1.- Calcular la distancia del punto A(1,2,3) a la recta $r:\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ así como la ecuación del plano que pasa por el punto A y es perpendicular a la recta *r*.

Es evidente que $A \notin r$, la recta en forma paramétrica es $r:\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$, un punto de la misma es B(0,0,0), su director $\vec{u}(0,1,0)$

$\vec{BA}(1,2,3)$, $\vec{BA}\times\vec{u}\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$, $\vec{BA}\times\vec{u}(-3,0,1)$, $\left|\vec{BA}\times\vec{u}\right| = \sqrt{(-3)^2+0^2+1^2} = \sqrt{10}$,

$|\vec{u}| = \sqrt{0^2+1^2+0^2} = 1$

la distancia del punto *A* a la recta *r* es, empleando la correspondiente fórmula

$$d(A,r) = \frac{\left|\vec{BA}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}$$

Un plano perpendicular a la recta *r* tiene como vector normal al director de la recta $\vec{N}(0,1,0)$

la ecuación del plano será de la forma $0\cdot x + 1\cdot y + 0\cdot z + d = 0$, calculamos *d* sustituyendo el punto *A*, obteniendo $y - 2 = 0$ como el plano pedido

2.- Determinar un plano que, siendo perpendicular a la recta $r:(1+\lambda, 1+2\lambda, 1)$ pase por el punto P(0,1,1). Estudiar la posición de la recta *r* respecto del eje OZ.

El vector director de la recta *r* es $\vec{u}(1,2,0)$, que tomaré como vector normal del plano $\vec{N}(1,2,0)$

la ecuación del plano perpendicular a la recta *r* será de la forma $1\cdot x + 2\cdot y + 0\cdot z + d = 0$, calculamos *d* sustituyendo P, obteniendo $x + 2y - 2 = 0$ como el plano perpendicular a la recta *r* en el punto P

El eje OZ tiene como ecuación $s:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$, su director es el vector $\vec{v}(0,0,1)$, estudiaremos el rango de la matriz formada por los directores de ambas rectas $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango(C) = 2 \Rightarrow$ las rectas se cortan en un punto o se cruzan, tomemos un punto en cada recta: A(1,1,1) en *r* y B(0,0,0) en *s* $\vec{BA}(1,1,1)$, si añadimos a la matriz *C* la columna integrada por este vector tendremos $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - (0 + 0 + 1) = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ las rectas se cruzan

3.- Hallar la ecuación del plano que es perpendicular al segmento de extremos A(3,2,-1) y B(2,0,3) en el punto medio del mismo.

$\vec{AB}(-1,-2,4) = \vec{N}$, $PM_{AB}(5/2,1,1)$, la ecuación del plano será $-x - 2y + 4z + d = 0$, sustituyendo el punto medio obtenemos $-x - 2y + 4z + 1/2 = 0$

4.- Sean los puntos P(3,1,5), Q(-1,7,3). Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento. Este plano corta a los ejes en los puntos A, B y C. Se pide: a) Escribir la ecuación de π . b) Calcular el área del triángulo ABC.

$\vec{PQ}(-4,6,-2) = \vec{N}$, $PM_{PQ}(1,4,4)$, la ecuación del plano π será $-4x + 6y - 2z + d = 0$, sustituyendo el punto medio obtenemos $\pi: -4x + 6y - 2z - 12 = 0$, ahora cortaremos el plano calculado con cada uno de los tres ejes

Corte con el eje OX: la ecuación es $\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$, sustituyendo en el plano obtenemos $-4\lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = -3$, el punto A(-3,0,0)

Corte con el eje OY: la ecuación es $\begin{cases} x=0 \\ y=m \\ z=0 \end{cases}$, sustituyendo en el plano obtenemos $6m-12=0 \Rightarrow m=2$, el punto B(0,2,0)

Corte con el eje OZ: la ecuación es: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=n \end{cases}$, sustituyendo en el plano obtenemos $-2n-12=0 \Rightarrow n=-6$, el punto C(0,0,-6)

$\vec{AB}(3,2,0)$, $\vec{AC}(3,0,-6)$, $\vec{AB}\times\vec{AC}\left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right) = (-12,18,-6)$

$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-12)^2+18^2+(-6)^2} = \sqrt{144+324+36} = \sqrt{504} = 2\sqrt{126}$

$Área(ABC) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{126}$

5.- Dada la recta $r: \begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ 2x-y+5z=8 \end{cases}$ hallar la ecuación del plano que pasa por *r* y por P(1,3,8). Calcular también, la distancia desde el origen al plano anterior.

La ecuación del haz de planos que contiene a la recta *r* es $s(3x+2y-z-1)+t(2x-y+5z-8)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (3s+2t)x+(2s-t)y+(-s+5t)z-s-8t=0$, el plano que buscamos pertenece a este haz y contiene al punto P, de donde

$(3s+2t)\cdot 1+(2s-t)\cdot 3+(-s+5t)\cdot 8-s-8t=0 \Rightarrow 3s+2t+6s-3t-8s+40t-s-8t=0 \Rightarrow 31t=0 \Rightarrow t=0$

sustituyendo en el haz *t* por 0 obtenemos el plano $p: 3x+2y-z-1=0$, curiosamente el primero de los planos que definen a *r*

Para calcular la distancia desde el origen al plano calculado sólo tenemos que sustituir en la fórmula de la distancia de un punto a un plano $d(O(0,0,0),p) = \frac{|3\cdot 0+2\cdot 0-0-1|}{\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{9+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$

6.- Determinar la ecuación continua de la recta *r* que es perpendicular y corta a las rectas *s* y *t* siguientes:

$s:(1+2l, 2-l, 1+l)$, $t:(4+m, 6+m, 5-2m)$

Sin duda la recta que buscamos será la perpendicular común , estudiaremos primero la posición entre las rectas dadas

$\vec{u}(2,-1,1)$, $\vec{v}(1,1,-2)$, la matriz formada por ambos $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1=3\neq 0 \Rightarrow Rango(C)=2$, las rectas se cortan en un punto o se cruzan, para salir de dudas elegimos un punto en cada una A(1,2,1) en *s* y B(4,6,5) en *t*

$\vec{AB}(3,4,4)$, añadiendo a la matriz *C* la columna formada por este vector tenemos el determinante

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8+4+6-(3-4-16) = 18+23 = 41 \neq 0 \Rightarrow$ las rectas *s* y *t* se cruzan, en efecto pues, la recta *r* será la perpendicular común a *s* y *t*

Consideremos el plano p que contiene a la recta *s* y sea paralelo a *t* $p:(x,y,z)=(1,2,1)+l(2,-1,1)+m(1,1,-2)$, la ecuación general de este plano surge del determinante

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x-1 \\ -1 & 1 & y-2 \\ 1 & -2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2z-2+y-2+2x-2-(x-1-z+1-4y+8)=0 \Rightarrow p: x+5y+3z-14=0$, ahora proyectaremos ortogonalmente la recta *t* sobre el plano p, en realidad sólo necesitamos proyectar un punto de esa recta, por ejemplo, B(4,6,5), necesito una recta perpendicular al plano p en el punto B, es decir

$(x,y,z)=(4,6,5)+a(1,5,3)$, la intersección de este recta con el plano nos dará el punto B´ proyección de B en el plano p

$1\cdot(4+a)+5\cdot(6+5a)+3\cdot(5+3a)-14=0 \Rightarrow 4+a+30+25a+15+9a-14=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 35a+35=0 \Rightarrow a=-1$, el punto B´(3,1,2)

La proyección de t en el plano π es la recta $t´: (x,y,z)=(3,1,2)+\beta(1,1,-2)$, ahora necesito calcular la intersección entre las rectas s y $t´$; el sistema a resolver será

$\left.\begin{array}{l} 1+2\lambda=3+\beta \\ 2-\lambda=1+\beta \\ 1+\lambda=2-2\beta \end{array}\right\}$ Si sumo la segunda y tercera ecuaciones obtengo $3=3-\beta\Rightarrow\beta=0\Rightarrow$ la intersección entre las dos rectas es el punto B´(3,1,2)

La perpendicular común a las rectas s y t es una recta que pasa por B´ y tiene como director al vector normal del plano $\vec{N}(1,5,3)$

$$r:\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-2}{3}$$

7.- Dada la recta de ecuación $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{3}$, determinar la ecuación del plano que la contiene y pasa por el origen.

A(2,-1,3) es un punto de la recta dada, el vector $\vec{OA}(2,-1,3)$, donde O es el origen de coordenadas, tiene distinta dirección que el director de la recta $\vec{u}(2,-2,3)$, puedo tomar ambos como directores del plano deseado

$\pi:(x,y,z)=(2,-1,3)+\lambda(2,-2,3)+\mu(2,-1,3)$ es la ecuación pedida

8.- Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta $r:\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x+y=-3 \end{cases}$ y que pase por A(1,0,-1).

El vector director de esa recta me servirá como vector normal del plano, calcularemos dicho director expresando la recta en otra forma que no sea implícita

El menor de orden dos compuesto por los coeficientes de x y z en las ecuaciones dadas es $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, haremos $y=\lambda$ y en función de ésta obtenemos $x=-3-\lambda$, $z=4+3\lambda$, la recta dada es $r:(x,y,z)=(-3,0,4)+\lambda(-1,1,3)$,

su director $\vec{u}(-1,1,3)=\vec{N}$, el plano pedido es $\pi:-x+y+3z+D=0$, determinaremos D sustituyendo el punto A dado

$-1+0+3\cdot(-1)+D=0\Rightarrow -4+D=0\Rightarrow D=4\Rightarrow\pi:-x+y+3z+4=0$

9.- Determinar la ecuación continua de la recta que pasa por P(1,2,2) y es perpendicular a las rectas r y s siguientes:

$r:\begin{cases} x+2y-3z-1=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$, $s:\begin{cases} 3x-y+3z=0 \\ x+4y-2=0 \end{cases}$

El director de la recta pedida será el producto vectorial de los vectores directores de las rectas r y s, necesitamos obtener ambos.

Comienzo por r , el menor de orden dos compuesto por los coeficientes de x y z es $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1+3=2\neq 0$, haremos $y=\lambda$ y en función de ésta obtenemos $\begin{array}{c} x-3z=1-2\lambda \\ x-z=-2\lambda \end{array}$, restando ambas expresiones resulta $-2z=1\Rightarrow z=-1/2$, y despejando

$x=-1/2-2\lambda$, $r:(x,y,z)=(-1/2,0,-1/2)+\lambda(-2,1,0)$, $\vec{u}(-2,1,0)$

Seguimos con s , el menor de orden dos compuesto por los coeficientes de x y z es $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-3\neq 0$, haremos $y=\mu$ y en función de ésta obtenemos $x=2-4\mu$, $z=\dfrac{-3x+y}{3}=\dfrac{-6+12\mu+\mu}{3}=-2+13\mu/3$,

$s:(x,y,z)=(2,0,-2)+\mu(-4,1,13/3)$, $\vec{v}(-12,3,13)$, he preferido un múltiplo para evitar las fracciones

$\vec{u}\times\vec{v}\left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 13 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} -2 & -12 \\ 0 & 13 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -2 & -12 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right)=(13,26,6)$.

La recta pedida es $\dfrac{x-1}{13}=\dfrac{y-2}{26}=\dfrac{z-2}{6}$

10.- Calcular algún valor de a para que el producto vectorial de los vectores $\vec{u}(1,2,a)$ y $\vec{v}(1,a,0)$ tenga la dirección del eje OZ.

El eje OZ tiene la dirección del vector $\vec{w}(0,0,1)$, $\vec{u}\times\vec{v}(\begin{vmatrix}2 & a\\ a & 0\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1 & 1\\ a & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & a\end{vmatrix}) = (-a^2, a, a-2)$

$\vec{u}\times\vec{v} = k\cdot\vec{w} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}(0,0,-2)$

11.- Hallar la ecuación del plano π que contiene a la recta de ecuación $r : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y es ortogonal al plano $\rho : 2x - y + 3z + 1 = 0$. Calcula la recta determinada por los planos π, ρ .

El plano π pertenece al haz de planos determinado por la recta *r* , la ecuación de dicho haz es del tipo $\alpha(x + y - z + 1) + \beta(x + 2y + z) = 0 \Rightarrow (\alpha+\beta)x + (\alpha + 2\beta)y + (-\alpha+\beta)z + \alpha = 0$, si el plano que buscamos es ortogonal a ρ , el producto escalar de los vectores $\vec{N}(\alpha+\beta, \alpha+2\beta, -\alpha+\beta)$ y $\vec{N}'(2,-1,3)$ debe ser cero, luego

$2\alpha + 2\beta - \alpha - 2\beta - 3\alpha + 3\beta = 0 \Rightarrow -2\alpha + 3\beta = 0 \Rightarrow \beta = 2\alpha/3$, sustituyendo obtenemos

$(\alpha + 2\alpha/3)x + (\alpha + 4\alpha/3)y + (-\alpha + 2\alpha/3)z + \alpha = 0 \Rightarrow 5\alpha x/3 + 7\alpha y/3 - \alpha z/3 + \alpha = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x/3 + 7y/3 - z/3 + 1 = 0 \Rightarrow \pi : 5x + 7y - z + 3 = 0$

La recta determinada por los planos π , ρ es en forma implícita $s : \begin{cases} 5x + 7y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$, para expresarla de otra manera actuamos como de costumbre , el menor de orden dos determinado por los coeficientes de *y* y *z* es

$\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 1 = 20 \neq 0$, haciendo $x = \lambda$ obtenemos $\begin{matrix} 7y - z = -3 - 5\lambda \\ -y + 3z = -1 - 2\lambda \end{matrix}$, multiplicando la segunda ecuación por 7 y sumándola a la primera obtengo $20z = -10 - 19\lambda \Rightarrow z = -1/2 - 19\lambda/20$, despejando *y* en la segunda ecuación obtengo

$y = 3z + 1 + 2\lambda \Rightarrow y = -3/2 - 57\lambda/20 + 1 + 2\lambda = -1/2 - 17\lambda/20$

la recta es $s : (x, y, z) = (0,-1/2,-1/2) + \lambda(1,-17/20,-19/20)$

12.- Dada la recta $r : x - 1 = \dfrac{y+1}{2} = z$. Hallar la distancia del punto P(1,0,0) a ella.

Es fácil comprobar que P no pertenece a la recta sustituyendo en su ecuación

El vector director de la recta es $\vec{u}(1,2,1)$, un punto de la misma es A(1,-1,0) , $\vec{AP}(0,1,0)$,

$\vec{AP}\times\vec{u}(\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}) =)(1,0,-1)$, $\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{u}\right| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

13.- Hallar la distancia del punto A(1,-2,0) a la recta $r : \begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$ así como la ecuación del plano que pasa por el punto A y es perpendicular a a la recta *r*.

Comenzaremos expresando la recta en forma vectorial , el menor de orden dos determinado por los coeficientes de *x* e *y* es

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ tomaremos $z = \lambda$ y en función de ella obtenemos $x = -1/2 + \lambda/2$, $y = x + 2z - 3 = -7/2 + 5\lambda/2$

la recta es $r : (x, y, z) = (-1/2,-7/2,0) + \lambda(1,5,2)$, hemos puesto como director un múltiplo del que originalmente salió

El punto A no pertenece a la recta, puesto que no verifica su ecuación, un punto de la recta es B(0,-1,1), lo obtengo sustituyendo el parámetro λ por el valor ½ de este modo evito trabajar con fracciones, $\vec{BA}(1,-1,-1)$, $\vec{u}(1,5,2)$

$\vec{BA}\times\vec{u}(\begin{vmatrix}-1 & 5\\ -1 & 2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 5\end{vmatrix}) = (3,-3,6)$, $\left|\overrightarrow{BA}\times\vec{u}\right| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{54}$, $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{30}$

$$d(A,r) = \frac{\left|\overrightarrow{BA}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{30}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

El plano que pasa por A y es perpendicular a *r* tiene como vector normal al directro de la recta, por tanto será $x + 5y + 2z + D = 0$, calcularemos *D* sustituyendo el punto A, obteniéndose finalmente el plano

$\boldsymbol{p} : x + 5y + 2z + 9 = 0$

14.- Encontrar la ecuación de un plano perpendicular al plano $\boldsymbol{p} : 5x + y + 4z = 0$ y que pasa por los puntos A(3,2,1) y B(3,4,4). Previamente debe comprobarse que ni A ni B pertenecen al plano dado

Uno de los directores del plano buscado será el vector $\vec{AB}(0,2,3)$, el otro el vector normal del plano $\boldsymbol{p}$, es decir $\vec{N}(5,1,4)$, la ecuación del plano será $(x, y, z) = (3,2,1) + \boldsymbol{l}(0,2,3) + m(5,1,4)$

15.- Hallar la ecuación del plano que es perpendicular al plano $\boldsymbol{p} : x - 3y + z = 0$ y pasa por los puntos P(1,3,0) y Q(4,-2,1).

Igual que el ejercicio anterior $\vec{PQ}(3,-5,1)$, $\vec{N}(1,-3,1)$ el plano será $(x, y, z) = (1,3,0) + \boldsymbol{l}(3,-5,1) + m(1,-3,1)$

16.- Sean dos planos de ecuaciones $\boldsymbol{p} : ax + 9y - 3z = 8$ y $\boldsymbol{r} : x + ay - z = 0$ y sea *r* la recta intersección de ambos. Determinar el valor de *a* para que: a) Los dos planos sean paralelos. b) Los planos sean perpendiculares. c) La recta *r* corte al plano OXY en un punto que diste $\sqrt{2}$ del origen.

a) Para que los planos sean paralelos deben ser proporcionales los coeficientes de *x*, *y*,*z* , pero no el término independiente

$$\frac{a}{1} = \frac{9}{a} = \frac{-3}{-1} \neq \frac{-8}{0} \Rightarrow a = 3$$

b) Para que los planos sean perpendiculares el producto escalar de sus vectores normales debe ser cero, por tanto

$$a \cdot 1 + 9 \cdot a - 3 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow 10 \cdot a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3/10$$

c) El menor de orden dos determinado por los coeficientes de *x* y *z* en las ecuaciones implícitas de la rectas es

$\begin{vmatrix} a & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -a + 3 \neq 0$ si suponemos que $a \neq 3$, lo cual es evidente puesto que en caso contrario no habría recta, haremos

$y = \boldsymbol{l}$ y obtendremos en función de ella $\begin{matrix} ax - 3z = 8 - 9\boldsymbol{l} \\ x - z = -a\boldsymbol{l} \end{matrix}$, si se multiplica la segunda ecuación por –3 y se le suma a la primera

obtenemos $(a-3)x = 8 + (3a - 9)\boldsymbol{l} \Rightarrow x = 8/(a-3) + 3\boldsymbol{l}$, $z = x + a\boldsymbol{l} = 8/(a-3) + (a+3)\boldsymbol{l}$

$r : (x, y, z) = (8/(a-3), 0, 8/(a-3)) + \boldsymbol{l}(3,1,a+3)$, el plano OXY tiene ecuación $z = 0$, la intersección entre *r* y el plano OXY se obtiene resolviendo la ecuación $z = 0 \Rightarrow 8/(a-3) + \boldsymbol{l}(a+3) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{l} = -8/(a^2 - 9)$, sustituyendo este valor en la recta obtengo el punto $M\left(\frac{8a}{a^2-9}, \frac{-8}{a^2-9}, 0\right)$, la distancia de este punto al origen será el módulo del vector

$\overrightarrow{OM}\left(\frac{8a}{a^2-9}, \frac{-8}{a^2-9}, 0\right)$, es decir $\left|\vec{OM}\right| = \sqrt{\frac{64a^2}{(a^2-9)^2} + \frac{64}{(a^2-9)^2} + 0} = \sqrt{\frac{64a^2+64}{(a^2-9)^2}} = \sqrt{2}$,

$\frac{64a^2+64}{(a^2-9)^2} = 2 \Rightarrow 64a^2 + 64 = 2a^4 - 36a^2 + 162 \Rightarrow 2a^4 - 100a^2 + 98 = 0 \Rightarrow a^4 - 50a^2 + 49 = 0$, ecuación cuyas soluciones son $a = 1$ y $a = 7$

17.- Determinar si las rectas *r* y *s* siguientes se cortan o se cruzan: $r : \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$, $s : \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$.

Estudiaremos la resolución del sistema formado por las cuatro ecuaciones que nos dan

$$A \vdots B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & -1 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & -2 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & -1 \\ 0 & -3 & 5 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & -1 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & -3 & 5 & \vdots & 3 \\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & -1 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & -6 & \vdots & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & -1 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & -6 & \vdots & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & -1 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 3 = Rango(A) \neq Rango(A \vdots B) = 4$$

El sistema es incompatible, cabría pensar que las rectas fuesen paralelas, pero esta posibilidad queda rechazada puesto que Rango(A)=3 lo cual indica que ambas rectas no están situadas en un mismo plano, por tanto las rectas se cruzan

Se podría haber realizado el ejercicio pasando a forma no implícita las ecuaciones de las rectas

18.- Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuación $r:(-1+3\lambda, 1+2\lambda, 2+\lambda)$ y es perpendicular al plano $\pi : 2x+y-3z+4=0$. Determina el ángulo formado por la recta y el plano dados.

Estudiemos previamente la posición entre la recta y el plano dados, $\vec{u}(3,2,1)$, $\vec{N}(2,1,-3)$

$\vec{u}\cdot\vec{N}=6+2-3=5\neq 0 \Rightarrow$ la recta corta al plano en un punto, y no de forma perpendicular al plano puesto que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{N}$ tienen distinta dirección

El plano buscado tendrá como uno de sus directores el de la recta, el otro será el vector normal del plano π

Por tanto el plano pedido es $\rho : (x,y,z)=(-1,1,2)+\lambda(3,2,1)+\mu(2,1,-3)$

Para hallar el ángulo entre la recta y el plano dados utilizaremos la correspondiente fórmula

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{N}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{N}|}=\frac{5}{\sqrt{9+4+1}\cdot\sqrt{4+1+9}}=\frac{5}{14}\Rightarrow \alpha\approx 20^{\circ}55'29''$$

19.- Halla a para que sean paralelas las rectas $r:\begin{cases} ax-2y=a-4 \\ 3x-2z=-3 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} 3x-az=3-4a \\ 3y-2z=-2 \end{cases}$.

Expresemos ambas rectas de otro modo:

El menor de orden dos formado por los coeficientes de *y* y *z* en *r* es no nulo, en efecto $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-4$, expresemos la variable

$x=\lambda$, en función de ella las ecuaciones implícitas de la recta *r* quedan $\begin{matrix} -2y=a-4-a\lambda \\ -2z=-3-3\lambda \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y=\dfrac{4-a}{2}+\dfrac{a}{2}\lambda \\ z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\lambda \end{matrix}$, luego

$r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=\dfrac{4-a}{2}+\dfrac{a}{2}\lambda \\ z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\lambda \end{cases}$, del mismo modo, el menor de orden dos formado por los coeficientes de *x* e *y* en *s* es no nulo,

$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=9$, expresemos la variable $z=\mu$, en función de ella las ecuaciones de la recta *s* quedan $\begin{matrix} 3x=3-4a+a\mu \\ 3y=-2+2\mu \end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{matrix} x=\dfrac{3-4a}{3}+\dfrac{a}{3}\mu \\ y=\dfrac{-2}{3}+\dfrac{2}{3}\mu \end{matrix}$, luego $s:\begin{cases} x=\dfrac{3-4a}{3}+\dfrac{a}{3}\mu \\ y=\dfrac{-2}{3}+\dfrac{2}{3}\mu \\ z=\mu \end{cases}$,

los directores de ambas rectas pueden ser $\vec{u}(2,a,3)$ y $\vec{v}(a,2,3)$, para que las rectas sean paralelas, deben serlo ambos, en cuyo caso $a=2$, cabría pensar si pudieran ser coincidentes, para salir de dudas, elegimos un punto en la primera P(0,1,3/2) y otro en la segunda Q(-5/3,-2/3,1), el vector $\vec{PQ}(-5/3,-5/3,-1/2)\equiv(10,10,3)$ tiene distinta dirección que $\vec{u}$ y $\vec{v}$, luego las rectas son definitivamente paralelas

20.- Dadas las rectas $r:\begin{cases} x+y=2 \\ z=0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=\lambda \\ z=2-2\lambda \end{cases}$ y el punto P(1,0,1), hallar el plano determinado por P y *r*, y el plano determinado por P y *s*.

Es fácil comprobar que el punto P no pertenece a ninguna de las rectas dadas sustituyendo directamente en sus respectivas ecuaciones

Paras determinar el plano pedido, en el primer caso podemos considerar el haz de planos que determinan la recta *r*

$\alpha(x+y-2)+\beta z=0 \Rightarrow \alpha x+\alpha y+\beta z-2\alpha=0$, imponiendo la condición de que uno de estos planos pasa por el punto P obtenemos $\alpha+\beta-2\alpha=0\Rightarrow\alpha=\beta\Rightarrow\alpha x+\alpha y+\alpha z-2\alpha=0\Rightarrow x+y+z-2=0$ es el plano pedido

En el segundo caso sólo necesitamos obtener el segundo vector director del plano, nos servirá el que una los puntos P y A(2,0,2), este segundo punto pertenece a la recta *s*

$\vec{PA}(1,0,1) \Rightarrow$ el plano pedido es $(x, y, z) = (2,0,2) + \lambda(1,1,-2) + \mu(1,0,1)$

21.- Dada la recta $r: \begin{cases} x + 2y - z + 3 = 0 \\ 3x + 5y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ y el punto P(2,1,2), se pide:

a) La ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a la recta *r*. b) Calcula la distancia de P a *r*.
El punto P no pertenece a la recta dada, se deduce fácilmente sustituyendo en las ecuaciones
a) Comenzaremos expresando la recta en forma paramétrica, por ejemplo
El menor de orden dos determinado por los coeficientes de *x* e *y* en las ecuaciones implícitas de la recta es no nulo, en efecto $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$, haremos $z = \lambda$ y en función de ésta obtendremos $\begin{matrix} x + 2y = -3 + \lambda \\ 3x + 5y = 1 - 2\lambda \end{matrix}$, multiplicando la primera ecuación por 3 y restando la segunda tenemos $y = -10 + 5\lambda$, despejando en la primera deducimos $x = -2y - 3 + \lambda = 17 - 9\lambda$

$r: \begin{cases} x = 17 - 9\lambda \\ y = -10 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, el vector director de la recta me servirá como vector normal de un plano perpendicular a la misma, sólo necesito imponerle que contenga al punto P, luego el plano que buscamos será $-9x + 5y + z + 11 = 0$

b) A(17,-10,0) es un punto de la recta, el vector $\vec{AP}(-15,11,2)$, $\vec{AP} \times \vec{u}\left(\begin{vmatrix} 11 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -15 & -9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -15 & -9 \\ 11 & 5 \end{vmatrix}\right) = (1,3,24)$

Utilizando la fórmula de la distancia de un punto a una recta $d(P, r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\right|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\sqrt{1 + 9 + 576}}{\sqrt{81 + 25 + 1}} = \dfrac{\sqrt{586}}{\sqrt{107}}$

22.- Se considera el plano $\pi: x + 3y + z = 7$ y los puntos A(1,1,1) y B(2,1,-1), se pide:

a) Comprobar que A y B están al mismo lado del plano. b) Halla C situado sobre la recta perpendicular al plano que pasa por B, a igual distancia del plano que B, pero al otro lado del mismo.
a) Cualquier plano $Ax + By + Cz + D = 0$ divide al espacio en dos semiespacios, uno el de los puntos que verifican la inecuación $Ax + By + Cz + D > 0$, el otro verificando $Ax + By + Cz + D < 0$, en nuestro caso al sustituir A y B en la formula $x + 3y + z - 7$ obtenemos $-2 < 0$ y $-3 < 0$, respectivamente, por tanto A y B se encuentran al mismo lado del plano
b) C no es otra cosa que el simétrico de B respecto del plano, comenzaremos calculando la ecuación de la recta perpendicular al plano en B, $(x, y, z) = (2,1,-1) + \lambda(1,3,1)$, a continuación cortaremos esta recta con el plano para calcular la proyección ortogonal de B en el plano $2 + \lambda + 3(1 + 3\lambda) - 1 + \lambda - 7 = 0 \Rightarrow -3 + 11\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 3/11$, sustituyendo de nuevo en la recta obtenemos M(25/11,20/11,-8/11) proyección de B, este punto es el punto medio del segmento de extremos B y B´ donde B´es el simétrico de P si llamamos a las coordenadas de $B´(a, b, c)$ obtenemos las ecuaciones $\dfrac{2 + a}{2} = \dfrac{25}{11}, \dfrac{1 + b}{2} = \dfrac{20}{11}, \dfrac{-1 + c}{2} = \dfrac{-8}{11}$, de las que pueden deducirse las coordenadas de P´(28/11,29/11,-5/11)

23.- Encontrar las ecuaciones de una recta que pase por el punto P(2,0,0), esté contenida en el plano $\pi: 3x + 2y = 6$ y sea perpendicular a la recta $r: x = \dfrac{y - 2}{-1} = \dfrac{z - 3}{-2}$

Comenzaremos expresando la recta *r* de otro modo, si hacemos $x = \lambda$, obtenemos en función de ésta $y = 2 - \lambda$, $z = 3 - 2\lambda \Rightarrow r: (x, y, z) = (0,2,3) + \lambda(1,-1,-2)$, la recta que buscamos es perpendicular a *r* y está contenida en π, su vector director será perpendicular al vector director de la recta *r* y al vector normal del plano π, de modo que tendrá la dirección del producto vectorial de estos vectores $\vec{u} \times \vec{N}\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right) = (4,-6,5)$

la recta pedida es $s: (x, y, z) = (2,0,0) + \mu(4,-6,5)$

24.- Dadas las rectas $r: \dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y + 5}{-2} = \dfrac{z - 1}{-1}$ y $s: \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Comprobar que son paralelas. b) Hallar la distancia entre ambas.
Expresemos *s* de otro modo: El menor de orden dos determinado por los coeficientes de *x* e *y* es no nulo, en efecto

$\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6-2=4$, haciendo $z=m$ obtenemos en función de la misma $\begin{matrix}3x+2y=-2m\\ x+2y=2m\end{matrix}$, restando ambas ecuaciones deducimos que $2x=-4m\Rightarrow x=-2m$, despejando $2y=2m-x=4m\Rightarrow y=2m\Rightarrow s:(x,y,z)=(0,0,0)+m(-2,2,1)$

a) Los respectivos vectores directores tienen claramente la misma dirección, las rectas serán paralelas o coincidentes, para salir de dudas elijo un punto en la segunda recta O(0,0,0) y lo sustituyo en la primera, obtengo que no verifica su ecuación, definitivamente las rectas son paralelas

b) Para calcular la distancia entre ambas bastará con calcular la distancia del punto O(0,0,0) a la primera recta, A(3,-5,1) es un punto de la misma y $\vec{u}(2,-2,-1)$ su director; $\overrightarrow{OA}(3,-5,1)$, $\overrightarrow{OA}\times\vec{u}\left(\begin{vmatrix}-5 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 2\\ -5 & -2\end{vmatrix}\right)=(7,5,4)$, sustituyendo en la fórmula de la distancia $d(O,r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{OA}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{49+25+16}}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{\sqrt{90}}{\sqrt{9}}=\sqrt{10}$

25.- Determina el ángulo que forma una diagonal de una cara de un cubo con la diagonal de una cara adyacente que tiene un extremo común con la anterior.

Para facilitar los cálculos supondremos que el cubo descansa con uno de sus vértices en el origen, y que sus aristas son de longitud la unidad, deteminaremos ese ángulo como el que forman, por ejemplo, la diagonal de la cara que descansa en el plano $x=0$ con la diagonal de la cara que descansa en el plano $z=0$: la primera diagonal está contenida en la recta que une el origen de coordenadas con el punto A(0,1,1), es decir $r:(x,y,z)=(0,0,0)+\boldsymbol{l}(0,1,1)$, del mismo modo, la segunda diagonal pertenecerá a la recta que une el origen con el punto B(1,1,0)

$s:(x,y,z)=(0,0,0)+m(1,1,0)$, el ángulo que forman estas rectas coincide con el que determinan sus directores

$$\cos\boldsymbol{a}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{0+1+0}{\sqrt{0+1+1}\cdot\sqrt{1+1+0}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\boldsymbol{a}=60º$$

26.- Dado el plano $\boldsymbol{p}:3x+2y-5z+3=0$ y el punto A(2,1,-1), calcula: a) La distancia de A al plano. b) Las coordenadas del punto A' en el plano cuya distancia al punto A coincida con la distancia de A al plano.

a) $d(A,\boldsymbol{p})=\dfrac{|3\cdot 2+2\cdot 1+5\cdot 1+3|}{\sqrt{9+4+25}}=\dfrac{16}{\sqrt{38}}$

b) El punto A´es la proyección ortogonal del punto A en el plano $\boldsymbol{p}$, para calcularlo cortaremos la recta perpendicular al plano en el punto A con dicho plano $r:(x,y,z)=(2,1,-1)+\boldsymbol{l}(3,2,-5)\Rightarrow 3(2+3\boldsymbol{l})+2(1+2\boldsymbol{l})-5(-1-5\boldsymbol{l})+3=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 6+9\boldsymbol{l}+2+4\boldsymbol{l}+5+25\boldsymbol{l}+3=0\Rightarrow 16+38\boldsymbol{l}=0\Rightarrow\boldsymbol{l}=-8/19\Rightarrow A´(14/19,3/19,21/19)$

27.- Calcula el ángulo que forma la diagonal de un cubo con una de sus caras laterales.

Consideramos el mismo cubo del ejercicio 25:

La diagonal del cubo estará contenida en la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto P(1,1,1), el director de esa recta es $\vec{u}(1,1,1)$, de modo que la recta es $r:(x,y,z)=\boldsymbol{l}(1,1,1)$, una de las caras laterales del cubo podría ser, por ejemplo la que se apoya en el plano $z=0$, bastará con calcular el ángulo que forma la recta con el plano

$$\vec{u}(1,1,1),\ \vec{N}(0,0,1)\Rightarrow \mathrm{sen}\,\boldsymbol{a}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{N}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{N}|}=\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\boldsymbol{a}\approx 35º15´51´´$$

28.- Averiguar si el plano $\boldsymbol{p}:2x+5y+7z=-3$ contiene a la recta $r:(3,7-4\boldsymbol{l},5+2\boldsymbol{l})$.

En primer lugar estudiaremos la posición entre los vectores $\vec{u}(0,-4,2)$ y $\vec{N}(2,5,7)$

$\vec{u}\cdot\vec{N}=0-20+14=-6\neq 0\Rightarrow$ la recta corta al plano en un punto, pero no está contenida en el mismo, podría haberse empezado probando si un punto de la recta, por ejemplo P(3,7,5), pertenece al plano, enseguida se averigua que P no verifica la ecuación del plano

29.- Determinar la longitud del segmento de la recta $r:\begin{cases}x+3y-z=0\\ 2y-z+1=0\end{cases}$ comprendido entre los planos $\boldsymbol{p}:2x+z=2$ y $\boldsymbol{r}:x+y+5=0$.

Comenzaremos expresando la recta en otro modo: El menor de orden dos formado por los coeficientes de *x* y *z* en las ecuaciones implícitas de la recta es no nulo, en efecto, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow$ haciendo $y = \lambda$ obtenemos $z = 1 + 2\lambda$ en la segunda ecuación y $x = 1 - \lambda$ en la primera ecuación, $r : (x, y, z) = (1,0,1) + \lambda(-1,1,2)$, continuaremos estudiando la posición de la recta con cada plano, empezando por $\pi \Rightarrow \vec{u}(-1,1,2)$, $\vec{N}(2,0,1) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{N} = -2 + 0 + 2 = 0 \Rightarrow r$ es paralela o está contenida en el plano π , para salir de dudas elijo un punto de la recta A(1,0,1) y lo sustituyo en la ecuación del plano $2 + 1 \neq 2 \Rightarrow$ la recta es paralela al plano, sigo con el otro plano $\vec{u}(-1,1,2)$, $\vec{N'}(1,1,0) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{N'} = -1 + 1 = 0 \Rightarrow r$ es paralela o está contenida en el plano ρ , sustituyendo A(1,0,1) en la ecuación del plano obtenemos: $1 + 0 + 5 \neq 0 \Rightarrow$ la recta es paralela también al plano ρ , en ese caso la totalidad de la recta está comprendida entre los planos, la longitud del segmento pedido sería ∞ , en este tipo de ejercicos lo que suele suceder es que la recta corta a ambos planos en sendos puntos A y B, el segmento pedido sería la distancia entre esos dos puntos

30.- Determinar la longitud del segmento de la recta $r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ comprendido entre los planos $\pi : 3x + z = 5$ y $\rho : x - y - 2 = 0$.

Actuando en la misma línea que el ejercicio anterior: $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow y = 2\lambda$ y $z = 1 + \lambda$

$r : (x, y, z) = (0,0,1) + \lambda(1,2,1)$, sigo con la posición entre la recta y el plano π

$\vec{u}(1,2,1)$, $\vec{N}(3,0,1) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{N} = 3 + 0 + 1 = 4 \neq 0 \Rightarrow r$ corta al plano en un punto, lo determinaremos

$3\lambda + 1 + \lambda = 5 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow P(1,2,2)$ es el corte entre la recta *r* y el plano π , continuemos con la recta y el otro plano

$\vec{u}(1,2,1)$, $\vec{N'}(1,-1,0) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{N'} = 1 - 2 + 0 = -1 \neq 0 \Rightarrow r$ corta al plano en un punto, lo determinaremos

$\lambda - 2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow Q(-2,-4,-1)$ es el corte entre la recta y el plano ρ

$d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{9 + 36 + 9} = \sqrt{54}$ es la longitud del segmento de la recta *r* comprendido entre los planos dados

31.- Estudiar la intersección de los planos en cada caso señalando si es vacía, si se trata de un punto, de una recta u otra figura:

a) $\pi : x - y + z = 0$, $\rho : 3x + 2y - 2z = 1$, $\mu : 5x = 1$

b) $\pi : 2x + y = 5$, $\rho : x - 3z = 4$, $\mu : 4x + y - 6z = 10$.

a) Estudiemos el rango de la matriz ampliada asociada al sistema de ecuaciones formado por los tres planos

$$(A \vdots B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 3 & 2 & -2 & \vdots & 1 \\ 5 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ -2 & 3 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 5 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 5 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 5 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 5 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rango(A) = 2 = Rango(A \vdots B) \Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado, los planos son secantes y distintos , o bien, dos coincidentes y uno secante, esta última posibilidad se descarta observando las ecuaciones, no hay dos proporcionales, se cortan por tanto en una recta cuya ecuación se obtiene fácilmente: $y = 1/5$, haciendo $z = \lambda \Rightarrow x = y + z = 1/5 + \lambda$

$r : (x, y, z) = (1/5,1/5,0) + \lambda(1,0,1)$

b)Repitiendo el proceso

$$(A \vdots B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \vdots & 5 \\ 1 & 0 & -3 & \vdots & 4 \\ 4 & 1 & -6 & \vdots & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 4 \\ 1 & 4 & -6 & \vdots & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 4 \\ 0 & 2 & -6 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rango(A) = 2 \neq Rango(A \vdots B) = 3 \Rightarrow$ El sistema es incompatible, los planos se cortan dos a dos formando una superficie prismática, o bien, dos de los planos son paralelos y el otro los corta, esta última posibilidad se descarta observando las ecuaciones, no hay dos proporcionales, se cortarán dos a dos formando una superficie prismática

32.- Determina razonadamente la ecuación de todos los planos que contienen a la recta $r : (\lambda, \lambda, \lambda)$ y son paralelos a la recta $s : (1 + 2\mu, 2\mu, -1 + 2\mu)$.

Comenzaremos estudiando la posición entre las dos rectas, sus vectores directores $\vec{u}(1,1,1)$ y $\vec{v}(2,2,2)$ son proporcionales, las rectas serán paralelas o coincidentes, la recta r pasa por el origen de coordenadas O(0,0,0), la recta s no, son por tanto paralelas, en ese caso cualquier plano que pertenezca al haz de planos secantes que determina la recta *r* salvo aquél que también contenga a la recta *s* será paralelo a la recta *s*

Para determinar la ecuación del haz de planos que determina *r* comenzamos expresando la recta en forma paramétrica

$r:\begin{cases}x=l\\ y=l\\ z=l\end{cases}$ restando por parejas se obtienen las ecuaciones implícitas de la recta $r:\begin{cases}x-y=0\\ y-z=0\end{cases}$ por ejemplo, la ecuación del haz de planos es $a(x-y)+b(y-z)=0\Rightarrow ax+(-a+b)y-bz=0$, de los infinitos planos que contiene el haz hay que excluir aquél que contiene a la recta *s*, es decir, aquél que pase por el punto P(1,0,-1), sustituyendo en la ecuación del haz obtenemos $a+b=0\Rightarrow a=-b\Rightarrow -bx+2by-bz=0\Rightarrow -x+2y-z=0$ será el plano a excluir del haz

33.- Hallar la posición relativa de los planos siguientes:
$p: 2x-y+3z=11$, $r: x+y-z=6$, $u: x-5y+9z=4$.
Estudiemos el rango de la matriz ampliada asociada al sistema de ecuaciones formado por los tres planos

$$(A\vdots B)=\begin{pmatrix}2&-1&3&\vdots&11\\1&1&-1&\vdots&6\\1&-5&9&\vdots&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&3&2&\vdots&11\\1&-1&1&\vdots&6\\-5&9&1&\vdots&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&3&2&\vdots&11\\0&2&3&\vdots&17\\0&-6&-9&\vdots&-51\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&3&2&\vdots&11\\0&2&3&\vdots&17\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$\Rightarrow Rango(A)=2=Rango(A\vdots B)\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado, los planos son secantes y distintos , o bien, dos coincidentes y uno secante, esta última posibilidad se descarta observando las ecuaciones, no hay dos proporcionales, se cortan por tanto en una recta cuya ecuación se obtiene fácilmente: $x=l$, $z=17/2-3l/2$, $y=3z+2x-11=29/2-5l/2$
$r:(x,y,z)=(0,29/2,17/2)+l(2,-5,-3)$, obérvese que el vector director elegido ha sido un múltiplo del original para evitar fracciones

34.- Dados los puntos P(1,3,-2) y Q(2,3,5), hallar *m* y *n* para que el punto R(*m*+1,3, *n*) esté alineado con los otros dos.
Así será siempre que R pertenezca a la recta que pasa por los puntos P y Q
$\dot{PQ}(1,0,7)\Rightarrow r:(x,y,z)=(1,3,-2)+l(1,0,7)$, si sustituyo el punto R en esa recta obtenemos

$$\begin{matrix}m+1=1+l\\ 3=3\\ n=-2+7l\end{matrix}$$

$\Rightarrow$ despejando y eliminando l en la primera y tercera ecuaciones obtengo $m=\frac{n+2}{7}$, ecuación con infinitas soluciones, que verifican curiosamente todos los puntos de la recta *r*, el punto R puede considerarse como una forma especial de ecuación de la recta, se observa que $y=3,\ z=n$, $x=(n+9)/7$, $s:(x,y,z)=(9/7,3,0)+n(9/7,0,1)$ es una recta que coincide con *r*

35.- Dados los planos $p: x-2z=0$, $r: y-z=1$, $u: ax+by+z=1$, hallar las condiciones que deben cumplir *a* y *b* para que se corten en un punto.
Estudiemos el rango de la matriz ampliada asociada al sistema de ecuaciones formado por los tres planos

$$(A\vdots B)=\begin{pmatrix}1&0&-2&\vdots&0\\0&1&-1&\vdots&1\\a&b&1&\vdots&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2&\vdots&0\\0&1&-1&\vdots&1\\0&b&1+2a&\vdots&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2&\vdots&0\\0&1&-1&\vdots&1\\0&0&1+2a+b&\vdots&1-b\end{pmatrix}$$

para que los planos se corten en un punto el sistema ha de ser compatible determinado y por tanto Rango(A)=3, es decir, $1+2a+b\neq 0$

36.- Sean los planos $p:(1+t)x+ty+z=0$, $r: x+2y+2z=1$, $u: x+y+z=1$, se pide:
a)Halla *t* para que se corten los tres en un mismo punto. Calcúla ese punto.
b)Caso contrario, pruébese que se cortan dos a dos según tres rectas paralelas.
a) Estudiemos el rango de la matriz ampliada asociada al sistema de ecuaciones formado por los tres planos

$$(A\vdots B)=\begin{pmatrix}1+t&t&1&\vdots&0\\1&2&2&\vdots&1\\1&1&1&\vdots&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\1&2&2&\vdots&1\\1+t&t&1&\vdots&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\2&1&2&\vdots&1\\1&1+t&t&\vdots&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\0&-1&0&\vdots&-1\\0&t&t-1&\vdots&-1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\0&-1&0&\vdots&-1\\0&0&t-1&\vdots&-1-t\end{pmatrix}$$

Si $t\neq 1\Rightarrow Rango(A)=3\Rightarrow$ Los tres planos se cortan en un punto, lo calcularemos

En la segunda fila se obtiene $x=1$, en la tercera fila obtenemos $y=\dfrac{-1-t}{t-1}$, sustituyendo en la primera $z=\dfrac{1+t}{t-1}$, luego el punto de corte de los tres planos es $P(1,\dfrac{-1-t}{t-1},\dfrac{1+t}{t-1})$

b)Si $t=1 \Rightarrow Rango(A)=2 \neq Rango(A\vdots B)=3 \Rightarrow$ El sistema es incompatible, los planos se cortan dos a dos formando una superficie prismática, o bien, dos de los planos son paralelos y el otro los corta, esta última posibilidad se descarta observando las ecuaciones, no hay dos proporcionales, se cortarán dos a dos formando una superficie prismática, comprobemos que las rectas son paralelas dos a dos

$\boldsymbol{p}: 2x+y+z=0$, $\boldsymbol{r}: x+2y+2z=1$, $\boldsymbol{u}: x+y+z=1$

Corte entre los dos primeros: Si al doble de la primera ecuación se le resta la segunda obtengo $3x=-1 \Rightarrow x=-1/3$, haciendo $z=\boldsymbol{l}$ y sustituyendo en la primera obtengo $y=-2x-z=2/3-\boldsymbol{l}$, la intersección entre los dos primeros planos es la recta $r:(x,y,z)=(-1/3,2/3,0)+\boldsymbol{l}(0,-1,1)$

Corte entre el primero y el tercero: Si a la primera ecuación se le resta la tercera obtengo $x=-1$, haciendo $z=m$ y sustituyendo en la primera obtengo $y=-2x-z=2-m$, la intersección entre el primer y tercer plano es la recta $s:(x,y,z)=(-1,2,0)+m(0,-1,1)$

Corte entre el segundo y el tercero: Si al doble del tercero le resto el segundo obtengo $x=1$, haciendo $z=\boldsymbol{n}$ y sustituyendo en la tercera obtengo $y=1-x-z=-\boldsymbol{n}$, la intersección entre el segundo y tercer plano es la recta $t:(x,y,z)=(1,0,0)+\boldsymbol{n}(0,-1,1)$

Sin duda se trata de tres rectas paralelas entre sí

37.- Halla la posición relativa de los planos $\boldsymbol{p}: x-2y+z-3=0$, $\boldsymbol{r}: 2x-ay+2z+b=0$ para los diferentes valores de *a* y de *b*.

Estudiemos el rango del sistema de ecuaciones

$$(A\vdots B)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \vdots & 3\\ 2 & -a & 2 & \vdots & -b\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \vdots & 3\\ 0 & 4-a & 0 & \vdots & -b-6\end{pmatrix}$$

Si $a\neq 4 \Rightarrow Rango(A)=2=Rango(A\vdots B) \Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado, los planos se cortan en una recta

Si $a=4$ y $b=-6 \Rightarrow Rango(A)=1=Rango(A\vdots B) \Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado, los planos son coincidentes

Si $a=4$ y $b\neq -6 \Rightarrow Rango(A)=1\neq Rango(A\vdots B)=2 \Rightarrow$ El sistema es incompatible, los planos son paralelos

38.- Prueba que una recta pasa por el origen si y sólo si las coordenadas de uno cualquiera de sus puntos son proporcionales a las componentes de su vector director.

La ecuación de una recta que pasa por el origen puede expresarse $r:(x,y,z)=\boldsymbol{l}(u_1,u_2,u_3)$, las coordenadas de uno de sus puntos se obtienen fijando el valor de $\boldsymbol{l}$, es decir $A(\boldsymbol{l}u_1,\boldsymbol{l}u_2,\boldsymbol{l}u_3)$ es un punto genérico de esa recta, sus coordenadas son claramente proporcionales a las componentes del vector director de la recta

39.- Discútanse las posiciones de los siguientes planos según los valores del parámetro *k*:

$\boldsymbol{p}: x-2y+z=1/2$, $\boldsymbol{r}: -x+3y-5z=-2$, $\boldsymbol{u}: 5x-11y+9z=k$.

Estudiemos el rango del sistema asociado

$$(A\vdots B)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \vdots & 1/2\\ -1 & 3 & -5 & \vdots & -2\\ 5 & -11 & 9 & \vdots & k\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \vdots & 1/2\\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -3/2\\ 0 & -1 & 4 & \vdots & k-5/2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \vdots & 1/2\\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -3/2\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & k-4\end{pmatrix}$$, Rango(A)=2

Si $k=4 \Rightarrow Rango(A\vdots B)=Rango(A)=2 \Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado, los planos son secantes y distintos , o bien, dos coincidentes y uno secante, esta última posibilidad se descarta observando las ecuaciones, no hay dos proporcionales, se cortan por tanto en una recta

Si $k\neq 4 \Rightarrow Rango(A\vdots B)=3\neq Rango(A)=2 \Rightarrow$ El sistema es incompatible, los planos se cortan dos a dos formando una superficie prismática, o bien, dos de los planos son paralelos y el otro los corta, esta última posibilidad se descarta observando las ecuaciones, no hay dos proporcionales, se cortarán dos a dos formando una superficie prismática

40.- La recta $r:\begin{cases}ax+y-3z=0\\ 4x-5y+z=0\end{cases}$ es arista de un haz de planos. Calcula el valor de *a* para que el plano $\boldsymbol{p}: 2x+3y-2z=0$ esté en el haz.

La ecuación del haz de planos determinado por la recta es $\boldsymbol{a}(ax+y-3z)+\boldsymbol{b}(4x-5y+z)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha a+4\beta)x+(\alpha-5\beta)y+(-3\alpha+\beta)=0$, para que el plano π pertenezca al haz deben cumplirse las ecuaciones

$\left.\begin{array}{r}\alpha a+4\beta=2\\ \alpha-5\beta=3\\ -3\alpha+\beta=-2\end{array}\right\}$ Si al triple de la segunda se le suma la tercera obtengo $-14\beta=7\Rightarrow\beta=-1/2\Rightarrow\alpha=1/2\Rightarrow a=8$

41.- Prueba que los planos $\pi: ax-2y+2z=0$ y $\rho: x+ay-az=0$ se cortan en una recta *r* que pasa por el origen, cualquiera que sea el valor de *a*.

Estudiemos el rango del sistema asociado

$$(A\vdots B)=\begin{pmatrix}a & -2 & 2 & \vdots & 0\\ 1 & a & -a & \vdots & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & a & -a & \vdots & 0\\ a & -2 & 2 & \vdots & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & a & -a & \vdots & 0\\ 0 & -2-a^2 & 2+a^2 & \vdots & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$Rango(A)=2=Rango(A\vdots B)\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado, los dos planos se cortan en una recta, la calculamos

Multiplicando por *a* la primera ecuación y por 2 la segunda y sumando obtengo $(a^2+2)x=0\Rightarrow x=0$, haciendo $z=\lambda$ y sustituyendo en la primera obtengo $2y=ax+2z=2\lambda\Rightarrow y=\lambda$, los planos se cortan en la recta

$r:(x,y,z)=\lambda(0,1,1)$ que pasa por el origen cualquiera que sea el valor de *a*

42.- Hallar el plano mediador del segmento de extremos A(5,-4,3) y B(1,-2,1).

Se trata de un plano perpendicular a dicho segmento en el punto medio del mismo

$\vec{N}=\vec{AB}(-4,2,-2)\equiv(-2,1,-1)$, $PM_{AB}(3,-3,2)$

El plano es de la forma $-2x+y-z+D=0$, sustituyendo el punto medio obtenemos finalmente

$-2x+y-z+11=0$

43.- Prueba que la distancia hasta el origen de una recta que pase por el punto P(0,0,1) es $\operatorname{sen}\alpha$, siendo α el ángulo formado por la recta y el eje OZ.

Una recta que pase por el punto P tiene ecuación $r:(x,y,z)=(0,0,1)+\lambda(u_1,u_2,u_3)$, los vectores $\vec{OP}(0,0,1)$ y $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ tienen producto vectorial $\overrightarrow{OP}\times\vec{u}\left(\begin{vmatrix}0 & u_2\\ 1 & u_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}0 & u_1\\ 1 & u_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & u_1\\ 0 & u_2\end{vmatrix}\right)=(-u_2,u_1,0)$, $\left|\overrightarrow{OP}\times\vec{u}\right|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$, $|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$,

$$d(O,r)=\frac{\left|\overrightarrow{OP}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{u_1^2+u_2^2}}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}$$

Calculemos ahora el ángulo formado por la recta y el eje OZ, la ecuación de este eje es $s:(x,y,z)=\mu(0,0,1)$, los directores de ambas rectas son los vectores $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}(0,0,1)$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{u_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\cdot 1}=\frac{u_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{u_3^2}{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}=\frac{\sqrt{u_1^2+u_2^2}}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}=d(O,r)$$

44.- Prueba la relación $\vec{u}\times(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\times\vec{v}$

$\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$, $\vec{u}+\vec{v}(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$

$$\vec{u}\times\vec{v}\left(\begin{vmatrix}u_2 & v_2\\ u_3 & v_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}u_1 & v_1\\ u_3 & v_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}u_1 & v_1\\ u_2 & v_2\end{vmatrix}\right)$$

$$\vec{u}\times(\vec{u}+\vec{v})\left(\begin{vmatrix}u_2 & u_2+v_2\\ u_3 & u_3+v_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}u_1 & u_1+v_1\\ u_3 & u_3+v_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}u_1 & u_1+v_1\\ u_2 & u_2+v_2\end{vmatrix}\right)=\left(\begin{vmatrix}u_2 & v_2\\ u_3 & v_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}u_1 & v_1\\ u_3 & v_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}u_1 & v_1\\ u_2 & v_2\end{vmatrix}\right)=\vec{u}\times\vec{v}$$

45.- Sean *r* y *s* las rectas siguientes: $r:\begin{cases}x-2y-z+2=0\\ 2x-y+z-1=0\end{cases}$, $s:(1-\lambda,2+\lambda,-1)$. Calcula:

a)El plano que pasa por *r* y es paralelo a *s*. ¿Qué particular tiene *s*?. b) El plano que pasa por el punto P(1,0,2) y es paralelo a *r* y a *s*.

a) Comenzaremos expresando la recta *r* de otro modo, el menor de orden dos correspondiente a los coeficientes de *x* y *z* en las ecuaciones implícitas es no nulo, en efecto $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+2=3$, haciendo $y = m$ obtenemos sumando las dos ecuaciones $3x-3y+3=0 \Rightarrow x=-1+m$, despejando en la segunda ecuación obtengo $z=-2x+y+1=3-m$, la recta puede expresarse $r:(x,y,z)=(-1,0,3)+m(1,1,-1)$, el plano que pasa por *r* y es paralelo a *s* tiene ecuación $p:(x,y,z)=(-1,0,3)+m(1,1,-1)+\ l(-1,1,0)$, puede comprobarse sin problemas que las rectas *r* y *s* se cruzan, pero ademas, el ángulo que forman entre sí es de noventa grados puesto que el producto escalar de sus directores es cero, se trata de dos rectas que se cruzan y que al mismo tiempo son perpendiculares entre sí

b) Expresemos el plano p en forma general

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ y & 1 & 1 \\ z-3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = z-3+y-(-z+3-x-1)=x+y+2z-5=0$$

El punto P pertenece a este plano, la idea era encontrar un plano paralelo al plano p en el punto P, el propio p es el plano deseado

46.- Estudiar la posición relativa del plano $p:2x-5y+az=-2$ y la recta $r:\begin{cases} 3x-y+2z=1 \\ x+4y+z=b \end{cases}$ según los valores de *a* y de *b*.

Expresemos la recta de otra forma, el menor de orden dos correspondiente a los coeficientes de *x* y *z* en las ecuaciones implícitas de la recta es no nulo, en efecto $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3-2=1$, haciendo $y = l$ y restando a la primera ecuación el doble de la segunda obtengo $x-9y=1-2b \Rightarrow x=1-2b+9l$, despejando en la segunda obtengo $z=b-x-4y=3b-1-13l$, la recta puede expresarse $r:(x,y,z)=(1-2b,0,3b-1)+\ l(9,1,-13)$, $\vec{u}(9,1,-13)$, $\vec{N}(2,-5,a)$, $\vec{u}\cdot\vec{N}=18-5-13a=13-13a$

Si $a \neq 1 \Rightarrow$ La recta corta al plano en un punto

Si $a=1 \Rightarrow$ La recta será paralela o estará contenida en el plano según los posibles valores de *b*, concretamente para que esté contenida tendrá que verificarse la ecuación $2(1-2b)-0+3b-1=-2 \Rightarrow 2-4b+3b-1=-2 \Rightarrow b=3$, obtenida sustituyendo en el plano un punto de la recta

47.- Sea el punto A(1,0,4), el plano $p:2x-y+3z=1$ y la recta $r:(1+2l,-8+3l,2+5l)$, trazamos una recta *s* paralela a *r* y que pase por A. Determinar el punto de intersección de la recta *s* y el plano p.

$s:(x,y,z)=(1,0,4)+m(2,3,5)$, para calcular la intersección de la recta *s* y el plano p sustituimos en el plano las ecuaciones paramétricas de la recta $2(1+2m)-3m+3(4+5m)=1 \Rightarrow 2+4m-3m+12+15m=1 \Rightarrow m=-13/16$, el punto de corte es P(-5/8,-39/16,-1/16)

48.- Probar que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son siempre los vértices de un paralelogramo.

Consideremos el cuadrilátero de vértices $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$, $D(d_1,d_2,d_3)$ cuatro puntos coplanarios del espacio tridimensional, los puntos medios de los lados son respectivamernte:

$PM_{AB}(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\frac{a_3+b_3}{2})$, $PM_{AC}(\frac{a_1+c_1}{2},\frac{a_2+c_2}{2},\frac{a_3+c_3}{2})$, $PM_{BD}(\frac{b_1+d_1}{2},\frac{b_2+d_2}{2},\frac{b_3+d_3}{2})$, $PM_{CD}(\frac{c_1+d_1}{2},\frac{c_2+d_2}{2},\frac{c_3+d_3}{2})$, ahora calculemos dos vectores

$\overrightarrow{PM_{AC}PM_{AB}}(\frac{b_1-c_1}{2},\frac{b_2-c_2}{2},\frac{b_3-c_3}{2})$, $\overrightarrow{PM_{CD}PM_{BD}}(\frac{b_1-c_1}{2},\frac{b_2-c_2}{2},\frac{b_3-c_3}{2})$, los vectores son iguales, por tanto los puntos medios del cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo

49.- Determina la ecuación de un plano p paralelo al plano que tiene por ecuación $r:x-2y+3z+6=0$ y que dista 12 del origen.

El plano buscado tendrá por ecuación $x-2y+3z+D=0$, calculeremos *D* con la condición pedida

$d(O,p)=\frac{|D|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{|D|}{\sqrt{14}}=12 \Rightarrow |D|=12\sqrt{14} \Rightarrow D=\pm 12\sqrt{14}$, son dos los planos buscados

$p:x-2y+3z+12\sqrt{14}=0$, $p':x-2y+3z-12\sqrt{14}=0$

50.- Dado un cubo de lado 6 cm. halla la mínima distancia de una diagonal del cubo a una diagonal de una de sus caras, sabiendo que las rectas de ambas diagonales se cruzan.
Consideramos el cubo con un vértice en el origen de coordenadas y sus caras apoyadas en los planos coordenados, la diagonal del cubo es la recta $r:(x,y,z)=\lambda(1,1,1)$ como se hizo en el ejercicio 27, esa recta es independiente de la arista del cubo, ahora necesito la diagonal de una de sus caras que se cruce con la recta anterior, por ejemplo la recta que una los puntos A(6,0,0) y B(0,0,6), ambos en el plano $y=0$, $\vec{AB}(-6,0,6)\equiv(-1,0,1)$, $s:(x,y,z)=(6,0,0)+\mu(-1,0,1)$, la ecuación de un plano que contenga a la recta *r* y sea paralelo a la recta *s* es $\pi:(x,y,z)=\lambda(1,1,1)+\mu(-1,0,1)$, la ecuación general de este plano se obtiene de

$\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix}=x-y-(-z+y)=x-2y+z=0$, ahora calcularemos la distancia de un punto de la recta *s* a este plano

$$d(A,\pi)=\frac{|6|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

51.- Calcula la distancia entre las rectas *r* y *s* siguientes: $r:\begin{cases} x=13+12\lambda \\ y=2 \\ z=8+\lambda \end{cases}$, $s:\begin{cases} x=6 \\ y=6+\mu \\ z=-9 \end{cases}$

Estudiemos primero su posición, los vectores directores $\vec{u}(12,0,1)$ y $\vec{v}(0,1,0)$ no son proporcionales, las rectas se cortan en un punto o se cruzan, para salir de dudas tomemos un punto en cada recta A(13,2,8) y B(6,6,-9), el vector $\vec{AB}(-7,4,-17)$ y el determinante $\begin{vmatrix} 12 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -17 \end{vmatrix}=-204+7=-197\neq 0\Rightarrow$ Las rectas se cruzan

Un plano que contenga a la recta *s* y sea paralelo a la recta *r* es $\pi:(x,y,z)=(6,6,-9)+\mu(0,1,0)+\lambda(12,0,1)$, lo expresaremos en forma general $\begin{vmatrix} x-6 & 0 & 12 \\ y-6 & 1 & 0 \\ z+9 & 0 & 1 \end{vmatrix}=x-6-12z-108=x-12z-114=0$, por último calculamos la distancia de un punto de la recta *r* a este plano $d(A,\pi)=\frac{|12-12-114|}{\sqrt{1+0+144}}=\frac{114}{\sqrt{145}}$

52.- Dos caras de un cubo están en los planos $\pi:2x-2y+z-1=0$ y $\rho:2x-2y+z-5=0$. Calcula el volumen del cubo.
Se trata de dos planos paralelos, la arista del cubo es la distancia entre estos planos, tomaremos un punto en el primero, por ejemplo A(0,0,1) y calcularemos su distancia al otro plano $d(A,\rho)=\frac{|1-5|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{4}{3}$, el volumen del cubo es $\left(\frac{4}{3}\right)^3$

53.- Da las componentes de un vector que sea perpendicular a las dos rectas $r:(2+3\lambda,-5,1+2\lambda)$ y $s:(-1+2\mu,4\mu,-3)$.
Se trata sin duda del producto vectorial de sus vectores directores $\vec{u}(3,0,2)$ y $\vec{v}(2,4,0)$

$$\vec{u}\times\vec{v}(\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix})=(-8,4,12)$$

54.- Dado el plano determinado por la recta $r:x=y=0$ y el punto A(-2,1,-1), halla la ecuación de la recta *s* que siendo perpendicular al plano, pase por el punto A. Calcula el ángulo que forma *s* con la recta $t:x-y=x+y=z+1$.
Expresemos la recta *r* en otra forma $r:(x,y,z)=\lambda(0,0,1)$, el plano determinado por la recta *r* y el punto A es $\pi:(x,y,z)=\lambda(0,0,1)+\mu(-2,1,-1)$, donde el segundo director es el vector que une el origen de coordenadas con el punto A

el plano en forma general es $\begin{vmatrix} x & 0 & -2 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2y - x = 0$, $\pi : x + 2y = 0$, una recta perpendicular al plano tiene como director al vector normal al plano, la recta es por tanto $s : (x, y, z) = (-2,1,-1) + \alpha(1,2,0)$

Ahora toca expresar la recta *t* de otro modo

$\begin{array}{l} x - y = x + y \Rightarrow y = 0 \\ x + y = z + 1 \Rightarrow x + y - z - 1 = 0 \end{array}$ haciendo $z = \beta$ obtenemos $x = z + 1 = 1 + \beta$, la recta es $t : (x, y, z) = (1,0,0) + \beta(1,0,1)$, nos queda calcular el ángulo que forman las rectas *s* y *t*, se trata del que forman entre sí sus vectores directores $\vec{u}(1,2,0)$ y $\vec{v}(1,0,1)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{1+0+0}{\sqrt{1+4+0}\cdot\sqrt{1+0+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \theta \approx 71^{\circ}33'54''$$

55.- Determina las condiciones que deben cumplir *a* y *b* para que los tres planos $\pi : ax + z - 1 = 0$, $\rho : x + bz + 2 = 0$, $\upsilon : \sqrt{5}x + 3y + 2z - 3 = 0$ se corten en un punto. Haciendo $a = 2$ y $b = 1$, obtén la ecuación continua de la recta determinada por los dos primeros, así como el ángulo que ésta forma con el tercero.

Los tres planos se cortarán en un punto en el caso de que la matriz de coeficientes del sistema asociado tenga determinante no nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ \sqrt{5} & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 3ab \neq 0 \Leftrightarrow ab \neq 1$$

Haciendo $a = 2$ y $b = 1$, $\pi : 2x + z - 1 = 0$, $\rho : x + z + 2 = 0$, la recta determinada por estos planos se obtiene restando ambas ecuaciones $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow z = -5,\ y = \lambda$ la recta es $r : \dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+5}{0}$, el ángulo que forma esta recta con el tercer plano se obtiene de $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{0\cdot\sqrt{5} + 1\cdot 3 + 0\cdot 2}{\sqrt{0+1+0}\cdot\sqrt{5+9+4}} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^{\circ}$

56.- Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es P(-1,2,3).

Se trata de un plano perpendicular al vector que une el origen con P en dicho punto

$\vec{OP}(-1,2,3) = \vec{N}$, el plano es del tipo $-x + 2y + 3z + D = 0$, calculamos *D* sustituyendo el punto P

$\pi : -x + 2y + 3z - 14 = 0$

57.- Determina la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es P(1,3,2).

Igual al anterior $x + 3y + 2z + D = 0 \Rightarrow \pi : x + 3y + 2z - 14 = 0$

58.- Calcular: a) El plano que pasa por P(3,2,1) y Q(3,1,-5) y es perpendicular al plano $\pi : 6x + 7y + 2z = 10$

b)El plano que pasa por R(1,-2,-1) y S(2,5,6) y es paralelo al eje OX

c) El plano que pasa por A(2,2,1) y contiene a la recta $r : (2\lambda, 4 - \lambda, 0)$.

a) Uno de los vectores directores del plano será $\vec{PQ}(0,-1,-6)$, el otro será el vector normal del plano π , $\vec{N}(6,7,2)$

El plano pedido es $(x, y, z) = (3,2,1) + \lambda(0,-1,-6) + \mu(6,7,2)$

b) La ecuación del eje OX es $s : (x, y, z) = \nu(1,0,0)$, su director será uno de los directores del plano, el otro será el vector $\vec{RS}(1,7,7)$, el plano es $(x, y, z) = (1,-2,-1) + \alpha(1,0,0) + \beta(1,7,7)$

c) B(0,4,0) es un punto de la recta *r*, el vector $\vec{AB}(-2,2,-1)$ es uno de los directores del plano pedido, el otro será el director de la recta *r*, de modo que el plano es $(x, y, z) = (2,2,1) + \delta(-2,2,-1) + \varepsilon(2,-1,0)$

59.- Hallar la ecuación del plano que pasa por P(2,1,-1) y Q(-3,0,2) y es perpendicular al plano que proyecta ortogonalmente la recta PQ sobre el plano $\pi : z = 0$.

El plano buscado es perpendicular al plano π , de modo que el vector de este plano será uno de los directores del plano buscado, el otro será el vector $\vec{PQ}(-5,-1,3)$, el plano deseado es $(x, y, z) = (2,1,-1) + \lambda(0,0,1) + \mu(-5,-1,3)$

60.- Hallar la ecuación de la recta *r* que pasa por P(3,-1,0), es coplanaria con la recta $s:(2\lambda,1-2\lambda,5\lambda)$ y paralela al plano $\pi:-3x+y-4z+4=0$.

El plano al que pertenecen las rectas *r* y *s* es también el plano que pasa por el punto P y contiene a la recta *s*, Q(0,1,0) es un punto de la recta *s* , $\dot{PQ}(-3,2,0)$ es uno de los directores del plano, el otro es el director de la recta *s*, el plano buscado es $\rho(x,y,z)=(0,1,0)+\alpha(-3,2,0)+\beta(2,-2,5)$, lo pasamos a forma general y obtenemos

$$\begin{vmatrix} x & -3 & 2 \\ y-1 & 2 & -2 \\ z & 0 & 5 \end{vmatrix}=10x+6z-(4z-15y+15)=10x+15y+2z-15=0$$

, el vector director de la recta que buscamos es perpendicular a los vectores normales de los planos π y ρ , su producto vectorial será por tanto el vector deseado

$\vec{N}(-3,1,-4)$, $\vec{M}(10,15,2)$, $\vec{N}\times\vec{M}\left(\begin{vmatrix} 1 & 15 \\ -4 & 2 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} -3 & 10 \\ -4 & 2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -3 & 10 \\ 1 & 15 \end{vmatrix}\right)=(62,-34,-55)$

la recta pedida es $(x,y,z)=(3,-1,0)+\mu(62,-34,-55)$

61.- Calcula el ángulo que forman entre si las rectas $r:\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=4-\lambda \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x-3y+z+2=0 \\ 4x+2y-3z+1=0 \end{cases}$

Comenzaremos expresando la recta *s* de otro modo: el menor de orden dos correspondiente a los coeficientes de *x* y *z* en las ecuaciones implícitas de la recta es no nulo, en efecto $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-3-4=-7$, haciendo $y=\mu$ y sumando al triple de la primera ecuación la segunda obtenemos $7x-7y+7=0\Rightarrow x=-1+\mu$, despejando en la primera $z=-2-x+3y=-1+2\mu$

la recta es $s:(x,y,z)=(-1,0,-1)+\mu(1,1,2)$, el ángulo pedido se obtiene de

$$\cos\alpha=\frac{3\cdot1+2\cdot1-1\cdot2}{\sqrt{9+4+1}\cdot\sqrt{1+1+4}}=\frac{3}{\sqrt{84}}\Rightarrow\alpha\approx70^{o}53'36''$$

62.- Calcular el ángulo que forman entre si el plano que pasa por los puntos A(1,-2,1), B(3,1,2), C(-1,5,1) y el plano $\pi:(1+2\lambda+\mu,2-\lambda+2\mu,-1+3\lambda+\mu)$.

Habrá que expresar ambos planos en forma general, empezemos por el que pasa por los puntos A, B, y C

$\dot{AB}(2,3,1)$, $\dot{AC}(-2,7,0)$, $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -2 \\ y+2 & 3 & 7 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=14z-14-2y-4-(-6z+6+7x-7)=-7x-2y+20z-17=0$

Sigo con π , $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y-2 & -1 & 2 \\ z+1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-x+1+4z+4+3y-6-(-z-1+2y-4+6x-6)=-7x+y+5z+10=0$

$$\cos\alpha=\frac{-7\cdot(-7)-2\cdot1+20\cdot5}{\sqrt{49+4+400}\cdot\sqrt{49+1+25}}=\frac{147}{\sqrt{33975}}\Rightarrow\alpha\approx37^{o}6'24''$$

63.- Calcular el ángulo que forman entre si la recta $r:(2-3\lambda,1+2\lambda,4-\lambda)$ y el plano $\pi:3x-8y+z+5=0$.

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{-3\cdot3+2\cdot(-8)-1\cdot1}{\sqrt{9+4+1}\cdot\sqrt{9+64+1}}=\frac{-26}{\sqrt{1036}}\Rightarrow\alpha\approx-53^{o}52'46''$$

64.- Determinar la posición de las siguientes rectas calculando el punto de corte en su caso, así como el ángulo que forman entre si

a) $r:(2+4\lambda,3,1-\lambda)$ y $s:(2+2\mu,3+2\mu,1+\mu)$

b) $r:(3\lambda,2-\lambda,-1+\lambda)$ y $s:(1+4\mu,-2+\mu,3-3\mu)$.

a) Sus directores $\vec{u}(4,0,-1)$ y $\vec{v}(2,2,1)$ no son proporcionales, entonces las rectas se cortarán en un punto o se cruzarán A(2,3,1) y B(2,3,1) son puntos de la primera y segunda recta, son iguales, por tanto las rectas se cortarán en ese punto

$$\cos \boldsymbol{a} = \frac{4\cdot 2 + 0\cdot 2 - 1\cdot 1}{\sqrt{16+0+1}\cdot\sqrt{4+4+1}} = \frac{7}{\sqrt{153}} \Rightarrow \boldsymbol{a} \approx 55^{\circ}32'2''$$

b) Sus directores $\vec{a}(3,-1,1)$ y $\vec{b}(4,1,-3)$ no son proporcionales, entonces las rectas se cortarán en un punto o se cruzarán

C(0,2,-1) y D(1,-2,3) son puntos de la primera y segunda recta, $\vec{CD}(1,-4,4)$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 16 + 3 - (1 - 16 + 36) = -1 - 21 = -22 \neq 0 \Rightarrow \text{Las rectas se cruzan}$$

$$\cos \boldsymbol{b} = \frac{3\cdot 4 - 1\cdot 1 + 1\cdot(-3)}{\sqrt{9+1+1}\cdot\sqrt{16+1+9}} = \frac{8}{\sqrt{286}} \Rightarrow \boldsymbol{b} \approx 61^{\circ}46'3''$$

65.- Dadas las rectas $r: \begin{cases} x - 2z - p = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - 2z - q = 0 \end{cases}$

a) Estudiar la condición que deben cumplir *p* y *q* para que sean coplanarias
b) Determinar *p* y *q* para que el plano pase por el punto P(1,1,1).
Expresemos primero las rectas de otro modo
En la recta *r*, haciendo $z = \boldsymbol{l}$ obtenemos $x = p + 2\boldsymbol{l}$, $y = 3 - \boldsymbol{l}$, $r: (x, y, z) = (p,3,0) + \boldsymbol{l}(2,-1,1)$
En la recta *s*, haciendo $z = \boldsymbol{m}$ obtenemos $x = 1 - \boldsymbol{m}$, $y = q + 2\boldsymbol{m}$, $s: (x, y, z) = (1, q,0) + \boldsymbol{m}(-1,2,1)$
a) Los vectores directores de las rectas no son proporcionales, éstas se cortarán en un punto o se cruzarán

A(p,3,0) y B(1,q,0) son puntos de *r* y *s*, respectivamente $\vec{AB}(1 - p, q - 3,0)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1-p \\ -1 & 2 & q-3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -q + 3 - 1 + p - (2 - 2p + 2q - 6) = 3p - 3q + 6 = 0 \Rightarrow p - q + 2 = 0$$ para que sean coplanarias, en otro caso se cruzarían

b) Calculemos la ecuación del plano que contiene a ambas rectas, se trata del plano que contiene a una de ellas, por ejemplo la primera y es paralelo a la segunda

$\boldsymbol{p}: (x, y, z) = (p,3,0) + \boldsymbol{l}(2,-1,1) + \boldsymbol{m}(-1,2,1)$, expresemos ese plano en forma general

$$\begin{vmatrix} x-p & 2 & -1 \\ y-3 & -1 & 2 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x + p + 4z - y + 3 - (z + 2y - 6 + 2x + 2p) = -3x - 3y + 3z + 9 - p = 0$$, ahora le impondremos que pase por el punto P(1,1,1) $\Rightarrow -3 - 3 + 3 + 9 - p = 0 \Rightarrow p = 6$ y $q = 8$

66.- Se consideran las rectas $r: \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$ y $s: (2 + 3\boldsymbol{l}, -1 + 2\boldsymbol{l}, a\boldsymbol{l})$. Calcular *a* para que exista un plano que contenga a *r* y sea perpendicular a *s*. Calcular en tal caso dicho plano.
Se tratará de un plano que pertenezca al haz de planos determinado por la recta *r* y sea perpendicular a la recta *s*
Comenzaremos por encontrar la ecuación del haz de planos definido por la recta *r*

$\boldsymbol{a}(x - y + z - 1) + \boldsymbol{b}(2x + y - z - 2) = 0 \Rightarrow (\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})x + (-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})y + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})z - \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} = 0$, para que un plano del haz sea perpendicular a la recta *s* debe suceder que su vector normal sea paralelo al director de la recta, de modo que

$\dfrac{\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}}{3} = \dfrac{-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2} = \dfrac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}}{a}$, de la primera igualdad se deduce $2\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{b} = -5\boldsymbol{a} \Rightarrow$

$-9\boldsymbol{a}x - 6\boldsymbol{a}y + 6\boldsymbol{a}z + 9\boldsymbol{a} = 0 \Rightarrow -9x - 6y + 6z + 9 = 0$ es el plano buscado, ahora podemos calcular el valor de *a*

$$\frac{-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2} = \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}}{a} \Rightarrow \frac{-6}{2} = \frac{6}{a} \Rightarrow a = -2$$

67.- Hallar la recta que pasa por el punto P(1,0,1) y se apoya en las rectas *r* y *s* siguientes:
r es la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $\boldsymbol{p}: x + y + z - 1 = 0$
s es la recta intersección de los planos $\boldsymbol{r}: x - y + 1 = 0$ y $\boldsymbol{u}: x + 2y + z = 0$.
Comenzaremos calculando las rectas *r* y *s*

$r:(x,y,z)=\lambda(1,1,1)$

Haciendo $y=\mu$ obtenemos $x=-1+\mu$, $z=-x-2y=1-3\mu$

$s:(x,y,z)=(-1,0,1)+\mu(1,1,-3)$

La recta que buscamos se obtiene como intersección entre dos planos, el que pasa por P y contiene a la recta *r* y el que pasa por P y contiene a la recta *s*

$O(0,0,0)$ es un punto de *r*, $\vec{OP}(1,0,1)$, $(x,y,z)=(1,0,1)+\alpha(1,1,1)+\beta(1,0,1)$ es uno de los dos planos

$A(-1,0,1)$ es un punto de *s*, $\vec{AP}(2,0,0)$, $(x,y,z)=(1,0,1)+\delta(1,1,-3)+\varepsilon(2,0,0)$ es el otro, los expresaremos en forma general y acaberemos calculando la recta intersección de ambos

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ z-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x-1+y-(z-1+y)=x-z=0, \quad \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y & 1 & 0 \\ z-1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -6y-(2z-2)=-6y-2z+2=0$$

haciendo $y=\nu$ obtenemos $z=1-3\nu$, $x=1-3\nu$, la recta buscada es $t:(x,y,z)=(1,0,1)+\nu(-3,1,-3)$

68.- Hallar la ecuación de la recta *r* que pasa por el punto P(1,1,0), es perpendicular a la recta $s:\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$ y es paralela al plano $\pi: x+y+z=0$.

Comenzamos expresando la recta *s* de otro modo: haciendo $x=\lambda$ obtenemos $y=1-2\lambda$, $z=1-x+y=2-3\lambda$

$s:(x,y,z)=(0,1,2)+\lambda(1,-2,-3)$, el vector director de la recta que buscamos es perpendicular a $\vec{u}(1,-2,-3)$ director de la recta *s* y a $\vec{N}(1,1,1)$ vector normal del plano π, calcularemos el producto vectorial de ambos vectores

$\vec{u}\times\vec{N}\left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\right)=(1,-4,3)$, la recta pedida es $r:(x,y,z)=(1,1,0)+\mu(1,-4,3)$

69.- Hallar la distancia del punto P(1,3-2)

a) a la recta $r:(-2+4\lambda,3,1-\lambda)$. b) al plano $\pi: x+y+2z=0$

a) A(-2,3,1) es un punto de la recta *r*, $\vec{AP}(3,0,-3)$, $\vec{u}(4,0,-1)$, $\vec{AP}\times\vec{u}\left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\right)=(0,-9,0)$

$$d(P,r)=\frac{|\vec{AP}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{0+81+0}}{\sqrt{16+0+1}}=\frac{9}{\sqrt{17}}$$

b) $d(P,\pi)=\dfrac{|1+3-4|}{\sqrt{1+1+4}}=0 \Rightarrow$ El punto P se encuentra en el plano π

70.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto de intersección de las rectas $r:(1-\lambda,-1+\lambda,-\lambda)$ y $s:(2+2\mu,1+\mu,2+3\mu)$. Calculemos primero el corte entre las dos rectas resolviendo

$x=1-\lambda=2+2\mu$

$y=-1+\lambda=1+\mu$ sumando las dos primeras obtenemos $0=3+3\mu \Rightarrow \mu=-1 \Rightarrow$ P(0,0,-1) es el corte de ambas

$z=-\lambda=2+3\mu$

$\vec{OP}(0,0,-1)$, $t:(x,y,z=\delta(0,0,-1)$ es la recta pedida

71.- Hallar las ecuaciones de las rectas *r* y *s* paralelas a los ejes OX e OY, respectivamente, e incidentes con el punto P(-3,4,0).

La ecuación del eje OX es $(x,y,z)=\alpha(1,0,0)$, $r:(x,y,z)=(-3,4,0)+\alpha(1,0,0)$

La ecuación del eje OY es $(x,y,z)=\beta(0,1,0)$, $s:(x,y,z)=(-3,4,0)+\beta(0,1,0)$

72.- Hallar las rectas proyección ortogonal de la recta $r:\begin{cases} x=1+\mu \\ y=2\mu \\ z=3-2\mu \end{cases}$ sobre los planos coordenados.

Empecemos con el plano OXY de ecuación $z = 0$, la recta *r* lo corta en el punto P(5/2,3,0), proyectemos ahora otro punto de la recta A(1,0,3) en el plano, la recta perpendicular al plano en A es $(x, y, z) = (1,0,3) + a(0,0,1)$, la corteremos con el plano obteniendo el punto B(1,0,0), $\vec{PB}(-3/2,-3,0) \equiv (1,2,0)$, la recta proyección de *r* es $(x, y, z) = (1,0,0) + b(1,2,0)$

Seguimos con el plano OXZ de ecuación $y = 0$, la recta *r* lo corta en el punto A(1,0,3,) proyectemos ahora otro punto de la recta C(2,2,1) en el plano, la recta perpendicular al plano en C es $(x, y, z) = (2,2,1) + d(0,1,0)$, la corteremos con el plano obteniendo el punto D(2,0,1), $\vec{AD}(1,0,-2)$, la recta proyección de *r* es $(x, y, z) = (2,0,1) + e(1,0,-2)$

Acabamos con el plano OYZ de ecuación $x = 0$, la recta *r* lo corta en el punto E(0,-2,5) proyectemos ahora otro punto de la recta A(1,0,3) en el plano, la recta perpendicular al plano en A es $(x, y, z) = (1,0,3) + t(1,0,0)$, la corteremos con el plano obteniendo el punto F(0,0,3), $\vec{EF}(0,2,-2)$, la recta proyección de *r* es $(x, y, z) = (0,0,3) + u(0,2,-2)$

73.- Hallar el plano que contiene al eje OY y forma un ángulo de $\dfrac{p}{6}$ radianes con el eje OX.

Necesito un punto P en el plano OXZ verificando que la recta que une el origen con dicho punto también forme ángulo de 30º con el eje OY, por ejemplo $P(\sqrt{3},0,1)$, acabo con el plano que contiene al eje OY y al punto P

$$(x, y, z) = l(0,1,0) + m(\sqrt{3},0,1)$$

74.- Estudiar las posiciones relativas de los siguientes planos para los posibles valores de *a*:

$p : ax + ay + z = 1$, $r : x + ay + az = 1$, $u : ax + y + az = 1$

Estudiemos el rango del sistema asociado

$$(A \vdots B) = \begin{pmatrix} a & a & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & a & a & \vdots & 1 \\ a & 1 & a & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & a & \vdots & 1 \\ a & 1 & a & \vdots & 1 \\ a & a & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & a & \vdots & 1 \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 & \vdots & 1-a \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 & \vdots & 1-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & a & \vdots & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & \vdots & 0 \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 & \vdots & 1-a \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & a & a & \vdots & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1+a-2a^2 & \vdots & 1-a \end{pmatrix}$$

Si $a = 1 \Rightarrow Rango(A) = 1 = Rango(A \vdots B) \Rightarrow$ Los tres planos son coincidentes

Si $a = -1/2 \Rightarrow Rango(A) = 2 \neq Rango(A \vdots B) = 3 \Rightarrow$ Los planos se cortan dos a dos formando una superficie prismática o bien, dos son paralelos y el otro los corta, esta posibilidad se descarta puesto que no hay dos planos proporcionales, se trata entonces de tres planos que se cortan dos a dos formando una superficie prismática

Si $a \neq 1$ y $a \neq -1/2 \Rightarrow Rango(A) = 3 = Rango(A \vdots B) \Rightarrow$ Los planos se cortan en un punto