El alumno elegirá el Ejercicio A o el B, del que sólo hará TRES de los cuatro problemas propuestos. Cada problema se puntuará de 0 a 3,33.

EJERCICIO A

Problema 1.- Halla el volumen de un paralelepípedo de bases ABCD y EFGH sabiendo que A=(8, 0, 0), B=(0, 8, 0), C=(0, 0, 8) y E=(8, 8, 8). Obtén las coordenadas de los restantes vértices.

Problema 2.- Considera la superficie limitada por:

· La semicircunferencia $y = 5 + \sqrt{25 - x^2}$

· El eje OX.

· El segmento que une los vértices (5, 0) y (5, 5).

· El segmento que une los vértices (-5, 0) y (-5, 5).

Halla el volumen de la figura obtenida al girar esa superficie una vuelta alrededor del eje OX.

Problema 3.- Se reparten unas invitaciones sabiendo que sólo el 40% asistirán al acto. Se selecciona al azar 10 invitados. Calcular:

a) La probabilidad de que sólo tres de esos diez invitados acudan al acto.

b) La probabilidad de que acudan más de tres de los diez.

Problema 4.- Resolver el sistema formado por las tres ecuaciones:

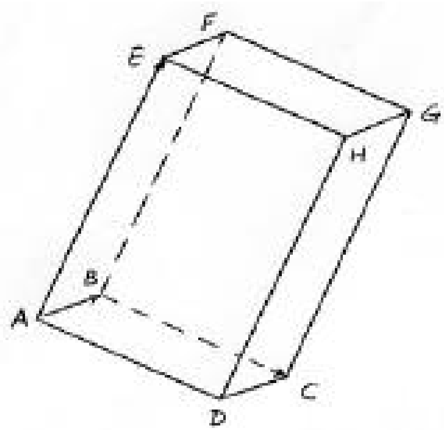
$$x + y + z = 3; \quad 2x - y = 1; \quad -x + 2y + z = 2$$

y justificar si tiene o no las mismas soluciones que el sistema

$$x + y + z = 3; \qquad 2x - y = 1$$

Solución 1:

Como puede verse en la figura adjunta, las aristas del paralelepípedo vienen dadas por los vectores:



AB=(-8, 8, 0), **BC**=(0, -8, 8), **AE**=(0, 8, 8)

El volumen es el módulo del producto mixto
de los tres, que vale:

$$V = \left\|\begin{matrix} -8 & 8 & 0 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & 8 & 8 \end{matrix}\right\| = 2 \cdot 8^3$$

Si O es el origen de coordenadas, los demás vértices se obtiene como sigue:

OD = **OA** + **BC** = (8, 0, 0) + (0, -8, 8) = (8, -8, 8).D=(8, -8, 8).
OH = **OE** + **EH** = **OE** + **BC** = (8, 8, 8) + (0, -8, 8) = (8, 0, 16). H=(8, 0, 16).
OF = **OE** + **EF** = **OE** + **AB** = (8, 8, 8) + (-8, 8, 0) = (0, 16, 8). F=(0, 16, 8).
OG = **OF** + **FG** = **OF** + **BC** = (0, 16, 8) + (0, -8, 8) = (0, 8, 16). G=(0, 8, 16).

Nota: Hemos supuesto que los vértices están ordenados, siendo las aristas AE, BF, CG y DH. Si no fuese así, podrían darse soluciones distintas.

Solución 2:

El volumen pedido viene dado por la integral

$$V = \pi \int_{-5}^{5} (5 + \sqrt{25 - x^2}\,)^2 dx = \pi \int_{-5}^{5} (25 + 25 - x^2 + 10\sqrt{25 - x^2}\,)\, dx =$$
$$= \pi \int_{-5}^{5} (50 - x^2) dx + \pi \int_{-5}^{5} 10\sqrt{25 - x^2}\, dx$$

Calculo de $\pi \int_{-5}^{5} 10\sqrt{25 - x^2}\, dx$

Haciendo x = 5cos t, queda:

dx = -5sen t dt; t = arccos(x/5); $\text{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t$; $\text{sen}^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$

Luego,

$$\pi \int_{-5}^{5} 10\sqrt{25 - x^2}\, dx = \pi \int_{\pi}^{0} 10 \cdot (-25) \text{sen}^2 t dt = -250\pi \int_{\pi}^{0} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt$$
$$= \pi \left(\frac{-250}{2} t + \frac{250}{4} \text{sen}\, 2t\right)\Big|_{\pi}^{0} = \frac{250}{2} \pi^2$$

Por otra parte, $\pi \int_{-5}^{5} (50 - x^2) dx = 2\pi \left(50x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{5} = 2\pi \left(250 - \frac{125}{3}\right)$

Luego el volumen pedido vale,

$$V = 2\pi(250 - \frac{125}{3}) + \frac{250}{2}\pi^{2}$$

Solución 3:

Se trata de una distribución binomial B(10, 0,4), pues P(acudir) = p =0,4, siendo q = 0,6.

Con esto,

a) $P(X = 3) = \binom{10}{3} 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^7 = 0{,}215$

b) $P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) =$

$= 1 - \binom{10}{3} 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^7 - \binom{10}{2} 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^8 - \binom{10}{1} 0{,}4 \cdot 0{,}6^9 - \binom{10}{0} 0{,}6^{10} =$

= 1 -0,215 - 0,121 - 0,04 - 0,006 = 0,618.

Solución 4:

El sistema es

$$\left\{\begin{array}{ll} x + y + z = 3 & \Leftrightarrow \\ 2x - y = 1 & E2 - 2E1 \\ -x + 2y + z = 2 & E3 + E1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ -3y - 2z = -5 \\ 3y + 2z = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 3y + 2z = 5 \end{array}\right.$$

cuya solución es:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}t \\ y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t \\ z = t \end{array}\right.$$

El segundo sistema es $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 3y + 2z = -5 \end{array}\right.$, que es idéntico al primero. (Puede verse que *E3*=*E1*-*E2*). Por tanto, ambos sistemas tienen las mismas soluciones.

OPCIÓN A

Ejercicio 1

Haciendo el cambio de variable $t = e^x$, calcula $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$

Ejercicio 2

Se sabe que la función f: [0, 5] $\to$ R, dada por $f(x) = \begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ c+\sqrt{x-1} & \text{si } 2 \le x \le 5 \end{cases}$ **es derivable en el intervalo (0, 5) y verifica $f(0) = f(5)$. ¿Cuánto valen a, b y c?**

Ejercicio 3

Halla el punto Q simétrico del punto P=(2, 0, 1) respecto a la recta r, que pasa por el punto A=(0, 3, 2) y es paralela a la recta s de ecuaciones: $s \equiv \begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases}$

Ejercicio 4

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. **Determina si A y B son invertibles y, en su caso, calcula la matriz inversa. (1, 5 puntos).**
2. **Resuelve la ecuación matricial BA - A^2 = AB - X. (1 punto).**

Solución 1:

No existe solución al ejercicio 3 (Geom

Si $t = e^x$, se tiene $dt = e^x dx$; además, si $x = 0$, $t = 1$; y si $x = 1$, $t = e$. Luego:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx = \int_1^e \frac{1}{t^2+3t+2}dt$$

Esta integral se puede hacer por descomposición en fracciones simples, pues:

$$\frac{1}{t^2+3t+2} = \frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2} = \frac{A(t+2)+B(t+1)}{(t+1)(t+2)}$$

De donde: $1 = A(t+2) + B(t+1)$

si $t = -1 \Rightarrow 1 = A$

si $t = -2 \Rightarrow 1 = -B$

Con esto:

$$\int_1^e \frac{1}{t^2+3t+2} = \int_1^e \frac{1}{t+1}dt + \int_1^e \frac{-1}{t+2}dt = [\ln(1+t)]_1^e - [\ln(t+2)]_1^e =$$

$$= \ln(e+1) - \ln(2) - \ln(e+2) + \ln 3$$

Solución 2:

Como la función es derivable debe ser continua, luego, en x = 2 se cumple:

$2a + 4b = c + 1$ [1]

pues: si x $\to 2^-$, $f(x) \to 2a + 4b$ y si x $\to 2^+$, $f(x) \to c + 1$.

Por ser derivable en (0, 5) debe serlo en x = 2, luego $f'(2^-) = f'(2^+)$.

Como $f'(x) = \begin{cases} a + 2bx & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 1/2\sqrt{x-1} & \text{si } 2 \le x \le 5 \end{cases}$, se tendrá:

$f'(2^-) = a + 4b = \frac{1}{2} = f'(2^+)$. [2]

Por otra parte, $f(0) = f(5)$, de donde

$f(0) = 0 = c + 2 = f(5) \Rightarrow c = -2$

Sustituyendo en [1] y [2], se tiene:

$2a + 4b = -1$

$2a + 8b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$ y $a = \frac{-3}{2}$

No existe solución al ejercicio 3 (Geometría)

Solución 4:

1. Los determinantes de A y B valen:

$|A| = -3$. Luego, A tiene inversa. $|B| = 0$. Luego, B no tiene inversa

La matriz de los adjuntos de A es: $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Luego, $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|} = \dfrac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

2. Despejando:

$$X = AB + A^2 - BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

No existe solución al ejercicio 3 (Geom

OPCIÓN A

A.1. Discutir el sistema

$$\begin{cases} x+(a^2-1)y+az=1 \\ (a^2-1)y+(a-1)z=0 \\ x+a^2z=0 \end{cases}.$$

según sea el valor del parámetro *a* [1,5 puntos]. Hallar, si existe, la solución del mismo cuando *a* = 0 [1 punto].

A.2. Hallar el punto simétrico del punto A=(-1, 3, 3) respecto al plano π de ecuación general x+y-2z=5 [2,5 puntos] .

A.3. Dada la función f definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ ax^3+bx. & -1 \leq x < 2 \\ 11x-16, & 2 \leq x \end{cases}$$

Se pide:

i) **Hallar *a* y *b* para que la función sea continua en todo x real [0,5 puntos].**
ii) **Analizar su derivabilidad [1 punto]**
iii) **Representación gráfica [1 punto].**

A.4. Un campo de atletismo de 400 metros de perímetro consiste en un rectángulo con un semicírculo en cada uno de los dos lados opuestos. Hallar las dimensiones del campo para que el área de la parte rectangular sea lo mayor posible
[2,5 puntos].

Solución 1:

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema tendrá solución si rango (A) = rango(M): r(A) = r(M). En nuestro caso:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2-1 & a & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 & 0 \end{array}\right)=M\ .$$

Rango de A:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix}=(a^2-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix}=(a^2-1)^2.$$

Luego, $|A| = 0$ si $a = -1$ o $a = 1$. $|A| \neq 0$ si $a \neq \pm 1$.

Si $a = -1$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = M$, de donde r(A) = 2 y r(M) = 3. Luego el sistema será incompatible.

Si $a = 1$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = M$, con r(A) = 1 y r(M) = 2. El sistema será incompatible.

Si $a \neq \pm 1$, r(A) = r(M) = 3. El sistema será compatible determinado.

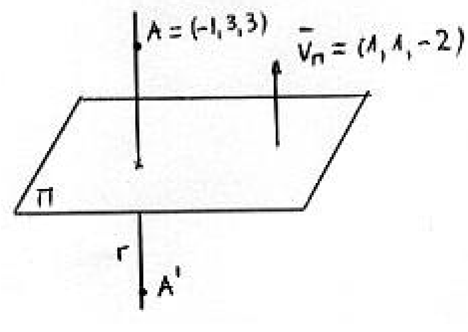
· Cuando $a = 0$, el sistema queda: $\begin{cases} x - y = 1 \\ \text{- y - z} = 0 \\ \text{x} = 0 \end{cases}$ cuya solución es x = 0, y = -1, z = 1.

Solución 2:

Sea A' el simétrico de A respecto de π. Ambos puntos A y A' estarán en la recta r, perpendicular a π por A.

Como v_π =(1, 1, -2), se deduce que

r: $\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$



Además d(A, π) = d(A', π), y como d(A,π) = $\left|\dfrac{-1+3-6-5}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}\right| = \dfrac{9}{\sqrt{6}}$, se tendrá que

$$\text{d(A'},\pi) = \frac{-1+\lambda+3+\lambda-6+4\lambda-5}{\sqrt{6}} = \frac{-9}{\sqrt{6}} \Rightarrow -9 + 6\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = 3.$$

Por tanto, A'=(2, 6, -3).

Solución 3:

i) f(x) está definida para todo $x \in \mathbf{R}$, siendo cada función parcial continua. En consecuencia hay que estudiar su continuidad sólo en $x = -1$ y en $x = 2$.

En x=-1.

Si $x \to -1^-$, $f(x) = 0 \to 0$. Si $x \to -1^+$, $f(x) = ax^3 + bx \to -a - b$.

Con esto, $0 = -a - b$.

En x=2.

Si $x \to 2^-$, $f(x) = ax^3 + bx \to 8a + 2b$. Si $x \to 2^+$, $f(x) = 11x - 16 \to 6$.

Por tanto, $6 = 8a + 2b$.

Luego, $a = 1$ y $b = -1$, siendo $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ x^3 - x. & -1 \le x < 2 \\ 11x - 16, & 2 \le x \end{cases}$

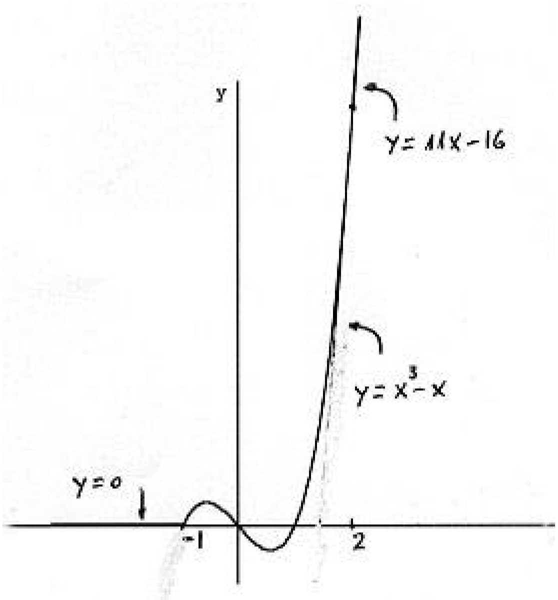
ii) Derivando cada trozo, se obtiene:

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 3x^2 - 1. & -1 \le x < 2 \\ 11, & 2 \le x \end{cases}$$

En $x = -1$, $f'(-1^-) = 0$ y $f'(-1^+) = 2 \Rightarrow f'(-1)$ no existe.

En $x = 2$, $f'(2^-) = 11$ y $f'(2^+) = 11 \Rightarrow f$ es derivable en $x = 2$, siendo $f'(2) = 11$.

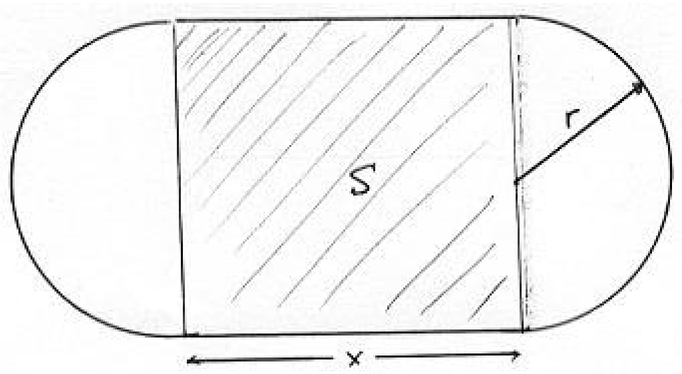
iii)



Puede verse que f tiene un máximo en $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y un mínimo en $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Solución 4:

Sea x la longitud de la parte recta, y r el radio de cada semicírculo.



Tendremos:

$$2x + 2\pi r = 400, \text{ de donde } x = 200 - \pi r,$$

siendo $S = 2rx$ la función que se quiere hacer máxima.

Sustituyendo el valor de x, queda

$$S = 2r(200 - \pi r) = 400r - 2\pi r^2 .$$

Para máximo:

$$S' = 400 - 4\pi r = 0 \Rightarrow r = \frac{100}{\pi}.$$

Como $S'' = -4\pi$, el máximo se da para el valor de r hallado.

Las dimensiones de la parte rectangular serán x por $2r$, con $x = 100$ y $2r = \frac{200}{\pi}$.

Escoge cuatro de los seis ejercicios siguientes.

1. (puntuación máxima 2,5 puntos)

Dada la identidad matricial $X\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

i) **¿Cuáles son las dimensiones de una matriz solución de la identidad anterior?**
ii) **Calcula su solución.**
iii) **¿Es única la solución?. Razona las respuestas.**

2. (puntuación máxima 2,5 puntos)

Dados los sistemas $S_1 : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y = 8 \end{cases}$ $S_2 : \begin{cases} x - z = 6 \\ 2x - 2z = 12 \end{cases}$

i) **Halla las soluciones comunes.**
ii) **Haciendo uso únicamente del número de soluciones obtenidas en el apartado anterior, ¿puede cada uno de los sistemas definir los puntos de un plano?**

3. (puntuación máxima 2,5 puntos)

i) **Calcula para qué valor de** α **la función** $f(x) = (x - \alpha)^2 + \cos x$ **tiene un extremo en el punto de abscisa x = 0. ¿De qué tipo de extremo se trata?**
ii) **Para el valor de** α **calculado, determina los cortes de la curva con los ejes y los dominios de monotonía.**

4. (puntuación máxima 2,5 puntos)

Halla el valor de *a* para que $\int_{-a}^{a} \left| |x| - 1 \right| dx = 4$

Justificar la respuesta.

5. (puntuación máxima 2,5 puntos)

Los puntos P(1, 1, 0) y Q(0, 2, 1), son dos vértices contiguos de un rectángulo.

Un tercer vértice pertenece a la recta $\begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

i) **Determina los vértices de un rectángulo que verifique las condiciones anteriores.**
ii) **¿Qué posición relativa debería tener la recta r y la que contiene al segmento PQ, para que la solución fuese única?. Razona la respuesta.**

6. (puntuación máxima 2,5 puntos)
Sea f(x) = x^2.
Se considera el lugar geométrico de los puntos del plano que son punto medio del segmento que une dos puntos cualesquiera de la gráfica con abscisas diferenciadas en dos unidades.
i) **Halla la ecuación que define dicho lugar geométrico.**
ii) **Identifica la cónica obtenida en el apartado anterior.**

Solución 1:

i) Como sabemos, por lo que respecta a sus dimensiones, el producto de matrices se comporta así: $A_{mp}xB_{pn} = C_{mn}$. En nuestro caso, p = 2, n = 2 y m = 3, luego X debe ser una matriz 3 x 2.

ii) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 9 & -5 \\ 13 & -7 \end{pmatrix}$

iii) En este caso es evidente que la solución es única. En general, la ecuación matricial XA = B tiene solución única cuando existe A^{-1} y puede hacerse el producto BA^{-1}.

Solución 2:

i) La solución de S_1 es $\begin{cases} x = 8 + t \\ y = t \\ z = 8 + 3t \end{cases}$

Tenemos pues una recta de soluciones, que llamamos r.

El sistema S_2 es equivalente a $\{x = 6 + z$. Esta solución es un plano: el plano π : x-z=6.

Las soluciones comunes son los puntos comunes, si los hay, entre r y π. Sustituyendo r en π se tiene:

$$8 + t - 8 - 3t = 6 \Rightarrow t = -3$$

Luego P=(5, -3, -1) es la solución común a S_1 y S_2.

ii) Como se ha dicho, la solución de S_2 es un plano, pues tiene dos grados de indeterminación.

Solución 3:

Para extremo, $f'(x) = 0$. En este caso, $f'(0) = 0$.

Como $f'(x) = 2(x-\alpha) - \operatorname{sen} x \;\Rightarrow\; f'(0) = -2\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = 0$

Si $\alpha = 0$, $f(x) = x^2 + \cos x$, $f'(x) = 2x - \operatorname{sen} x$, $f''(x) = 2 - \cos x$.

Como $f''(0) = 1 > 0$, se trata de un mínimo.

ii) Corte con eje OY:

Si $x = 0$, $f(0) = 1$. Punto de corte (0, 1).

Corte con eje OX: $x^2 + \cos x = 0$ (?). Pero como el mínimo de $f(x)$ vale $f(0) = 1$, la función no corta al eje OX, pues $x^2 + \cos x$ nunca vale 0..

Monotonía:

$f'(x) = 2x - \operatorname{sen} x = 0$ cuando $x = 0$, que es una solución de $2x - \operatorname{sen} x = 0$.

Pero, ¿sólo existe esa solución?
Si, pues $g(x) = 2x - \operatorname{sen} x$ es una función creciente, ya que $g'(x) = 2 - \cos x > 0$ siempre.

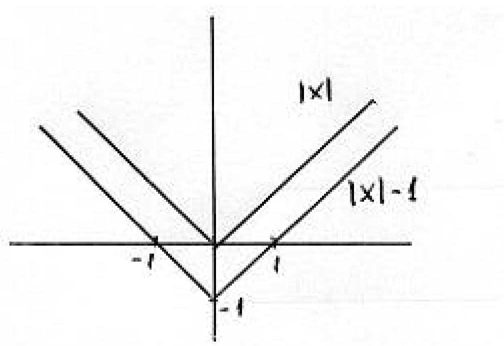
Por tanto, $2x - \operatorname{sen} x$ sólo puede ser cero una vez.

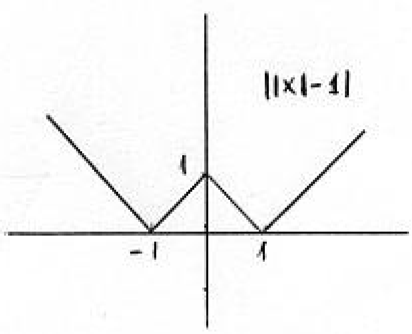
Así pues:

Para $x < 0$, $f'(x) < 0$, luego $f(x)$ es decreciente.
Para $x > 0$, $f'(x) > 0$, luego $f(x)$ es creciente.

Solución 4:

A partir de la gráfica de $|x|$ podemos representar la de $||x|-1|$





Por tanto, $f(x) = \left||x|-1\right| = \begin{cases} -x-1, & \text{si x < -1} \\ x+1, & \text{si -1} \le \text{x} \le 0 \\ -x+1, & \text{si } 0 < x < 1 \\ x-1, & \text{si x} \ge 1 \end{cases}$

Y la integral

$$\int_{-a}^{a} \left||x|-1\right| dx = 2\int_0^1 (-x+1)dx + 2\int_1^a (x-1)dx =$$

$$= 2\left(\frac{-x^2}{2}+x\right)_0^1 + 2\left(\frac{x^2}{2}-x\right)_1^a = 2 + a^2 + a$$

Para que valga 4:

$$2 + a^2 + a = 4 \Rightarrow a = 1 + \sqrt{3}$$

Solución 6:

i) Dos puntos cualesquiera que verifican las condiciones dadas son:

$P=(a, a^2)$ y $Q=(a+2, (a+2)^2)$

El punto medio será

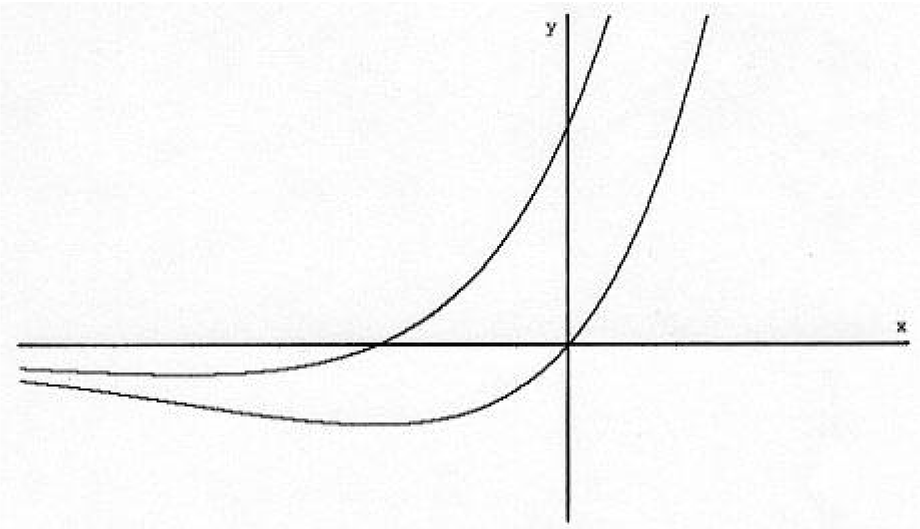
$$M = \left(\frac{a+a+2}{2}, \frac{a^2+(a+2)^2}{2}\right) = (a+1, a^2+2a+2) = (a+1, (a+1)^2+1).$$

Luego, son puntos de la forma $y = x^2 + 1$.

ii) Se trata de una parábola de eje vertical.

Opción A

1. **Se dan las gráficas de dos funciones:** $f(x) = xe^{x}$ **y la de sus derivada** $f\,'(x)$**:**



Se pide distinguir una de la otra, justificando razonadamente el porqué y hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad, convexidad, así como hallar los puntos donde hay máximos, mínimos e inflexiones de $y = f(x)$**.**
Hallar también el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$**, el eje OX y las rectas de ecuaciones respectivas x = -1, x = 1.**

2. **Dada la función** $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$**, se pide:**

b) **Estudiar razonadamente su continuidad.**
c) **Estudiar razonadamente sus asíntotas.**

3. **Discute el sistema y resuelve según los valores del parámetro** a**:**

$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

4. **Estudia la posición relativa de las rectas:**

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 5 \end{cases}$$

En el caso en que se corten, obtén el punto de corte.

Solución 1:

La función f es la de la derecha, pues es la única que pasa por el punto (0, 0), ya que $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

La derivada vale 0 en x = -1.

Si x < - 1, $f' < 0$ y f es decreciente.
Si x > - 1, $f' > 0$ y f es creciente. En x = -1 hay un mínimo: $f(-1) = -e^{-1} = -0{,}37$

$f''(x) = e^x + e^x + xe^x = (2+x)e^x$, que vale 0 en x = -2.

Si x < - 2, $f'' < 0$ y f es convexa ($\cap$).
Si x > - 2, $f'' > 0$ y f es cóncava. En x = -2 hay inflexión. $f(-2) = -2e^{-2} = -0{,}27$

Teniendo en cuenta que la función es negativa entre -1 y 0, el área pedida es:

$$A = -\int_{-1}^{0} xe^x\,dx + \int_{0}^{1} xe^x\,dx$$

La integral $\int xe^x\,dx$ la haremos por partes.

Tomando: u = x $\Rightarrow$ du = dx
e^x dx = dv $\Rightarrow$ v = e^x

Se tiene: $\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x$

Por tanto,

$$A = -\int_{-1}^{0} xe^x\,dx + \int_{0}^{1} xe^x\,dx = -(x-1)e^x\Big|_{-1}^{0} + (x-1)e^x\Big|_{0}^{1} = 1 - 2e^{-1}$$

Solución 2:

La función no está definida en x = -1; por tanto, en ese punto no es continua. Luego, la función es continua en **R** - {-1}.

En x = - 1 hay una asíntota vertical, hacia menos infinito, pues

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty$$

También tiene una asíntota oblicua, $y = mx + n$, siendo

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x+1)^2} = 1 \quad \text{y}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - (x+1)^2}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2 - x}{(x+1)^2} = -2$$

La asíntota es: $y = x - 2$.

Solución 3:

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema tendrá solución cuando r(A) = r(M).

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) = M$$

El determinante de A, $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -5a + 1$. Luego si $a \neq 1/5$, r(A) = 3 = r(M), y el sistema será compatible determinado.

Si $a = 1/5$, como el menor $M_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 6 - 5 \neq 0$, se tendrá que r(M) = 3 mientras que r (A) = 2. En este caso, el sistema será incompatible.

Cuando $a \neq 1/5$, aplicando la regla de Cramer, se tiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-9}{-5a+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2a+4}{-5a+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6a+3}{-5a+1}$$

Solución 4:

Estudiando la dependencia lineal de los vectores

$\mathbf{v_r}$ = (-3, 5 1), $\mathbf{v_s}$ = (-1, 2, 0) y **AB**=(-1, -3, 5), donde A = (2, 3, 0)$\in$ r y B =(1, 0, 5)$\in$ s, se determina la posición relativa de ambas recta: si son linealmente independientes, se cruzan; si son linealmente dependientes, están en el mismo plano.

Con esto, como $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ = -30 + 25 + 5 = 0, los vectores $\mathbf{v_r}$, $\mathbf{v_s}$ y **AB**, son linealmente dependientes. En consecuencia, las rectas r y s se cortan.

En el punto de corte se cumple que $z_r = z_s$, luego $\lambda_r = 5$; y, en consecuencia, el punto de corte es P = (-13, 28, 5).

Indicaciones al alumno

1. *El ejercicio consta de tres bloques de preguntas. Debe contestarse necesariamente a los tres bloques, escogiendo una pregunta, A o B, de cada uno.*
2. *Todas la preguntas puntúan igual.*

BLOQUE 1.

1.A. Dada la función f(x) = $e^x(x^3 - 4x^2 + 7x - 6)$, se pide estudiar:

a) **Dominio y asíntotas.**
b) **Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.**
c) **Concavidad y convexidad.**
d) **Dibujar la gráfica de x y sus asíntotas.**

1.B. a) Obtener una función f(x) que verifique:

i) **f´(x) = $(x - 1)e^x$**
ii) **f(x) tiene un extremo en el eje OX.**

a) **Determinar si ese extremo es máximo o mínimo.**

BLOQUE 2.

2.A. Fulano de Tal quiere hacer una gran fiesta, e invitar a sus amigos a unas tortillas, así que va a la tienda y compra una docena de huevos, una bolsa de patatas y una botella de aceite. Dado el éxito obtenido, decide repetir la fiesta, y vuelve a comprar una docena de huevos y dos botellas de aceite. Cuando llega a casa se acuerda de que no tiene patatas, vuelve a la tienda para comprar una bolsa de patatas y decide llevar también otra docena de huevos.
En la primera ocasión se gastó 600 pesetas; en la segunda ocasión se gastó 650 pesetas; y en la última 350 pesetas.
Calcular, si es posible, el precio de los huevos, las patatas y el aceite

2.B. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *a*. Resolverlo cuando sea posible.

$$\left.\begin{aligned} 3x - ay + 2z &= a-1 \\ 2x - 5y + 3z &= 1 \\ x + 3y - (a-1)z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

BLOQUE 3.

3.A. Estudiar las posiciones relativas de los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = -3$ **y**

$\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 - \mu \end{cases}$ **y la recta** $r \equiv \dfrac{x-3}{2} = y = \dfrac{z-3}{3}$

Hallar un punto P de r que esté a la misma distancia de π_1 y π_2.

3.B. Dado el plano $\pi \equiv x - y + z = 0$

a) **hallar el simétrico del punto P=(1, 0, 1) respecto de** π

b) **hallar la recta simétrica de** $r \equiv x - 1 = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{3}$ **respecto** π

Solución 1A:

a) Dom(f) = **R,** pues es producto de dos funciones continuas en todo **R**.
Asíntotas: y = 0, hacia -∞, pues $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(x^3 - 4x^2 + 7x - 6) = 0^-$ (Este límite puede hacerse por L´Hôpital).

b) $f'(x) = e^x(x^3 - 4x^2 + 7x - 6) + e^x(3x^2 - 8x + 7) = e^x(x^3 - x^2 - x + 1) = e^x(x - 1)^2(x + 1)$

$f'(x) = 0$ si $x = -1$ o $x = 1$.

Si $x < -1$, $f' < 0 \Rightarrow$ f decrece.

Si $-1 < x < 1$, $f' > 0 \Rightarrow$ f crece. Si $x > 1$, $f' > 0 \Rightarrow$ f crece

De lo anterior se deduce que f tiene un mínimo en x=1.

c) $f''(x) = e^x(x^3 - x^2 - x + 1) + e^x(3x^2 - 2x - 1) = e^x \cdot x(x - 1)(x + 3)$.

$f''(x) = 0$ en $x = -3$, $x = 0$ y $x = 1$.

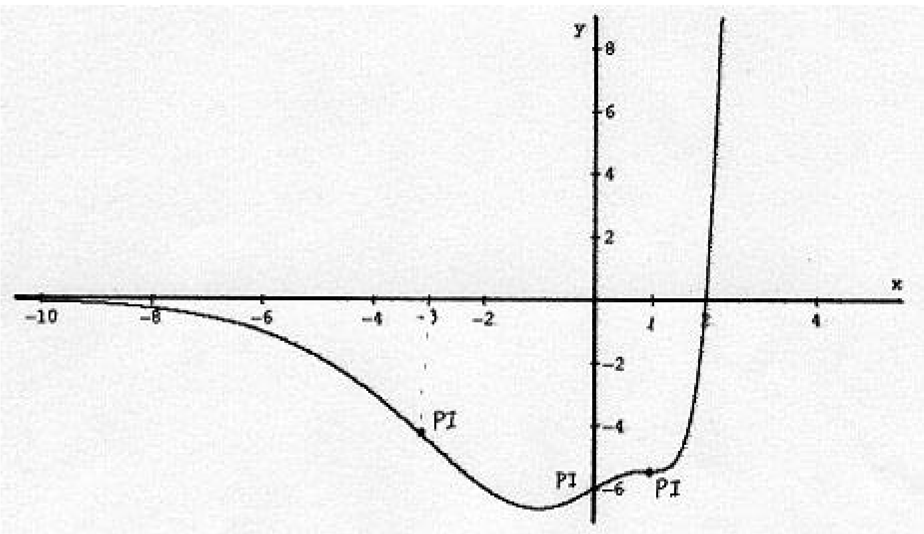
Si $x < -3$, $f'' < 0 \Rightarrow$ f convexa $\cap$

Si $-3 < x < 0$, $f'' > 0 \Rightarrow$ f cóncava $\cup$

Si $0 < x < 1$, $f'' < 0 \Rightarrow$ f convexa $\cap$

Si $x > 1$, $f'' > 0 \Rightarrow$ f cóncava $\cup$

d) La gráfica de f(x) se da en la figura adjunta.



Solución 1B:

a) $f(x) = \int (x-1)e^x dx = \int xe^x dx - e^x + c$

En $\int xe^x dx$ hacemos u = x y $e^x dx$ = dv, de donde dx = du y v = e^x. Luego

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x$$

Por tanto, $f(x) = xe^x - 2e^x + c$

Como f(x) tiene un extremo en el eje OX, en un punto de la forma (*a*, 0), se verificará que *f´*(*a*) = 0 y *f*(*a*) = 0.

Luego: $f'(a) = 0 \Rightarrow (a - 1)e^a = 0 \Rightarrow a = 1$

y si $a = 1$, $f(1) = 0 \Rightarrow$ e - 2e + c = 0 $\Rightarrow c = e$

Por tanto, $f(x) = xe^x - 2e^x + e$

b) Si x < 1, f´(x) < 0: f decrece

Si x > 1, f´(x) > 0: f crece.

En consecuencia, en x = 1 se da un mínimo.

Solución 2A:

Sea *x*, *y* y *z* el precio de los huevos, patatas y aceite, respectivamente.
Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ x + 2z = 650 \\ x + y = 350 \end{cases}$$

cuya solución es x = 150, y = 200, z = 250 pesetas.

Solución 2B:

Rango de la matriz de coeficientes, A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -a+1 \end{vmatrix} = -2a^2 + 14a - 20 = -2(a-2)(a-5)$$

Luego, si $a \neq 2 \text{ y } 5$, el r(A) = 3 y el sistema será compatible determinado.

Si *a* = 2, se tiene:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)=M$$, siendo r(A) = 2 y r(M) = 2, pues la 3ª fila es la diferencia de las dos primeras. El sistema será compatible indeterminado.

Si a = 5, tenemos:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right)=M$$. Como $M_1=\begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}=30$, r(M) = 3. Luego el sistema es incompatible.

.

Soluciones:

Si $a \neq 2 \text{ y } 5$, por Cramer, obtenemos: $x=\dfrac{5-2a}{a-5}$, y = $\dfrac{-a}{a-5}$, z = $\dfrac{-5}{a-5}$

· Si a=2, el sistema queda: $\left.\begin{array}{r} 3x-2y=1-2z \\ 2x-5y=1-3z \end{array}\right\}$, de donde: $\left\{\begin{array}{l} x=3/11-4t/11 \\ y=-1/11+5t/11 \\ z=t \end{array}\right.$

Solución 3A:

La ecuación implícita de π_2 es $\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi_2:$ x + y + z + 9 = 0

Los dos planos son paralelos, y como : $\mathbf{v_r}$ = (2, 1, 3) no es perpendicular al vector normal de π_1, la recta no es paralela al plano. En consecuencia, la recta corta a cada plano en un punto.

Un punto P genérico de r es P=(3 + 2t, t, 3 + 3t). Queremos que d(P,π_1) = d(P, π_2).

Luego:

d(P,π_1) = $\dfrac{3+2t+t+3+3t+3}{\sqrt{3}}=\dfrac{3+2t+t+3+3t+3}{-\sqrt{3}}$ = d(P, π_2). (Hemos cambiado a una expresión el signo para que la igualdad pueda tener solución).

Operando, queda t = -2.

El punto será, P=(-1, -2, -3).

- De otra forma. Podrían hallarse los puntos de corte (P_1 y P_2) de r con π_1 , y de r conπ_2 .El punto P pedido será el punto medio de P_1 y P_2 . Estos puntos son:
  P_1 =(0, -3/2, -3/2), P_2 =(-2, -5/2, -9/2) $\Rightarrow$ P=(-1, -2, -3).

Solución 3B:

a) Sea P' el simétrico de P=(1, 0 1) respecto de π.
Ambos puntos, P y P', estarán en la recta s, perpendicular a π por P.

Como v_π = (1, -1, 1), se tiene que s: $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$

Además, d(P, π)=d(P', π), y como d(A,π) = $\left|\dfrac{1+1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}\right| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, se tendrá que

$$d(P',\pi) = \frac{1+\lambda+\lambda+1+\lambda}{\pm\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \pm(2-\lambda) = 2 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ y } \lambda = -4/3 .$$

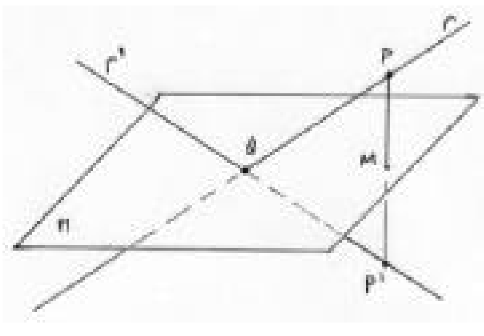
Para $\lambda = 0$ sale P'=(1, 0, 1), que es el mismo P dado; por tanto, no es válida.

Para λ=-4/3, se obtiene $P' = (\frac{-1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-1}{3})$, que es la solución buscada.

(También se podría halar M=(1/3, 2/3, 1/3), y obtener P´ mediante **OP´** = **OP** + 2**PM**)

b) La recta simétrica será la determinada por dos puntos simétricos, P´ y Q´, de P y Q de r. Ver la figura adjunta.

Como P=(1, 0, 1) es de r, vale el P´ obtenido en el apartado anterior.



El punto Q más conveniente es el de corte de r con el plano. Lo hallamos:

En paramétricas, r: $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1+3\lambda \end{cases}$

Se sustituye en π y queda,

$$1+\lambda-3\lambda+1+3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -2.$$

Luego Q=(-1, -6. -5) y **PQ**= $(\frac{2}{3}, \frac{22}{3}, \frac{14}{3})$

De donde la recta pedida es.

$$r': \begin{cases} x = -1 + \frac{2}{3}t \\ y = -6 + \frac{22}{3}t \\ z = -5 + \frac{14}{3}t \end{cases}$$

El alumno deberá desarrollar por escrito dos cuestiones de las cuatro propuestas.

1ª CUESTIÓN

A **Resolver la ecuación matricial $A^2 \cdot X - B = A^2$ y determinar la matriz X, siendo,**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

B **Dibujar el recinto limitado por las gráficas de $y^2 = 2x$, $2x - y - 2 = 0$. Calcular su área.**

2ª CUESTIÓN.

A **Estudiar la posición relativa de las rectas.**

$$r: \begin{cases} x = -7 + 4t \\ y = 1 - t \\ z = -2 \end{cases} ; \qquad s: \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z}{-2}$$

Hallar la ecuación de un plano que contenga a ambas rectas.

B **Determinar las asíntotas de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ y estudiar el crecimiento de la función.**

3ª CUESTIÓN.

A **Calcular a y b para que f(x) sea continua en x = 0 y x = 1**

$$f(x) = \begin{cases} e^x + a, & x \le 0 \\ ax^2 + 2, & 0 < x \le 1 \\ \dfrac{b}{2x}, & x > 1 \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos anteriormente, estudiar la derivabilidad de f(x) en x=0. Obtener el punto de corte de la recta y el plano.

B **Halla el ángulo que forman la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{1}$ y el plano $x + 2y - z - 3 = 0$.**

4ª CUESTIÓN.

A **Calcular** $I = \int (2x+4)\cdot e^{-5x}\, dx$

B **Estudiar el rango de A, según los valores del parámetro** $a \in R$

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & -a & a \\ 1 & a+1 & 0 & 2a \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Razonar si para algún valor de a **existe** A^{-1} **(2,5 puntos)**

Solución 1A:

$A^2\cdot X - B = A^2 \Rightarrow X = I + (A^{-1})^2 B$

Se tiene:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución 2A:

Sea A=(-7, 1, 2) un punto de r, y B=(3, -4, 0) otro punto de s. Luego,

AB=(10, -5, -2).

Los vectores de dirección de r y s son, respectivamente, $\mathbf{v_r}$=(4, -1, 0) y $\mathbf{v_s}$=(2, -3, -2).

Como $\begin{vmatrix} 10 & -5 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0$, los vectores **AB**, $\mathbf{v_r}$ y $\mathbf{v_s}$ son linealmente dependientes. En consecuencia, las rectas r y s están en el mismo plano, y se cortan.

El plano que contiene a las dos rectas viene dado por un punto, por ejemplo A, y los vectores $\mathbf{v_r}$ y $\mathbf{v_s}$; su ecuación será:

$$\pi : \begin{cases} x = -7 + 4t + 2\lambda \\ y = 1 - t - 3\lambda \\ z = -2 \qquad - 2\lambda \end{cases}$$

Solución 3A:

La función está definida en x = 0 y en x = 1, siendo f(0) = 1 + *a* y f(1) = *a* + 2. Para que sea continua, además, debe tener límite en esos puntos y coincidir con su valor de definición.

<u>En x = 0</u>:
Si x $\to 0^-$, f(x) $\to$ 1 + *a*. Si x $\to 0^+$, f(x) $\to$ 2.
Luego, 1 + *a* = 2; de donde *a* = 1.

<u>En x=1</u>:
Si x $\to 1^-$, f(x) $\to$ 3. Si x $\to 1^+$, f(x) $\to$ b/2.
Luego, 3 = b/2; de donde b = 6.

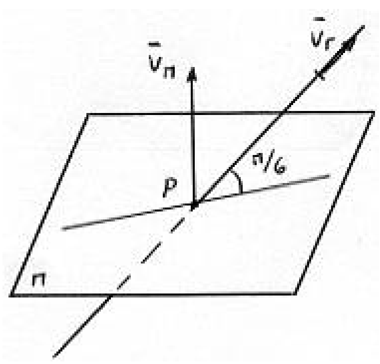
Por tanto, $f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x \le 0 \\ x^2 + 2, & 0 < x \le 1 \\ \dfrac{3}{x}, & x > 1 \end{cases}$

Su derivada es $f'(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ 2x, & 0 < x \le 1 \\ \dfrac{-3}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$

Como f´(0^-) = 1 y f´(0^+) = 0, la función no es derivable en x = 0.

Solución 3B:

Tenemos: $\vec{v}_r$ =(2, 1, 1) y $\vec{v}_\pi$ =(1, 2, -1). Ver figura.



Luego, $\cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \dfrac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|} = \dfrac{1}{2}$.

Por tanto, el ángulo $(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \dfrac{\pi}{3}$, y el ángulo (r, π) será $\dfrac{\pi}{6}$.

Corte recta-plano:

Las ecuaciones paramétricas de r son: $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

Sustituyendo en la ecuación del plano, queda: 1 + 2t + 4 + 2t + 1 - t - 3 = 0 $\Rightarrow$ t =-1.

Luego P=(-1, 1, -2).

Solución 4A:

$$I = \int (2x+4)\cdot e^{-5x}\ dx = \int 2x \cdot e^{-5x}\ dx + \int 4e^{-5x}\ dx$$

La primera integral se hace por partes (la segunda es inmediata).

u = 2x; dv = e^{-5x}dx

de donde

du = 2dx; $v = -\dfrac{1}{5} e^{-5x}$

Luego

$$\int 2x \cdot e^{-5x}\ dx = -\frac{2}{5} x e^{-5x} + \frac{2}{5}\int e^{-5x}\ dx = -\frac{2}{5} x e^{-5x} - \frac{2}{25} e^{-5x}$$

Por tanto,

$$I = -\frac{2}{5} x e^{-5x} - \frac{2}{25} e^{-5x} - \frac{4}{5} e^{-5x} + c = \left(-\frac{2}{5} x - \frac{22}{25}\right) e^{-5x} + c$$

Solución 4B:

Consideramos el menor

$$A_1 = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a(a+1)^2$$

$A_1 = 0$ si $a = 0$ o $a = -1$.

Para a = 0, tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo rango es 2, pues la columna 2 (*C2*) es suma de *C1* y *C3*, y la *C4* es nula.
Para a = -1, tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{y como el menor } A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ el rango será 3.}$$

En definitiva tenemos:

· Si a = 0, r(A) = 2. Si $a \neq 0$, r(A) = 3.

· No existe A^{-1}, pues la inversa sólo puede existir para matrices cuadradas.

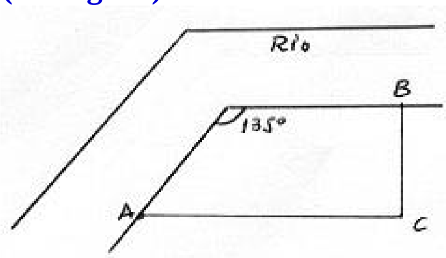
Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas, PR-1 y PR-2, y de cuatro cuestiones, C-1, C-2, C-3 y C-4. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma.

PRUEBA A

PROBLEMAS

PR-1. Dado el sistema $\begin{cases} ax+y-z=z \\ -x+ay+z=x \\ -3x+3y+z=y \end{cases}$ **, se pide: estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro *a*, y resolverlo cuando sea compatible. (3 puntos).**

PR-2. Se desea construir un jardín limitado, en dos de sus lados, por un río que forma un codo de 135º y en los otros dos por una valla ABC de 1,2 km de longitud (ver figura). Hallar las dimensiones del jardín de área máxima. (3 puntos).



CUESTIONES

C.1. Resolver la ecuación matricial AX = B, siendo,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ **(1 punto)**

C.2. Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el punto (1, 1, 1) y los puntos en los que el plano 2x + y + z = 2 corta a los ejes de coordenadas.

(1 punto).

C.3. Calcular, simplificando todo lo posible el resultado, la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ **(0,5 puntos)** **b)** $g(x)=\int_1^x e^{-t^2}(1+t^2)\,dt$ **(0,5 puntos)**

C.4. Determinar m, si es posible, para que el plano de ecuación

2mx - 3(m - 1)y - (m + 3)z + 2m + 4 = 0

sea ortogonal a la recta de ecuación $x = \frac{y}{2} = -z$ **(1 punto).**

PRUEBA A

Solución 1:

El sistema es equivalente a $\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ -2x + ay + z = 0 \\ -3x + 2y + z = 0 \end{cases}$, que es homogéneo. Por tanto será compatible: para $|A| \neq 0$, compatible determinado; para $|A| = 0$, compatible indeterminado.

Como

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ -2 & a & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2\text{-}8a\text{+}7 \quad \Rightarrow \quad a^2 \text{ - } 8a\text{+ } 7 = 0 \text{ si } a = 1 \text{ o } a = 7$$

· Para $a \neq 1$ y $a \neq 7$ el sistema es compatible determinado, con solución:

x = 0, y = 0, z = 0.

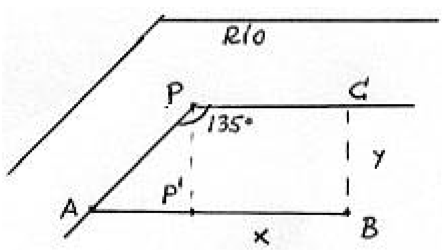
· Para a=1, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 2 (C3 = -C1 - C2).

El sistema será equivalente a $\begin{cases} x + y = 2z \\ -2x + y = -z \end{cases}$, cuya solución es $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

· Para a=7, $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -2 & 7 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ también tiene rango 2.

El sistema será equivalente a $\begin{cases} 7x + y = 2z \\ -2x + 7y = -z \end{cases}$, cuya solución es $\begin{cases} x = \frac{5}{17}t \\ y = \frac{-1}{17}t \\ z = t \end{cases}$

Solución 2:



Se desea que el área del trapecio ABCP sea máxima. Esta superficie es

$$S = \frac{(PC + AB)CB}{2}$$

Sean AB = x, BC = y. Para calcular PC observamos que el ángulo A = 45º; por tanto AP´ = PP´ = CB = y, de donde PC = x - y.

En consecuencia, $S = \frac{(x - y + x)y}{2} = \frac{2xy - y^2}{2}$

Como x + y = 1200 (metros), se tiene que x = 1200 - y.
Luego

$$S = \frac{2400y - 3y^2}{2} = 1200y - \frac{3y^2}{2}$$

Derivando.

S´ = 1200 - 3y = 0 $\Rightarrow$ y = 400

Como S´´ = -3 < 0, para ese valor de *y* se da el máximo.

Por tanto, las medidas deben ser AB = 800 y CB = 400.

CUESTIONES

Solución C1:

AX = B $\Rightarrow$ X = A^{-1}B

De $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, se tiene $|A| = -1$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Luego

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución C2:

El plano 2x + y + z = 2 corta a los ejes en los puntos A=(1, 0, 0), B=(0, 2, 0) y C=(0, 0, 2).

Si P=(1, 1, 1), se tiene:

AP=(0, 1, 1), **BP**=(1, -1, 1), **CP**=(1, 1, -1)

El volumen pedido es

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{matrix}\right\|=\frac{4}{6}$$

Solución C3:

a) f(x) = ln (1 + x) - ln (1 - x) $\Rightarrow$ $f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{2}{1-x^2}$

a) Sea G(t) una primitiva de $\int e^{-t^2}(1+t^2)dt$. Por tanto, $G'(t)=e^{-t^2}(1+t^2)$

Por el teorema fundamental del cálculo integral:

$$g(x)=\int_1^x e^{-t^2}(1+t^2)dt=G(t)\Big|_1^x = \text{G(x) - G(1)} \Rightarrow \text{G´(x) = G´(x) = } e^{-x^2}(1+x^2)$$

Solución C4:

Tenemos π : 2mx - 3(m - 1)y - (m + 3)z + 2m + 4 = 0 y r: $\begin{cases} x=t\\ y=2t\\ z=-t\end{cases}$

Para que sean ortogonales π y r, los vectores

$\vec{v}_\pi$ =(2m, -3(m-1), -(m+3)) y $\vec{v}_r$ =(1, 2, -1)
deben ser paralelos. Luego,

$$\frac{2m}{1}=\frac{-3(m-1)}{2}=\frac{-(m+3)}{-1}$$

Sistema que no tiene solución, pues:

de 1ª y 3ª fracciones se tiene, 2m = m + 3 $\Rightarrow$ m = 3
de 1ª y 2ª fracciones se tiene, 4m = -3m + 3 $\Rightarrow$ m = 3/7

Por tanto, no es posible encontrar el valor de m pedido.

OPCIÓN A

1. **Los puntos P=(-1, 3, 4) y Q=(5, 3, -2) son simétricos respecto a un plano. calcula la ecuación de ese plano. (Que P y Q son simétricos respecto a un plano, quiere decir que la recta que determinan corta perpendicularmente el plano en el punto R, que es el punto medio de P y Q).**
   (2 puntos).

2. **Considera la función $f(x) = x^3 + px$, donde p es un cierto número real. Escribe (en función de p) la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa x = 1. Determina después p, de manera que la recta tangente anterior pase por el punto (2, 0). (2 puntos).**

3. **Considera la recta r de ecuaciones $x-1=y=\frac{z-2}{2}$.**

c) **De entre los planos que contienen la recta r, escribe la ecuación cartesiana del que es paralelo a la recta s de ecuaciones $x = y - 1 = z + 2$. (1,5 puntos).**

d) **Halla la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano obtenido en el apartado anterior (esto es, la recta intersección del plano p obtenido en el apartado anterior con el plano que pasa por r y es perpendicular a p).**
(1,5 puntos).

4. **a) Halla la asíntota oblicua de la función $y=\frac{x^3-x^2+1}{2x^2-x+3}$. (1,5 puntos).**

   b) Considera una función de la forma $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde P(x) y Q(x) son polinomios de grado > 0. Teniendo presentes los cálculos que has hecho para responder al apartado anterior, explica de manera razonada que la función nombrada puede tener una asíntota oblicua cuando el grado de P excede el de Q en una unidad. (1,5 puntos).

Solución 1:

El plano buscado está determinado por el vector **PQ**, que será normal a él, y por el punto R.

PQ = (5, 3, -2) - (-1 3, 4) = (6, 0, -6)

R = $\left(\frac{-1+5}{2},\frac{3+3}{2},\frac{-2+4}{2}\right)$ = (2, 3, 1).

Por tanto, sus ecuación es:

$$6(x - 2) + 0(y - 3) + (-6)(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x - z - 2 = 0$$

Solución 2:

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Como $f'(x) = 3x^2 + p$, se tiene:

$$y - (1 + p) = (3 + p)(x - 1) \Rightarrow y = (3 + p)x - 2.$$

Para que pase por el punto (2, 0):

$$0 = (3 + p)\cdot 2 - 2 \Rightarrow p = -2.$$

Solución 3:

a) La recta r puede darse así: $r \equiv \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$

El haz de planos que contiene a r es:

$$x - y - 1 + m(2y - z + 2) = 0 \Rightarrow x + (2m - 1)y - mz = 0$$

Para que uno de esos planos sea paralelo a la recta s, los vectores $\vec{v}_\pi = (1, 2m - 1, -m)$ y $\vec{v}_s = (1, 1, 1)$ deben ser ortogonales. Luego,

$$\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow (1, 2m - 1, -m)\cdot(1, 1, 1) = 0 \Rightarrow m = 0.$$

El plano pedido será: x - y -1 = 0

Cuyas ecuaciones cartesianas son: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

b) El plano encontrado contiene a la recta r, luego su proyección sobre él es ella misma.

Solución 4:

La ecuación de la asíntota oblicua e, $y = mx + n$, siendo

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{x(2x^2 - x + 3)} = \frac{1}{2} \quad \text{y}$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - x^2 + 1}{2x^2 - x + 3} - \frac{1}{2}x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^2 + 1 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x}{2x^2 - x + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1}{2x^2 - x + 3} = -\frac{1}{4}$$

Por tanto, la asíntota es: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

b) Las funciones racionales, de la forma $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, sólo pueden tener una asíntota oblicua cuando el grado de P excede en 1 al de Q, pues sólo entonces el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{xQ(x)}$ es distinto de 0.

Cada una de las dos cuestiones del repertorio elegido puntuará 2 puntos como máximo y cada problema puntuará 3 puntos como máximo.

REPERTORIO A

CUESTIONES

1. **Definir el concepto de derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica.**

2. **Proponer un ejemplo de un vector que sea ortogonal al vector $\vec{e}$ de coordenadas (1, -2, 1) y tenga módulo doble que $\vec{e}$.**

PROBLEMAS

3. **Representar gráficamente la figura plana limitada por la parábola de ecuación**

$$x = (y-1)^2 - 1$$

y la recta x = 0. Calcular su área.

4. **Determinar los valores de *t* para los que es incompatible el sistema**

$$\begin{aligned} t &= tx - z \\ 1 &= 2x + ty + z \\ 3 &= x + 3z \end{aligned}$$

Solución 1:

Teoría. Ver libro de texto.

Solución 2:

El módulo de $\vec{e}$ vale $|\vec{e}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.

Sea $\vec{v}$ =(x, y, z) el vector buscado. Debe cumplir:

$$\vec{e} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow x - 2y + z = 0$$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2\sqrt{6} \;\Rightarrow\; x^2+y^2+z^2 = 24$$

Como se nos pide un ejemplo, podemos tomar y = 0; entonces, queda:

$x + z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -z$

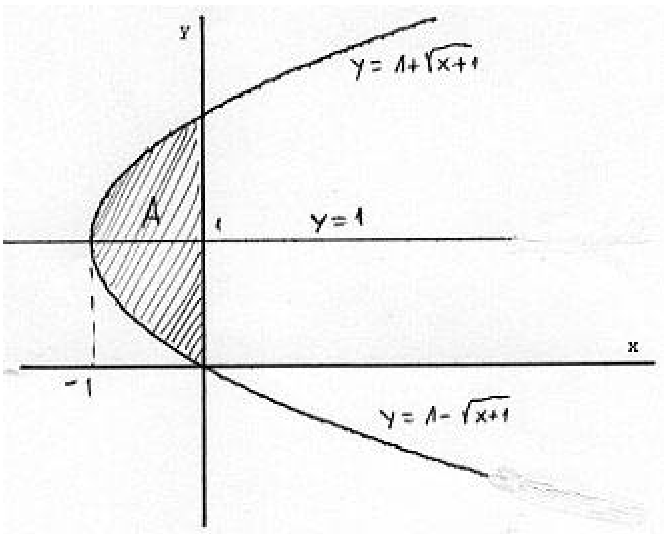
$x^2 + z^2 = 24 \quad \Rightarrow \quad (-z)^2 + z^2 = 24 \;\Rightarrow\; z = \sqrt{12}$

Por tanto, el vector $\vec{v} = (-\sqrt{12}, 0, \sqrt{12})$.

Solución 3:

La curva dada es una parábola con vértice en el punto V = (-1, 1).

Su representación gráfica es:



El área pedida es:

$$A = -\int_0^1 ((y-1)^2 - 1)dy = -\left[\frac{(y-1)^3}{3} - y\right]_0^1 = -\left(-1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

- Otra posibilidad:

Despejando y en la función dada, se tiene:

$$y = 1 \pm \sqrt{x+1}$$

Esto es: $y = 1+\sqrt{x+1}$ e $y = 1-\sqrt{x+1}$, que corresponden a los trozos de parábola por encima y por debajo de la recta y = 1, respectivamente.

Con esto,

$$A = \int_{-1}^0 ((1+\sqrt{x+1} - (1-\sqrt{x+1}))dx = \int_{-1}^0 2\sqrt{x+1}\,dx = \left[2\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}\right]_{-1}^0 = \frac{4}{3}$$

Solución 4:

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema tendrá solución cuando r(A) = r(M), en caso contrario, será incompatible.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} t & 0 & -1 & t \\ 2 & t & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) = M$$

El determinante de A, $|A| = \begin{vmatrix} t & 0 & -1 \\ 2 & t & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3t^2 + t = t(3t+1)$

Con esto, si $t \neq 0$ y $t \neq \frac{-1}{3}$1, r(A) = 3 = r(M), y el sistema será compatible determinado.

Si $t = 0$, se tiene:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$. Tomando $M_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ = 5; luego, r(M) = 3, y el sistema será incompatible.

Si $t = \frac{-1}{3}$,

$$M = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & -1 & -1/3 \\ 2 & -1/3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$, y tomando $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1/3 \\ -1/3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ = -2/3, se

tiene que r(M) = 3. Luego, el sistema será también incompatible.

Así pues, los valores buscados son: $t = 0$ y $t = \frac{-1}{3}$.

El alumno deberá responder a cuatro preguntas. Una pregunta de cada uno de los cuatro bloques temáticos: Álgebra, Geometría, Análisis Matemático y Estadística. La puntuación máxima de cada pregunta es de 2,5 puntos.

Álgebra (Responder una de las dos preguntas)

1. **A. Sea z = a + bi un número complejo. Demostrar que se verifica la desigualdad,** $z\,\bar{z} \geq 0$ **(**$\bar{z}$ **es el conjugado de z), ¿para qué valor de z se da la igualdad?**

   B. Siendo z un número complejo, resolver la ecuación $\dfrac{z}{3+2i} + \dfrac{2z-i}{4-2i} = 3$

2. **A. En un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas se conocen tres soluciones. ¿Existen más soluciones? ¿Qué valor puede tomar el rango de la matriz asociada al sistema y el rango de la matriz ampliada?**

   B. Discutir la existencia de soluciones del siguiente sistema según los valores del parámetro α **. Y, si es posible, resolverlo para** α **=0.**

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y + z = 3 \\ \alpha x + (\alpha + 3)y + 3z = 1 \end{array} \right\}$$

Geometría. (Responder una de las dos preguntas)

1. **Calcula los puntos de la recta r que pasa por los puntos P=(-1, 2, 3) y Q=(3, 5, 0), y tales que su distancia al punto C=(-1, 0, 1) es de 12 unidades.**

2. **Estudiar la posición relativa de las rectas**

$$r \equiv \left\{ x - 3 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2} \right\} \text{ y } s \equiv \big((x, y, z) = (-3,1,0) + \lambda(-1,2,1)\big).$$

Calcular el punto de r más próximo a la recta s

Análisis Matemático. (Responder una de las dos preguntas)

1. **A. ¿Puede ocurrir que exista el** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ **y que la función** f **no sea continua en** x_0**?**

   B. Calcular el límite $\lim\limits_{x \to 0} (e^x - x)^{1/x}$

2. **A. Sea f una función continua positiva tal que** $1 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 2$ **. ¿Puede asegurarse que** $f(x) \geq 1$**, para todo** $x \in [0,1]$ **?. Razona la respuesta.**

B. Calcular la integral $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x \cos x dx$

<u>Estadística.</u> (Responder una de las dos preguntas)

1. **El 70% de los clientes de una compañía de seguros de automóviles tiene más de 25 años. Un 5% de los clientes de ese grupo tiene un accidente a lo largo del año. En el caso de los clientes menores de 25 años, este porcentaje es del 20%. Si escogemos un asegurado al azar, calcular la probabilidad de que tenga un accidente ese año?**

Si una persona tuvo un accidente, calcular la probabilidad de que sea menor de 25 años

2. **Calcular la probabilidad de que ninguna de las tres lámparas de un semáforo tenga que cambiarse durante las 1.500 primeras horas de funcionamiento, si la duración (en miles de horas) de esas lámparas es una variable aleatoria con función de densidad**

$$f(x) = \begin{cases} k(1-(x-2)^2, & \text{si } 1 \leq \text{x} \leq 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Álgebra:

Solución 1A:

A. $z\,\bar{z} = $ (a + bi)(a - bi) = $a^2 + b^2$, que siempre es mayor o igual que cero.

Se daría la igualdad cuando a = b = 0.

B. $\dfrac{z}{3+2i} + \dfrac{2z-i}{4-2i} = 3 \Rightarrow$ z(4 - 2i) + (2z - i)(3 + 2i) = 3(3 + 2i)(4 - 2i) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ z(10 + 2i) = 46 + 9i $\Rightarrow$ $z = \dfrac{239-i}{52}$

Solución 1B:

A. Denotamos r(A) el rango de la matriz de coeficientes; análogo, r(M), para la matriz ampliada.

Si r(A) = r(M) = 3, sólo existe una solución.
Si r(A) = r(M) < 3, existirán infinitas soluciones.
Como el enunciado del problema indica que se conocen tres soluciones, no sólo una, entonces habrá más, infinitas más.

B. La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & \alpha+3 & 3 \end{pmatrix}$

Los menores $A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & \alpha+3 \end{vmatrix} = 3-\alpha$ y $A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 3 \end{vmatrix} = 3-\alpha$ valen 0 cuando $\alpha = 3$; luego, r(A) = 2 si $\alpha \neq 3$ y r(A) = 1 si $\alpha = 3$.

En consecuencia:

- · Si $\alpha = 3$, r(A) = 1. Pero como r(M) = 2, el sistema será incompatible.
- · Si $\alpha \neq 3$, r(A) = r(M) = 2. El sistema será compatible indeterminado.

Para $\alpha = 0$, el sistema es $\begin{cases} x+2y=3-z \\ 3y=1-3z \end{cases}$, cuya solución es $\begin{cases} x = \dfrac{7}{3}+t \\ y = \dfrac{1}{3}-t \\ z = t \end{cases}$

Geometría:

Solución 1:

La ecuación de la recta PQ es $\begin{cases} x=-1+4t \\ y=2+3t \\ z=3-3t \end{cases}$, siendo un punto genérico X$\in$ r,

X = (-1 + 4t, 2 + 3t, 3 - 3t). Debe cumplirse que d(X, C) = 12.

Luego,

$$d(X,C)=\sqrt{(4t)^2+(2+3t)^2+(2-3t)^2}=12 \Rightarrow t=\pm 2 .$$

Si t = 2, X = (7, 8, -3).

Si t = -2, X = (-9, -4, 9).

Solución 2:

Las ecuaciones paramétricas de r y s son:

$$r:\begin{cases} x=3+t \\ y=2t \\ z=-1-2t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=-3-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Sea A=(3, 0, -1) un punto de r, y B=(-3, 1, 0) un punto de s. Luego, **AB**=(-6, 1, 1).

Los vectores de dirección de r y s son, respectivamente, $\mathbf{v_r}$=(1, 2, -2) y $\mathbf{v_s}$=(-1, 2, 1).

Como $\begin{vmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$=-35$\neq$0, los vectores **AB**, $\mathbf{v_r}$ y $\mathbf{v_s}$ son linealmente independientes.
Luego las rectas se cruzan.

Para determinar el punto más próximo hay que hallar la perpendicular común a ambas rectas y determinar el punto de r en esa perpendicular.

Los puntos P y Q genéricos de r y s con:

P=(3 + t, 2t, -1 - 2t); Q=(-3-λ, 1 + 2λ, λ) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ **PQ**=(-6-λ - t, 1 + 2λ - 2t, λ + 2t + 1)

Como **PQ** debe ser perpendicular a $\mathbf{v_r}$ y $\mathbf{v_s}$., se cumplirá:

λ - 9t - 6 = 0;   6λ - t + 9 = 0 $\Rightarrow$ $t = \frac{-45}{53}$ y $\lambda = \frac{-87}{53}$

Para ese valor de t, se obtiene P=$(\frac{102}{53}, \frac{-90}{53}, \frac{37}{53})$, que es el punto de r más próximo a s.

Análisis Matemático:

Solución 1:

A. Si. Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ no es continua en x=1, y, sin embargo,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

B. $\lim_{x\to 0}(e^x - x)^{1/x} = [1^\infty]$

Hacemos L($\lim_{x\to 0}(e^x - x)^{1/x}$) = $\lim_{x\to 0} L(e^x - x)^{1/x}$ = $\lim_{x\to 0} \frac{L(e^x - x)}{x} = [\frac{0}{0}]$.

Aplicando L´Hôpital, queda: $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x - 1}{e^x - x}}{1}$ = 0.
El límite pedido valdrá e^0=1.

Solución 2:

A. No. Basta con considerar $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x$, que no es mayor que 1 en todo el intervalo [0, 1], mientras que $\int_0^1(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x)dx=1{,}25$

B. En $\int x\cos x dx$ tomamos u=x y dv=cos x dx $\Rightarrow$ du=dx y v=sen x.

Luego, $\int x\cos x dx = x\,\mathrm{sen}\, x - \int \mathrm{sen}\, x dx = x\,\mathrm{sen}\, x + \cos x$

De donde $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x\cos x dx = (x\,\mathrm{sen}\, x + \cos x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})$

Estadística:

Solución 1:

Denotemos por:
P(de ser mayor de 25) = P(>25); análogo P(<25); P(accidente) = P(Ac).

Con esto, tenemos:

P(>25) = 0,7; P(Ac/>25) = 0,05
P(<25) = 0,3; P(Ac/<25) = 0,2

Luego,
P(Ac) = 0,7·0,05 + 0,3·0,2 = 0,095

y

$$P(<25/Ac) = \frac{0{,}3\cdot 0{,}2}{0{,}095} = \frac{60}{95}$$

Solución 2:

Debe cumplirse que $\int_1^3 f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_1^3 k(-x^2+4x-3)dx = 1 \Rightarrow$

$$k(-3x+2x-\frac{x^3}{3})\Big|_1^3 = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

La probabilidad de que una lámpara dure menos de 1.500 horas es,

$$P(X<1{,}5) = \int_1^{1{,}5}\frac{3}{4}(-x^2+4x-3)dx$$

cuyo valor es P(X<1,5) = 0,15625. Y la P(X>1,5) = 1- 0,15625 = 0,84375.

La probabilidad de que ninguna de las tres tenga que cambiarse durante las 1.500 primeras horas, será:

$$0{,}84375^3=0{,}60068.$$

El alumno deberá responder al Bloque obligatorio y elegir uno entre los bloque optativos A y B. es necesario justificar las respuestas. Tiempo máximo 1,30 horas (sic)

Bloque obligatorio: (4 puntos)

1. **(1 punto) Sea A una matriz cuadrada de orden n tal que $A^2 = A$, I la matriz unidad de orden n y B = 2A - I. Calcula B^2**
2. **(1 punto). Calcula** $\lim\limits_{x \to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$
3. **(1 punto). Un segmento de longitud 5 apoya sus extremos en los semiejes positivos OX y OY de manera que forma con estos un triángulo rectángulo. Halla las dimensiones del triángulo de área máxima así construido.**
4. **(1 punto). Calcula la distancia del punto P=(1, -1, 3) a la recta** $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$

Bloque optativo A: (6 puntos)

1. **(2 puntos) Obtener en forma continua la recta proyección de la recta** $r \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases}$ **sobre el plano** $\pi \equiv x - y + z = 0$.
2. **Sea la función**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, & \text{si x} \le 0 \\ -x^2 + ax + b, & \text{si x} > 0 \end{cases}$$

b) Halla los valores de *a* y *b* para que la función sea derivable en todo R. (2 puntos)

b) Tomando *a* = 4 y *b* = 3, halla los puntos de la curva en los que la recta tangente es paralela a la cuerda que une los puntos A=(-3, f(-3)) y B=(2, f(2)). (2 puntos)

Bloque optativo B: (6 puntos)

1. **(3 puntos). Discute, según los valores de m, la posición relativa de los siguientes planos, indicando las figuras que determinan (no es necesario resolverlo).**

$$\pi_1 \equiv x - y - mz = 1$$
$$\pi_2 \equiv -3x + 2y + 4z = m$$
$$\pi_3 \equiv -x + my + z = 0$$

2. **(3 puntos) Calcula el área del menor recinto limitado por las curvas $y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 8$.**

Bloque obligatorio:

Solución 1:

$B^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2AI - 2IA + I^2 = 4A - 4A + I = I$.

Solución 2:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

Solución 3:

Sea x la base e y la altura del triángulo.

Se cumple que $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y=\sqrt{25-x^2}$.

Se quiere que $S=\frac{x\cdot y}{2}$ sea máxima. Se tendrá que verificar que S´ = 0. Luego,

$$S=\frac{x\cdot y}{2}=\frac{x\sqrt{25-x^2}}{2}=\frac{\sqrt{25x^2-x^4}}{2}\Rightarrow S´=\frac{50x-4x^3}{4\sqrt{25x^2-x^4}}=0\Rightarrow$$

$$50x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 2x(25 - 2x^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x=\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

El máximo se da en $x=\frac{5}{\sqrt{2}}$; de donde $y=\frac{5}{\sqrt{2}}$

Solución 4:

Como sabemos,

$$d(P,r)=\frac{|APxv_r|}{|v_r|},$$

siendo $\boldsymbol{v_r}$ =(2, 3, 1), el vector de dirección de r, y A=(0, -1, 0).

Luego,

$$d(P,r)=\frac{|APxv_r|}{|v_r|}=\frac{|(1,0,3)x(2,3,1)|}{|(2,3,1)|}=\frac{\sqrt{(-9)^2+5^2+3^2}}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{\sqrt{115}}{\sqrt{14}}$$

Bloque optativo A:

Solución 1:

La proyección de r sobreπ es la intersección de π con el plano$\pi´$ perpendicular a π que contiene a r.

Como $r\equiv\begin{cases} x=t \\ y=-4 \\ z=t\end{cases}$, el plano $\pi´$ vendrá determinado por $\mathbf{v}_r$=(1, 0, 1), v_π =(1, -1, 1) y el punto A(0, -4, 0).

Luego, $\pi´\equiv\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y+4 & 0 & -1 \\ z & 1 & 1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x-z=0$

La proyección r´, será: $r\equiv\begin{cases} {}´x-z=0 \\ x-y+z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{y}{2}=z$

Solución 2:

a) Para ser derivable, primero debe ser continua.
El único punto que hay que estudiar es x = 0.

Continuidad:

si x $\to$ 0^-, f(x) $\to$ 3
si x $\to$ 0^+, f(x) $\to$ b

Luego b = 3.

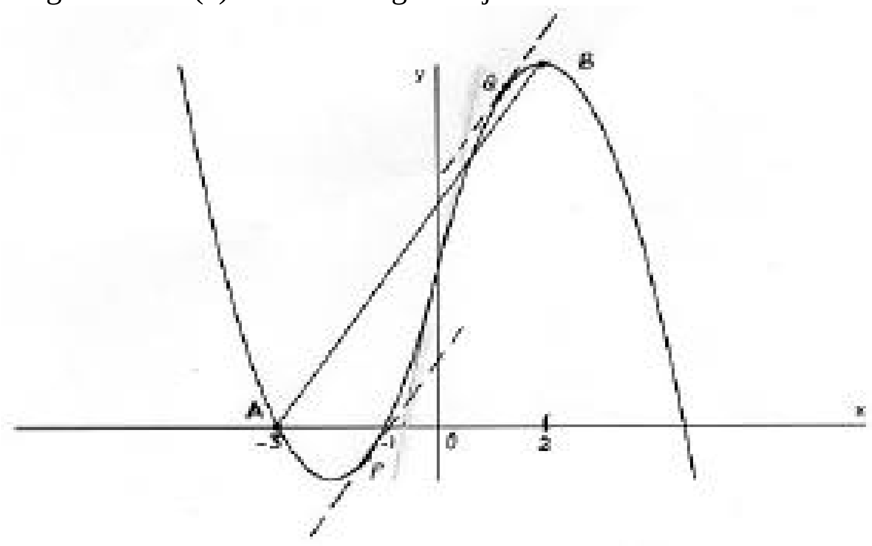
Derivable:

$$f´(x)=\begin{cases} 2x+4, & \text{si } x\le 0 \\ -2x+a, & \text{si } x>0\end{cases} \quad f´(0^-)=4,\ f´(0^+)=a \Rightarrow a=4$$

Con esto,

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3, & \text{si } x\le 0 \\ -x^2+4x+3, & \text{si } x>0\end{cases} \text{ y } f´(x)=\begin{cases} 2x+4, & \text{si } x\le 0 \\ -2x+4, & \text{si } x>0\end{cases}$$

b) La gráfica de f(x) es la de la figura adjunta.



La pendiente de la cuerda viene dada por

$$\frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)}=\frac{7}{5}$$

Hay dos puntos donde la pendiente de la tangente es paralela a la cuerda, uno a la izquierda.de 0, otro a la derecha.

De $f'(x)=\begin{cases} 2x+4, & \text{si x} \le 0 \\ -2x+4, & \text{si x} > 0 \end{cases}$, se deduce:

· si x < 0, 2x + 4 = 7/5 $\Rightarrow x=\frac{-13}{10}$

· si x > 0, -2x + 4 = 7/5 $\Rightarrow x=\frac{13}{10}$

Bloque optativo B:

Solución 1:

La posición relativa de los planos depende de las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x-y-mz=1 \\ -3x+2y+4z=m \\ -x+my+z=0 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -m \\ -3 & 2 & 4 \\ -1 & m & 1 \end{vmatrix}$ = $3m^2$ - 6m + 3, cuando m = 1, el rango de la matriz de coeficientes vale 2; y si $m \neq 1$, el rango vale 3.

Si m = 1, la matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ que tiene el menor } \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\text{ ; luego sus rango es 3.}$$

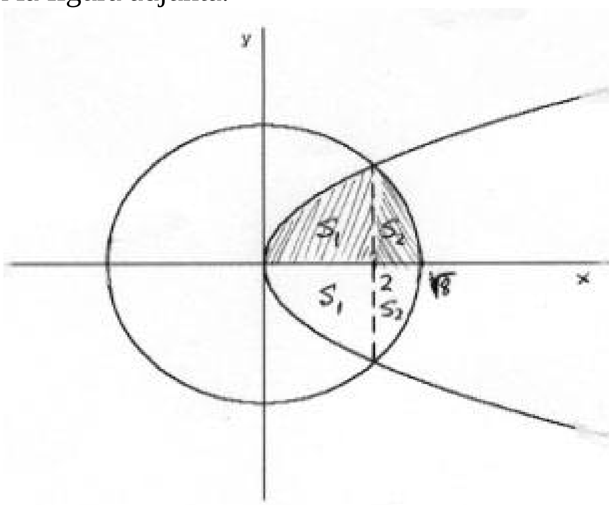
Por tanto:

· si m = 1, el sistema es incompatible. Los tres planos no tiene ningún punto en común: hay dos planos paralelos, π_2 y π_3

· si $m \neq 1$, el sistema es compatible determinado. Los tres planos se cortan en un punto.

Solución 2:

El recinto pedido es el señalado en la figura adjunta.



La superficie $S = 2S_1 + 2S_2$, luego

$$S = 2\int_0^2 \sqrt{2x}dx + 2\int_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2}\,dx$$

En la segunda integral, haremos $x=\sqrt{8}\,cost$, de donde:

$8\text{-}x^2=8sen^2t$; $dx=\text{-}\sqrt{8}\,sent\,dt$

Luego,

$$2\int_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2}\,dx = -16\int_{\pi/4}^{0} \text{sen}^2\,tdt = -16\int_{\pi/4}^{0} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= -16\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\text{sen}\,2t\right)\Big|_{\pi/4}^{0} = 2\pi - 4$$

Nota: Para calcular esta superficie no es necesario el cálculo integral. La superficie de ese segmento circular es un cuarto de la superficie del círculo menos la del cuadrado de lado 4.

Por otra parte,

$$2\int_0^2 \sqrt{2x}dx = 2\sqrt{2}x^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Big|_0^2 = \frac{16}{3}$$

Por tanto, el área pedida es $S = \frac{4}{3} + 2\pi$

Opción A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.
Calcular el valor de la integral

$$\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \operatorname{sen} x \, dx$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.
Se considera la ecuación $x^3 + \lambda x^2 - 2x = 1$. Utilizando el teorema de Bolzano de los valores intermedios.

a) **(1 punto) Probar que si $\lambda > 2$, la ecuación admite alguna solución menor que 1.**
b) **(1 punto) Probar que si $\lambda < 2$, la ecuación admite alguna solución mayor que 1.**

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

a) **(1 punto) Determinar el centro y el radio de la circunferencia**
$C \equiv x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$
b) **(1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a C en el punto P(4, 0).**
c) **(1 punto) Encontrar la ecuación de la circunferencia concéntrica con C que es tangente a la recta de ecuación $2x - y + 2 = 0$.**

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.
Se considera el sistema de ecuaciones en las incógnitas x, y, z, t

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + 2z + t = 0 \\ 2x + 2\lambda y - t = 0 \end{cases}$$

a) **(1,5 puntos) Encontrar los valores de λ para los que el rango de la matriz de los coeficientes del sistema es 2.**
b) **(1,5 puntos) Resolver el sistema anterior para $\lambda = 0$.**

Solución 1:

En el intervalo considerado, la función $f(x) = |x| \operatorname{sen} x = \begin{cases} -x \operatorname{sen} x, & x \in [-\pi, 0) \\ x\operatorname{sen} x, & x \in [0, 2\pi] \end{cases}$

Con esto,

$$\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \operatorname{sen} x\, dx = \int_{-\pi}^{0} -x \operatorname{sen} x\, dx + \int_{0}^{2\pi} x \operatorname{sen} x\, dx$$

Calculo de $\int x \operatorname{sen} x\, dx$. Por partes:

Haciendo $x = u$; $\operatorname{sen} x\, dx = dv$,

se tiene $dx = du$, $-\cos x = v$

luego,

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx .= -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x.$$

Por tanto

$$\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \operatorname{sen} x\, dx = \int_{-\pi}^{0} -x \operatorname{sen} x\, dx + \int_{0}^{2\pi} x \operatorname{sen} x\, dx =$$

$$= (x \cos x - \operatorname{sen} x)\Big|_{-\pi}^{0} + (-x \cos x + \operatorname{sen} x)\Big|_{0}^{2\pi} = -\pi - 2\pi = -3\pi$$

Solución 2:

a) Consideramos la función $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 2x - 1$, que es continua en todo **R**.
En particular, $f(x)$ es continua en $[0, 1]$.
Como $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = \lambda - 2 > 0$ si $\lambda > 2$, se deduce que existirá algún $x_0 \in (0, 1)$ tal que $f(x_0) = 0$. 0bviamente, x_0 será la solución de la ecuación dada.

b) Si $\lambda < 2$ tendremos:

$f(0) = -1$

$f(1) = \lambda - 2 < 0$

Pero para x suficiente grande, por ejemplo para $x = 4 - \lambda$, se tiene que

$f(4-\lambda) = 4\lambda^2 - 30\lambda + 55$, que es positivo siempre que $\lambda < 2$.

Obsérvese que $4\lambda^2 - 30\lambda + 55 < 0$ cuando $\lambda \in \left(\frac{30 - \sqrt{20}}{8}, \frac{30 + \sqrt{20}}{8} \right)$, intervalo que tiene por extremos las raíces de la ecuación $4\lambda^2 - 30\lambda + 55 = 0$.

Luego la ecuación dada, para $\lambda < 2$, tiene una solución entre 1 y $4 - \lambda$.

Solución 3:

a) $C \equiv x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$,
de donde: centro $O=(2, -1)$ y radio $r = \sqrt{5}$

b) El punto P(4, 0) es de la circunferencia C.
La tangente a C por P será la recta

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2t \end{cases} \iff \frac{x-4}{1} = \frac{y}{-2} \iff y = -2x + 8$$

pues su dirección es perpendicular al vector OP=(2, 1).

c) El radio de esta circunferencia, r´, es igual a la distancia de O a la recta 2x - y + 2 =0:

$$r' = \frac{4+1+2}{\sqrt{4+1}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

Su ecuación será $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 49/5$.

Solución 4:

La matriz asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2\lambda & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{f3-2f1}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2\lambda-4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Para que el rango sea 2 es necesario que la 2ª y 3º fila sean proporcionales. Para ello:
$-1 = 2\lambda - 4 \Rightarrow \lambda = 3/2$.

b) Si $\lambda = 0$, el rango de la matriz de coeficientes será 3, y el sistema inicial tendrá por matriz asociada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -t \\ 0 & -4 & -2 & t \end{array}\right) \underset{f3+4f2}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -t \\ 0 & 0 & 6 & -3t \end{array}\right) \iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ \quad y + 2z = -t \\ \qquad 6z = -3t \end{cases}$$

cuya solución es $\begin{cases} x = t/2 \\ y = 0 \\ z = -t/2 \end{cases}$

Nota: El alumno deberá elegir una pregunta del bloque A, dos del B, dos del C y una del D.

BLOQUE A. **(Puntuación: 4 puntos)**

1. **Discutir, según los valores de los parámetros λ y μ, el sistema de ecuaciones lineales**

$$\left.\begin{array}{r} x+(\lambda+1)y+\mu z=\lambda \\ \lambda y+\mu z=\lambda+\mu \\ x+2y+z=\mu \end{array}\right\}$$

2. **¿Forman los vectores (1, 1, 1), (2, 1, -1), (1, 0, 5) una base de R^3? En caso afirmativo, encontrar las coordenadas del vector (2, 3, -16).**

BLOQUE B: **(Puntuación; 6 puntos)**

1. **Estudiar si las rectas**

$$L_1=\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=1+2t \end{cases} \qquad L_2=\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+z-3=0 \end{cases}$$

se cruzan. En caso afirmativo encontrar su distancia.

2. **Encontrar la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta y = x y cuyo foco es el punto (2, 0).**

3. **Hallar el ángulo que forman los planos π_1 y π_2, donde π_1 es el plano determinado por los puntos (0, 0, 8), (-5, 1, 2) y (0, -2, 0) y π_2 es el plano perpendicular a la recta**

$x-1=y-2=\frac{z}{6}$, **que pasa por el punto (0, 0, 1).**

BLOQUE C: **(6 puntos)**

1. **Si $r_1, \ldots, r_t$ son números reales fijados, encontrar un número real x tal que**

$\sum_{i=1}^{t}(x-r_i)^2$ **sea mínima.**

2. **Representar gráficamente la curva** $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-4}}$

3. i) Definición de derivada de una función $f:[a,b]\rightarrow R$ en un punto $x_0 \in (a, b)$. Encontrar, utilizando la definición de derivada, la de la función $f(x) = x^3 - 2x + 1$ en $x_0 = 1$.

iii) Demostrar que dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, la cuerda que une los puntos $(r, f(r))$ y $(s, f(s))$ de su gráfica, donde $r < s$ son arbitrarios, es paralela a la tangente a la curva en el punto de abscisa $x_0 = \frac{r+s}{2}$. ¿Sabrías deducir un método para trazar la tangente a la parábola $y = ax^2 + bx + c$ en uno de sus puntos utilizando los instrumentos usuales de dibujo?

BLOQUE D: **(Puntuación; 4 puntos)**

1. **i) Enunciado de la regla de Barrow**
   ii) Calcular el área encerrada por la curva $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$, donde $a > 0$ es un número real fijado.

2. **Se recuerda que una función $f: R \rightarrow R$ es par (respectivamente, impar) si, para todo $x \in R$, $f(x) = f(-x)$ (respectivamente, $f(-x) = -f(x)$). Demostrar que si f es continua y par, entonces**

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

y que si f es continua e impar, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Encontrar $\displaystyle\int_{-5}^{5} \frac{x^3 e^{x^2}}{1+x^2}dx$

BLOQUE A

Solución 1:

La matriz asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & \mu & \lambda \\ 0 & \lambda & \mu & \lambda+\mu \\ 1 & 2 & 1 & \mu \end{pmatrix} \underset{f2-f1}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & \mu & \lambda \\ -1 & -1 & 0 & \mu \\ 1 & 2 & 1 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\underset{f3+f2}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & \mu & \lambda \\ -1 & -1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 1 & 2\mu \end{pmatrix}$$

Tomamos el menor formado por las tres primeras columnas, el de la matriz de coeficientes A, que vale $\lambda - \mu$.

Con esto:

· Si $\lambda \neq \mu$, r(A) = 3. El sistema será compatible determinado.

· Si $\lambda = \mu$, r(A) = 2. Hay que estudiar el rango de la matriz ampliada, M.

En este caso queda:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & \lambda & \lambda \\ -1 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}, \text{ y el menor } M_1 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ -1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda(\lambda-1), \text{ que vale}$$

0 para $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$.

Con esto, si $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$, r(M) = 2. El sistema sería compatible indeterminado.

Y si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$, r(M) = 3, con lo que el sistema sería incompatible.

Solución 2:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes; luego forman base de $\mathbf{R}^3$.

Sean x, y, z las coordenadas del vector (2, 3, -16). Entonces:

(2, 3, -16) = x(1, 1, 1) + y(2, 1, -1) + z(1, 0, 5)

que da lugar al sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y = 3 \\ x - y + 5z = -16 \end{cases}$$

cuya solución es x = 1, y = 2 y z = -3.

BLOQUE B

Solución 1:

La recta $L_2 = \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$

Sea A=(0, 1, 1) un punto de L_1, B=(0, 0, 3) de L_2. Entonces **AB**=(0, -1, 2).

Los vectores de dirección de L_1 y L_2 son, respectivamente $\mathbf{v}_{\mathbf{L1}}$=(1, -1, 2) y $\mathbf{v}_{\mathbf{L2}}$=(1, 2, -1).

Como $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, las rectas se cruzan.

Su distancia viene dada por $d(L_1, L_2) = \dfrac{|[AB, v_{L1}, v_{L2}]|}{|v_{L1} x v_{L2}|} = \dfrac{3}{\sqrt{27}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

· $[AB, v_{L1}, v_{L2}]$ denota el producto mixto de los tres vectores.

Solución 2:

Sea P=(x, y) un punto de la parábola. Entonces d(P, r: x - y = 0) = d(P, (2, 0)). Luego:

$$\frac{x-y}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

Operando, se obtiene $x^2 + y^2 + 2xy - 8x + 8 = 0$.

Solución 3:

Llamemos A=(0,0, 8), B=(-5, 1, 2) y C=(0, -2, 0).

Con esto, **AB**=(-5, 1, -6), **AC**=(0, -2, -8) y

$$\pi_1 = \begin{vmatrix} x & -5 & 0 \\ y & 1 & -2 \\ z-8 & -6 & -8 \end{vmatrix} = 0$$. Esto es, $2x + 4y - z + 8 = 0$.

La ecuación de π_2 será: π_2: x + y + 6z + d = 0, y por pasar por (0, 0, 1), d = -6.

Luego, π_2: x + y + 6z -6 = 0.

El ángulo (π_1, π_2) = ángulo $(v_{\pi 1}, v_{\pi 2})$ = arccos $(v_{\pi 1}, v_{\pi 2}) = \dfrac{v_{\pi 1} v_{\pi 2}}{|v_{\pi 1}||v_{\pi 2}|} = 0$, luego los planos son perpendiculares.

BLOQUE C

Solución 1:

$S = (x - r_1)^2 + (x - r_2)^2 + \ldots + (x - r_t)^2$

Para que esta suma sea mínima, su derivada S´ debe ser cero. Esto es,

$$S' = 2(x - r_1) + 2(x - r_2) + \ldots + 2(x - r_t) = 2(tx - (r_1 + r_2 + \ldots + r_t)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_t}{t}$$

Lo que significa que el x buscado es la media aritmética de los números fijados.

Nota: S´´ = 2t > 0, luego S sólo tiene mínimo; el encontrado.

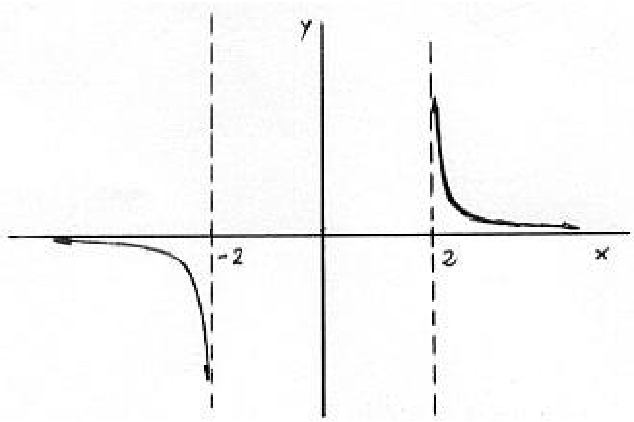
Solución 2:

El dominio de la función es **R**-[-2, 2]: x < -2 y x > 2.

Para x < -2, y = f(x) <0. Para x > 2, f(x) > 0.
En x = -2 y x = 2 hay asíntotas verticales.

Si $x \to -2^-$, $y \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $y \to +\infty$



La recta $y = 0$ es asíntota horizontal

Si $x \to -\infty$, $y \to 0^-$

Si $x \to +\infty$, $y \to 0^+$

Como $y' = \dfrac{-2x^2+4}{x^2(x^2-4)}$, que es negativa para todo x del dominio, la función siempre es decreciente.

Nota. En este caso no es imprescindible hacer la derivada para ver que es decreciente; podría hacerse un razonamiento, posiblemente más elegante, estudiando el valor del denominador de la función.

Solución 3:

i) La derivada se define como $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, si este límite existe.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3+3h^2+h}{h} = 1$$

ii) La pendiente de la cuerda vale

$$\frac{f(s)-f(r)}{s-r} = \frac{as^2+bs+c-ar^2-br-c}{s-r} = \frac{a(s^2-r^2)+b(s-r)}{s-r} = a(s+r)+b$$

Por otra parte, la pendiente de la tangente en $x_0 = \dfrac{r+s}{2}$, vale

$f'(x_0) = 2ax_0 + b = a(r + s) + b.$

Como ambas pendientes son iguales, las dos rectas son paralelas.

Para trazar la tangente a una parábola, en el punto de abscisa $x = x_0$, basta con aplicar el resultado anterior: hallar la cuerda correspondiente a los puntos $x_0 - p$ y $x_0 + p$ y trazar la paralela a ella por el punto de tangencia.

BLOQUE D

Solución 1:

i) Si f(x) es una función integrable y G(x) es una primitiva de f(x), entonces

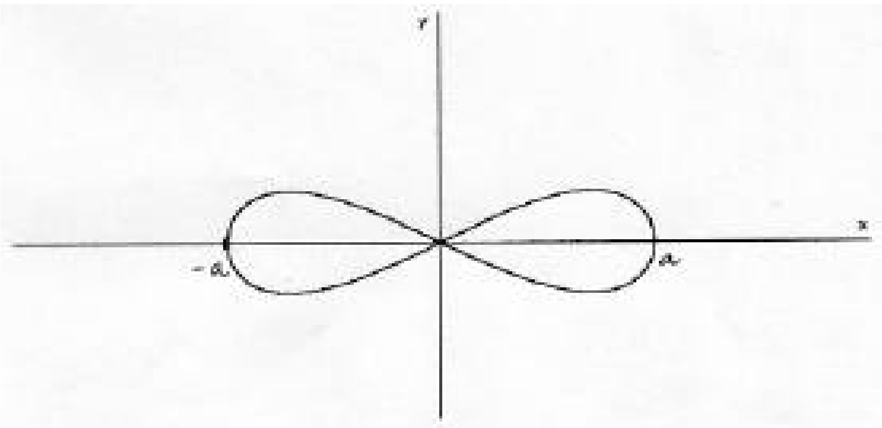
$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

ii) La gráfica de esta curva es la adjunta.

Despejando *y*, tenemos: $y = \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

El área pedida es

$$A = 4\int_0^a \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$



Haciendo $x = a \cdot cost$, se tiene:

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2cos^2t = a^2sen^2t; \qquad dx = -asentdt$$

Luego, $A = 4\int_0^a \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 4\int_{\pi/2}^0 \cos t \cdot a\,\mathrm{sen}\,t \cdot (-a\,\mathrm{sen}\,t)\,dt =$

$$= -4a^2\int_{\pi/2}^0 \cos t \cdot \mathrm{sen}^2\,t\,dt = -4a^2\left.\frac{\mathrm{sen}^3\,t}{3}\right|_{\pi/2}^0 = \frac{4a^2}{3}$$

Solución 2:

En general $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$.

Si f(x) es par, los recintos determinados por la función y el eje OX entre $-a$ y 0 y entre 0 y a, son idénticos, pues f(x) = f(-x). En consecuencia,

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

Si f(x) es impar, los recintos determinados por la función y el eje OX entre -*a* y 0 y entre 0 y *a*, son iguales pero situados a distinto lado del eje OX; esto hace que las integrales tengan el mismo valor pero con distinto signo. En consecuencia,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 .$$

La integral $\int_{-5}^{5} \frac{x^3 e^{x^2}}{1+x^2} dx = 0$, pues la función es impar.

Aclaraciones previas.
El alumno deberá contestar la cuestión o el problema de cada uno de los bloques A, B, C, D y E. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.

Dado el sistema de ecuaciones lineales $S \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = A \\ 2x + 3y + 4z = A \end{cases}$**, es posible encontrar un sistema equivalente a S, pero que tenga únicamente dos ecuaciones? Razona la respuesta.**

Problema A

Estudiar la compatibilidad del sistema de ecuaciones lineales dado por:

$$T \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = a \\ x + 3y = b \\ x + 4y = 2a \end{cases}$$

BLOQUE B

Cuestión B.

Amaia es una
estudiante a quien le han propuesto el siguiente problema:
Se consideran los cinco puntos del espacio: A=(1, 0, 0), B=(1, 1, 0), C=(1, 1, 1), D=(1, 5, 3) y E=(1, 3, 2).
Estudiar si los cinco puntos forman parte de un mismo plano.
Para resolver el problema, pide ayuda a sus primos, los gemelos Ängel y Carlos, y al amigo de ambos, Borja.
Ángel y Borja dicen que está claro que sí, ya que el plano que contiene a los tres primeros puntos es el plano x=1, y los otros dos puntos tienen sus coordenada x igual a uno; luego los cinco están en el mismo plano.
Carlos opina que no están en un mismo plano, puesto que, según dice, los vectores AB, AC y AD son linealmente independientes, y por ello, los puntos A,

B, C y D no pueden estar en un mismo plano. ¿A quién debe hacer caso Amaia? Razona la respuesta.

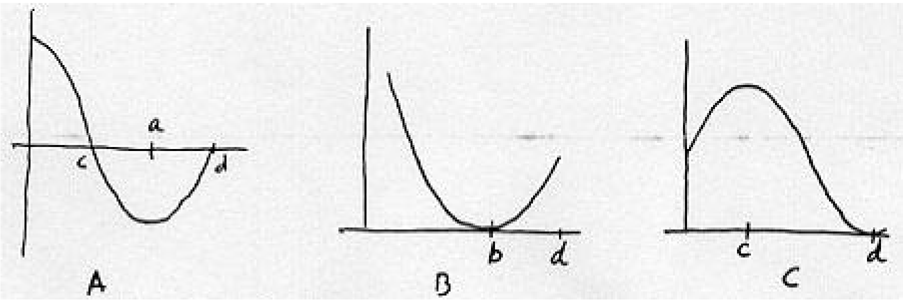
Problema B.

De un plano se sabe que contiene a los puntos A=(0, 0, 0) y B=(0, 0, 2). Además se sabe que el plano contiene al punto C, que está en la recta $r \equiv \begin{cases} x \qquad -1 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$ **y que equidista de A y de B.**

Encuentra la ecuación del plano.

Cuestión C.

Las gráficas que se muestran en la figura adjunta corresponden a una función *f*, a su derivada *f´* y a otra función *g*. Todas ellas están definidas en un mismo intervalo. Desafortunadamente, al componer el dibujo (en el que se muestran también los ejes), las gráficas han sido colocadas al azar.



Identificar de forma razonada cuál de ellas corresponde a *f*, a *f´* y cuál a *g*.

Problema C

De una función, *f*, se sabe que es derivable en todos los puntos de la recta real y que su derivada verifica $f\,'(x) \geq 3$ **para todo x. Además, *f*(1) = 1. ¿Hay suficientes datos para asegurar que *f*(21) ≥ 61? Razona la respuesta. Con el mismo ttpo de razonamiento, ¿qué se puede afirmar acerca del valor de *f*(40)?.**

Indicación: Se puede usar el teorema del valor medio.

BLOQUE D

Cuestión D

Se considera la función *f*(x) = 16 - x^2 **en el intervalo I = [-1, 4] y se considera la partición de dicho intervalo dada por *P* = [-1, 0, 2, 4].**

Encuentra de forma razonada el valor de la suma superior correspondiente a f y a dicha partición P.

Problema D.

Las gráficas de las funciones $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $g(x)=\dfrac{x}{8}$ y *h(x)* = *x* delimitan una región acotada en la zona del plano donde x > 0.

a) **Dibuja un esquema de dicha región.**
b) **Calcula el área de la región.**

BLOQUE E

Cuestión E

Mikel sale con un montón de cromos y vuelve a casa sin ninguno. Su madre le pregunta qué ha hecho con los cromos, a lo que Mikel responde: “A cada amigo que encontré le di la mitad de los cromos que tenía en ese momento más uno”. Su madre le pregunta que cuántos amigos se ha encontrado, a o que Mikel contesta que con cinco. ¿cuántos cromos tenía Mikel al salir de casa? Razona la respuesta.

Problema E

Sea A la matriz dada por $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Encuentra la ley de formación para las potencias sucesivas de A, es decir, para A^n, y demostrar dicha ley mediante un razonamiento de inducción.

Solución Cuestión A:

Sí. El sistema

$$S' \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=A \end{cases},$$

formado por las dos primeras ecuaciones de S, ya que la tercera ecuación es la suma de ellas.

Solución Problema A:

Como el rango de la matriz de coeficientes es 2, el sistema será compatible cuando el rango de la matriz ampliada sea 2. Esta matriz es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & b \\ 1 & 4 & 2a \end{pmatrix} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ f2-f1 \\ f3-f1 \\ f4-f1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 2 & b-1 \\ 0 & 3 & 2a-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \Leftrightarrow \\ f3-2f2 \\ f4-3f2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & b-2a+1 \\ 0 & 0 & -a+2 \end{pmatrix}$$

Para que su rango sea 2 es preciso que $a = 2$ y $b = 3$.

En los demás casos el sistema es incompatible.

Solución Cuestión B

Es obvio que los cinco puntos están en el plano x = 1.

Para confirmarlo podría obtenerse, analíticamente, la ecuación del plano determinado por A, B y C, comprobar que tal ecuación es x=1, y que, además, es verificada por los otros dos puntos D y E.

En efecto, el plano determinado por A, B y C es: $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ x = 1.

Respecto a los vectores **AB**, **AC** y **AD**, que son:

AB=(0, 1, 0), **AC**=(0, 1,1) y **AD**=(0, 5, 3),

no son linealmente independientes, pues $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$

Solución Problema B

Las ecuaciones paramétricas de r son: $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$.

Un punto C, genérico de r es C=(1, 1, t). Se desea que este punto este a igual distancia de A y de B, luego:

d(A, C)=d(A, B) $\Rightarrow \sqrt{1+1+t^2} = \sqrt{1+1+(t-1)^2} \Rightarrow$ t = 1 y C=(1, 1, 1).

Con esto, el plano A, B, C, será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; x - y = 0.$$

Solución Cuestión C:

Si la gráfica dada en A fuese *f*, *f´* sería negativa en el intervalo (0, *a*). Como ni la gráfica dada en B, ni la dada en C presentan valores negativos, A no puede dar la gráfica de *f* .

Si la gráfica dada en B fuese *f*, valdría el mismo razonamiento; alguna de las otras dos gráficas sería la de *f´* y tendría que tomar valores negativos entre 0 y *b*. Como eso no sucede, B tampoco da la gráfica de *f*.

Si la gráfica dada en C fuese *f*, sus derivada *f´* sería positiva hasta *c* y negativa desde *c* hasta *d*. Además, *f´(c)* = 0, pues en *c* hay un máximo. Tal hecho encaja con la gráfica dada en A.

Por tanto, *f* viene dada en C y *f´* en A. La función *g* será la dada en B.

Solución Problema C:

Si una función es derivable en todo **R**, el teorema del valor medio asegura que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f´(c), \text{ siendo } a < c < x.$$

O, lo que es lo mismo: $f(x) = f(a) + f´(c)(x - a)$.

En nuestro caso, para $f(1) = 1$ y $f´(c) \geq 3$, se tendrá:

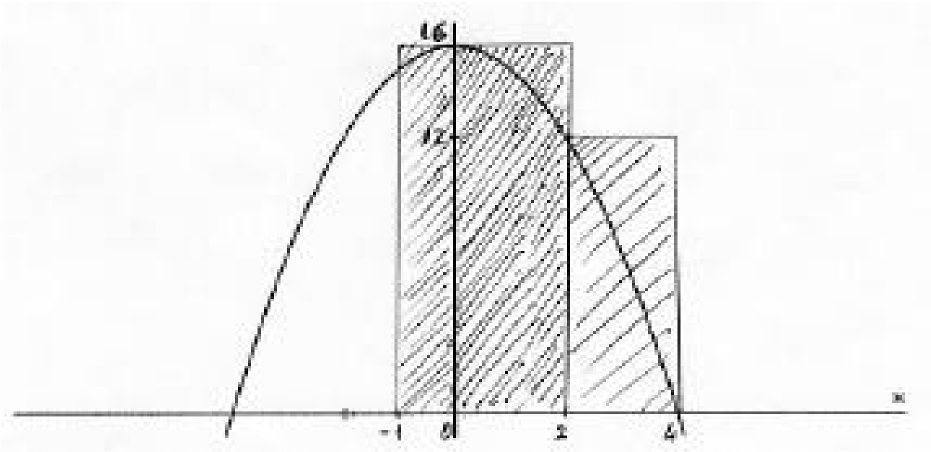
$$f(21) = f(1) + f´(c)(21 - 1) \geq 1 + 3 \cdot 20 = 61.$$

Y, por lo mismo,

$$f(40) = f(1) + f´(c)(40 - 1) \geq 1 + 3 \cdot 39 = 118.$$

Solución Cuestión D:

La situación descrita es la que se muestra en la figura adjunta.



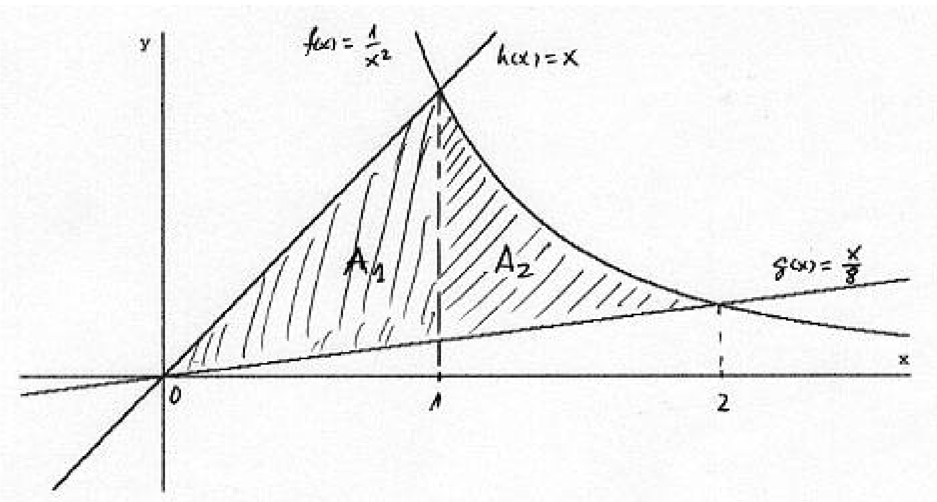
La suma superior se determina hallando las sumas de las áreas de los rectángulos, de base la amplitud de cada subintervalo (x_i - x_{i-1}) y altura el máximo de la función en cada subintervalo.

Como $f(0) = 16$ y $f(2) = 12$, se tendrá,

$$S = 1\cdot 16 + 2\cdot 16 + 2\cdot 12 = 72.$$

Solución Problema D:

a) La región determinada se marca en la figura adjunta.



b) El punto de corte de f con h es (1, 1); el de corte f con g, es (2, 1/4).

Luego, $A = A_1 + A_2 = \int_0^1 (x - \frac{x}{8})dx + \int_1^2 (\frac{1}{x^2} - \frac{x}{8})dx = \left[\frac{7x^2}{16}\right]_0^1 + \left[\frac{-1}{x} - \frac{x^2}{8}\right]_1^2 = \frac{3}{4}$

Solución Cuestión E:

Cuando se encuentra con el 5º y último amigo deben quedarle dos cromos, pues es la única posibilidad de que la mitad menos 1 sea 0, que son los cromos con los que vuelve a casa. Este razonamiento es el que emplearemos, a continuación, para indicar todas las situaciones iniciales en su encuentro con los cinco amigos.

5º y último amigo:

tenía 2, pues su mitad, que es 1, más 1 = 2. Se queda con 0 cromos.

4º amigo:

tenía 6, pues su mitad, que es 3, más 1 = 4. Se queda con 2 cromos.

3º amigo:

tenía 14, pues su mitad, que es 7, más 1 = 8. Se queda con 6 cromos.

2º amigo:

tenía 30, pues su mitad, que es 15, más 1 = 16. Se queda con 14 cromos.

1er amigo:

tenía 62, pues su mitad, que es 31, más 1 = 32. Se queda con 30 cromos.

Por tanto, al salir de casa tenía 62 cromos, que reparte en las cantidades:

32 16 8 4 2

Nota: La manera más inmediata de hacer este problema es plantear una ecuación.
Si tiene x cromos al salir de casa,

al primer amigo le da $\frac{x}{2}+1=\frac{x+2}{2}$, y le quedan $\frac{x-2}{2}$

al segundo amigo le da $\frac{1}{2}(\frac{x-2}{2})+1=\frac{x+2}{4}$, y le quedan $\frac{x-2}{4}$

al tercer, cuarto y quinto amigo les da, respectivamente: $\frac{x+2}{8}$, $\frac{x+2}{16}$, $\frac{x+2}{32}$

Como $\frac{x+2}{2} + \frac{x+2}{4} + \frac{x+2}{8} + \frac{x+2}{16} + \frac{x+2}{32} = x \Rightarrow x = 62$

Solución Problema E:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

A la vista de los resultado anteriores podemos hacer la conjetura de que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

fórmula que, obviamente, funciona para los casos estudiados: n = 1, 2, 3 y 4. (bastaría con comprobar que es válida para n = 1).

Supuesta cierta para n = n, veamos que es válida para en siguiente, n + 1.

En efecto:

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n + 2^n - 1 \\ 0 & 2 \cdot 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Siendo Ln(x) el logaritmo neperiano de x, considera la función f: (0, +∞) ® R, definida por $f(x) = xLn(x)$. Calcula:

a) **[1,5 puntos]** $\int f(x)dx$.

b) **[1 punto] Una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto (1, 0).**

Solución:

a) $\int f(x)dx = \int x\ln x dx$.

La haremos por partes:

u = x lnx ⇒ du = (lnx +1)dx
dv = dx ⇒ v = x

Luego,

$$\int x\ln x dx = x^2 \ln x - \int (x\ln x + x)dx \Rightarrow 2\int x\ln x dx = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + c$$

De donde, $\int x\ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + k$

b) Para que esa primitiva pase por (1, 0):

$$-\frac{1}{4} + k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

Sea f: R ® R la función dada por $f(x) = |8 - x^2|$.

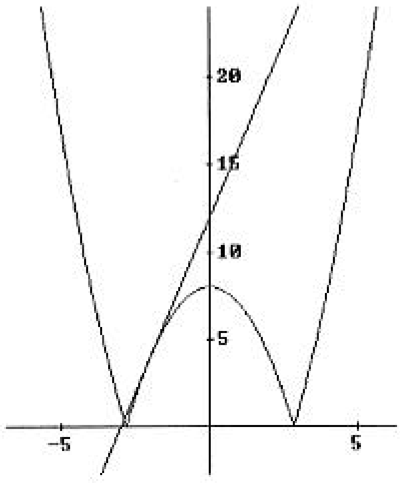
a) **[1 punto] Esboza la gráfica y halla los extremos relativos de f (dónde se alcanzan y cuáles son sus respectivos valores.**

b) **[1,5 puntos] Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta tangente a la misma en el punto de abscisa $x = -2$.**

Solución:

a) $f(x) = |8 - x^2| = \begin{cases} x^2 - 8, & x < -\sqrt{8} \\ 8 - x^2, & -\sqrt{8} < x < \sqrt{8} \\ x^2 - 8, & x > \sqrt{8} \end{cases}$

Su gráfica es la adjunta.



Tiene dos mínimos: $(-\sqrt{8},\ 0)$ y $(\sqrt{8},\ 0)$

Tiene un máximo relativo: (0, 8)

b) Tangente a $f(x)$ en $x = -2$:

$$y - f(-2) = f\,'(-2)(x + 2)$$

$f(-2) = 4$ $\qquad f\,'(x) = -2x \Rightarrow f\,'(-2) = 4$

La tangente es: $y - 4 = 4(x + 2) \Rightarrow y = 4x + 12$

Corte con $f(x) = x^2 - 8$:

$$x^2 - 8 = 4x + 12 \Rightarrow x^2 - 4x + 20 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{6}$$

Se tendrán los puntos: $(2 - 2\sqrt{6},\ 20 - 8\sqrt{6})$ y $(2 + 2\sqrt{6},\ 20 + 8\sqrt{6})$.

Además, otro punto de corte es el de tangencia: (–2, 4). (Véase la figura anterior.)

Sea

$$\begin{pmatrix} senx & -\cos x & 0 \\ \cos x & senx & 0 \\ senx+\cos x & senx-\cos x & 1 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de x existe la matriz inversa de A? Calcula dicha matriz inversa.

Solución:

Si A es la matriz dada, $|A| = sen^2 x + \cos^2 x = 1$. Tiene inversa para cualquier valor de x.

La matriz de los adjuntos es: $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} senx & -\cos x & -1 \\ \cos x & senx & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Luego,

$$A^{-1} = \frac{(A_{ij})^t}{|A|} = \begin{pmatrix} senx & \cos x & 0 \\ -\cos x & senx & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A(1, 0, - 1), es perpendicular al plano x - y + 2z + 1 = 0 y es paralelo a la recta $\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de la recta dada son: $r: \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$

El plano pedido está determinado por el punto A = (1, 0, −1) y por los vectores $\vec{v}_p$ = (1, −1, 2) y $\vec{v}_r$ = (2, 1, 0).

Su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y & -1 & 1 \\ z+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 4y + 3z + 5 = 0.$$