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $-X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

30.- Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ verifica la relación $A^n = 3^{n-1}\bullet A$

31.- Sean a, b, c tres números reales verificando $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$. Calcula las potencias de A

32.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2$ halla sin desarrollar

$$\begin{vmatrix} 4x & 4y & 4z \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+1 & 2y+2 & 2z+4 \\ 3+x & 5+y & 1+z \end{vmatrix}$$

33.- Los números 338, 728, y 221 son múltiplos de 13. Demuestra, sin desarrollarlo, que el determinante $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 8 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 13

34.- Prueba sin desarrollar que $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

35.- Haz lo mismo para comprobar que $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

36.- Calcula los determinantes $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 & 5 \\ 5 & 2 & 7 & -3 \\ -3 & -7 & 4 & 4 \\ -4 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 4 & 2 \\ 4 & 14 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 2 & a & 1 & 0 \\ 2 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 & a \end{vmatrix}$

Soluciones: 6, 2924, 0, $a^4 - 8a^2 + 18a$

37.- Calcula las inversas de $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Soluciones: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -5/2 & -1/4 \\ -1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$,

$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a^2 & -a^3 \\ 0 & -1 & -a & -a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

38.- Prueba sin desarrollar que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} = 0$

39.- Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 2x+1 \\ 2x+1 & 3x-1 & 4x \\ 3x-1 & 4x & 6x-1 \end{vmatrix} = 0$ Soluciones: $x = 0$, $x = ½$

40.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ calcula sin desarrollar $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 5 & 0 & 10 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5a & 5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+5 & 2b & 2c+10 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$

41.- Calcula los determinantes $\begin{vmatrix} 3 & 16 & 24 & 33 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 13 \\ 2 & 8 & 4 & 11 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Soluciones: -1, 0, -16, -3

42.- Calcula los determinantes $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ Soluciones: 48, 1, 160

43.- Calcula los determinantes $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ Soluciones: 394, 665

44.- Desarrolla haciendo ceros los determinantes $\begin{vmatrix} m & m & m & m \\ m & a & a & a \\ m & a & b & b \\ m & a & b & c \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$

Soluciones: $m(a-m)(b-a)(c-b)$, $ax^3 + bx^2 + cx + d$

45.- Comprueba sin desarrollar que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 17

46.-Calcula $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & 0 & a & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$ Soluciones: $ab + b^2 - ac - 2bc + c^2$, $-2x^3 - 2y^3$

47.- Desarrolla $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ Soluciones: $(b-a)(c-a)(c-b)$, $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$

48.- Desarrolla $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$ Solución: $abc + abd + acd + bcd + abcd$

49.- Halla el determinante de la matriz cuadrada construida de la forma que se indica: $a_{ii} = 1+x$, $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$
Solución: $(n+x)x^{n-1}$

50.- Calcula el determinante de la matriz definida por: $a_{11} = 1$, $a_{ii} = 0$ si $i \neq 1$, $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$. Solución: $(-1)^{n-1}$

51.- Probar que el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 13

52.- Calcula los determinantes $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d+e & e+c & c+d \\ de & ec & cd \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}$ Soluciones: $(c-d)(c-e)(d-e)$, $(ad-bc)^2$

53.- Halla mediante determinantes el rango de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & -10 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -8 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -5 & -3 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Soluciones: 4 , 4

54.- Hallar el rango de *A* según los distintos valores de *a* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & a \\ 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$

Soluciones: Si $a = 8$ rango 2, otro caso rango 3
Si $a = 20$ rango 3, otro caso rango 4

55.- Calcula el rango de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 13 \\ 1 & -2 & 3 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ Soluciones: 3, 2, 3, 2, 3, 3

56.- Comprueba la igualdad $\begin{vmatrix} x & xy & y \\ 2x & x+y & 2y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-y)(x+y-2xy)$

57.- Prueba que se verifican las siguientes igualdades: $\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} \operatorname{tg} a & \sec a \\ \sec a & \operatorname{tg} a \end{vmatrix} = -1$,

$\begin{vmatrix} \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos a \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 a$

58.- Calcula los determinantes $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 15 & 1 & 14 & 4 \\ 6 & 12 & 7 & 9 \\ 10 & 8 & 11 & 15 \\ 3 & 13 & 12 & 16 \end{vmatrix}$

Soluciones: -295, $(x+1)^4$, -9240

59.- Calcula el rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 5 & 11 \\ 5 & 6 & 9 & 11 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & a+r & a+2r \\ a+3r & a+4r & a+5r \\ a+6r & a+7r & a+8r \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & 9 & 0 & -3 & -3 \\ -4 & -2 & 6 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -4 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Soluciones: 4; 3; 3; 3; 2 si $r\neq 0$, 0 si $r=a=0$, 1 si $r=0$ y $a\neq 0$; 3; Si n es par, el rango es n. Si n es impar, el rango es n-1

60.- ¿Qué condición deben cumplir los términos a,b,c y d para que el rango de la matriz sea 3?

$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ x & b & 0 & 0 \\ y & x & c & 0 \\ r & t & z & d \end{pmatrix}$ Solución: alguno de ellos debe ser nulo

61.- Calcula los determinantes $\begin{vmatrix} a+b & a & a & \dots & a \\ a & a+b & a & \dots & a \\ a & a & a+b & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & a+b \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 4 & 6 & \dots & \dots \\ 2 & 6 & 12 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$

Soluciones: $b^n + nab^{n-1}$, 2^n

62.- Todos los elementos de una matriz cuadrada de orden n se multiplican por –1. ¿Cómo queda afectado el valor del determinante?. Solución: No varía si n es par, cambia de signo si n es impar

63.- Demostrar que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 11

64.- Calcula los determinantes $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & y & y & y \\ x & y & z & z \\ x & y & z & t \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$,

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ 1 & \cos y & \cos 2y \\ 1 & \cos z & \cos 2z \end{vmatrix}$ Soluciones: $x(t-z)(z-y)(y-x)$; x^2z^2 ; -10;

6 ; -7 ; $2(\cos y - \cos x)(\cos z - \cos x)(\cos z - \cos y)$

65.- Se considera el determinante R de orden n tal que $a_{ij} = 1$ para $i \neq j$ y $a_{ii} = 0$. Prueba que $R = (-1)^{n-1} \bullet (n-1)$

66.- Calcula el rango de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Soluciones: 3 , 3

67.- De dos matrices cuadradas A y B de orden dos se sabe: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} a & 8 \\ 2 & b \end{pmatrix}$. Calcular los posibles valores de a y b. Soluciónes: $a = 6$, $b = 16$; $a = 16$, $b = 6$

68.- Calcula la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x \end{pmatrix}$ siendo $x^3 = 1$, $x \neq 1$ Solución: $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2 & x \\ 1 & x & x^2 \end{pmatrix}$

69.- Calcula los determinantes $\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ -1 & b & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b \end{vmatrix}$

Soluciones: $(-a+b+c+d)(-a+b-c-d)(-a-b+c-d)(-a-b-c+d)$, $a + ab + ab^2 + ab^3$

70.- Demostrar que el determinante $R = \begin{vmatrix} \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \operatorname{sen}(x+a) & \operatorname{sen}(x+b) & \operatorname{sen}(x+c) \\ \operatorname{sen}(b-c) & \operatorname{sen}(c-a) & \operatorname{sen}(a-b \end{vmatrix}$ es independiente de x. Hallar los valores de a, b y c para que sea nulo, sabiendo que son menores que $\frac{\pi}{2}$ en valor absoluto.

Solución: $R = -\operatorname{sen}^2(b-c) - \operatorname{sen}^2(c-a) - \operatorname{sen}^2(a-b)$, R es nulo si $a = b = c$

71.- Demostrar que el determinante $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 3

72.- Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} a+x & x & x & x \\ x & b+x & x & x \\ x & x & c+x & x \\ x & x & x & d+x \end{vmatrix} = 0$ Solución: $x = \dfrac{-abcd}{abc+abd+acd+bcd}$

73.- Calcula los determinantes $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 6 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \ln 2 & 2\ln 2 & 3\ln 2 & 4\ln 2 \\ \ln 3 & 2\ln 3 & 3\ln 3 & 4\ln 3 \\ \ln 5 & 2\ln 5 & 3\ln 5 & 4\ln 5 \end{vmatrix}$,

$\begin{vmatrix} -1 & x & \dots & x & x \\ x & -1 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & -1 & x \\ x & x & \dots & x & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^x & x & 2 & x^2 \\ e^{2x} & x^2 & 4 & x^4 \\ e^{3x} & x^3 & 8 & x^6 \end{vmatrix}$ Soluciones: 6 ; 0 ; $((n-1)x-1)(-1-x)^{n-1}$;

$(e^x-2)(x^2-2)(x-2)(e^x-x)(x^2-x)(e^x-x^2)$