Tema2

1.- Sea $f(x)=3-2x$, demuestra que: $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=5$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$

2.- Sea $f(x)=\dfrac{x+4}{2x-5}$, demuestra que: $\lim\limits_{x\to 2{'}5^{+}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2{'}5^{-}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)=1/2$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=7$, prueba que es falso que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=6$

3.- Sea $f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x<0 \\ x-1 & si\, 0\le x\le 1 \\ 4-4x & si\, 1<x\le 2 \end{cases}$, demuestra que: $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 0^{-}} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 0^{+}} f(x)=-1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 2^{-}} f(x)=-4$; prueba que no existen: $\lim\limits_{x\to 2^{+}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

4.- Calcula los siguientes límites:

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{x-4}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^2-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{(x+2)(x-3)}-x\right)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}8x}{4x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tag8x}{4x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}14x}{7x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{\operatorname{sen}^3 x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot arc\ \ tagx}{\cos x\cdot \operatorname{sen}(2x)^2}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}5x}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}7x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos\frac{2h+x}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x^2}{4x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\operatorname{sen}\frac{x}{3}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{x-4}$, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(4x-3)\cdot(x^2+1)$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-8}{(x+2)^3}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2x^2+x}{x^2-x}$, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{x^3+2}{(2x+1)^2}$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+1}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 2^{-}}\dfrac{2-x}{\sqrt{4-x^2}}$, $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{6}{x^2-2x-8}-\dfrac{1}{x-4}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2+2}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+2}{x+1}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(3x+1)^3-(3x-1)^3}{3x^2+1}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^3-5x+1}{x^2-3x+2}$, $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{x^2-9x}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)^2}{x^2-1}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{\frac{x^2-3}{5x}}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{5x-3}{5x+6}\right)^{2x+4}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{5x}{2x^2+3}\right)^{\frac{2x^2+5}{3x+1}}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x^4-8x+1}{3x^4+x^3+2}\right)^{\frac{x^2+1}{2x-3}}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+2}-\dfrac{2x^2-x}{x+3}\right)$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+\sqrt{x^2+1}}{3x+1}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{3x^2+x}{x^2+2}}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^3+8}-\sqrt{2x^2+4}\right)$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+100}-\sqrt{x+1}\right)$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{2x+\sqrt{x}}-\sqrt{2x-\sqrt{x}}\right)$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{4x-2}{x-5}+3x+8\right)$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{8x^2+x}{2x^2+6}-\dfrac{3x+2}{x+7}\right)$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+5}-7x}{4x-2}$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+2}}$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-4x^2+3x-6}{2x^3-x^2-8x+4}$, $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^3+x+5}{3x^4-x-4}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{13}-1}{x^{12}-1}$, $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+9}{x^2-9}-\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}\right)$

Tema2

1.- Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

2.- Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \log(\cos x)$ en el intervalo [0,2]

3.- ¿Cuáles son los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2} \cdot tag \quad x$?

4.- Estudiar la continuidad en R de la función $f(x) = tag\left(x^2 - 5x + 4\right)$

5.- Estudiar la continuidad de la función $f(x) = E[x]$ (parte entera)

6.- Estudiar la continuidad de la función $f(x) = x^2 \cdot E[x]$

7.- Estudiar la continuidad de la función $f(x) = x - E[x] = D[x]$ (parte decimal)

8.- Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

9.- Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{\log\left(x^2 - 3x + 2\right)}{\log\left(x^2 - 7x + 12\right)}$

10.- Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{\operatorname{sen} \pi x}$, $x \in (0,1)$; definir f(0) y f(1) de forma que la función sea continua en el intervalo [0,1].

11.- Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 5 - \dfrac{|x|}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 5 & , \quad x = 0 \end{cases}$

12.- Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$

13.- Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{\operatorname{sen} x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$

14.- Estudiar en los puntos 0 y –1 la continuidad de la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & , \quad si \quad x \geq 0 \\ x^2 & , \quad si \quad -1 < x < 0 \\ -2x - 1 & , \quad si \quad x \leq -1 \end{cases}$$

15.- Estudiar la continuidad de la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad si \quad x \in I \\ 1/x & , \quad si \quad x \in Q \quad , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad si \quad x = 0 \end{cases}$$

16.- Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & , \quad si \quad x \in Q \\ x^2 - 2 & , \quad si \quad x \in I \end{cases}$

Tema 2

1.- Determina los valores de a y b y el valor de $f(0)$ para que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{ax^2} & si \quad x<0 \\ bx^2-1 & si \quad 0<x\leq 1 \\ \dfrac{x^2+x-1}{x} & si \quad 1<x \end{cases}$

sea continua.

2.- La función $f(x)=\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ no está definida en $x=0$. ¿Puede definirse $f(0)$ de modo que sea continua en ese punto?. ¿Y para la función $g(x)=1-x\cdot\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$?

3.- Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2-x}{\operatorname{sen}\pi x}$ definida en (0,1). ¿Qué valores habría de tomar en 0 y en 1 para que fuese continua en todo el intervalo $[0,1]$

4.- Sea la función $f(x)=3+\dfrac{\operatorname{sen}(x+1)}{x+1}$. ¿Qué valor habría de tomar en –1 para que fuese continua?

5.- Dada la función $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ en el intervalo $[-1,1]$. Comprueba que toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, sin embargo, no se anula en ningún punto. ¿Se contradice el teorema de Bolzano?

6.- Para la función $f(x)=3x^2+7x-2$, utiliza el teorema de Bolzano para demostrar que $\exists \quad c\in(0,1)$ tal que $f(c)=0$. Calcula dicho valor.

7.- Prueba que la función $f(x)=\dfrac{5}{2+\cos x}$ toma el valor 4.

8.- Considera la función $f(x)=2^{1/x}-1$ en el intervalo $[-1,1]$

a) Comprueba que toma valores de distinto signo en los extremos

b)¿Se anula en algún punto del intervalo?. ¿Qué tiene que decir el teorema de Bolzano sobre esto?.

9.- Demuestra que las siguientes funciones tienen algún cero. (Un cero de una función $f(x)$ es una raíz de la ecuación $f(x)=0$)

a) $f(x)=2x^3-3x^2+2x-3$ b) $g(x)=3x^4+x^3+3x-1$

10.- Demuestra que las siguientes ecuaciones tienen solución.

a) $2-x=\ln x$, b) $x=3+\operatorname{sen} x$, c) $e^{-x}=x-2$

11.- Separa los ceros de las siguientes funciones:

a) $f(x)=8x^3-12x^2-2x+3$ b) $g(x)=12x^3-4x^2-27x+9$

12.- Sea $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ una función polinómica en la que a_n y a_0 tienen distinto signo. Demuestra que la ecuación $f(x)=0$ tiene solución para algún valor positivo c.

13.- Si n es un natural impar y $a<0$, demuestra que existe un número negativo b tal que $b^n=a$

14.- Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} E[x] & si \quad x<2 \\ \dfrac{4-2^x}{x^2-9} & si \quad 2\le x\le \pi \\ \operatorname{sen} x & si \quad x>\pi \end{cases}$

15.- Demuestra que la ecuación $x^7+2\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{2}=3x^6$ tiene solución

16.- Demuestra que la función $f(x)=3x^4-6x^3+x+1$ alcanza su mínimo sobre R.

17.- Para cada una de las siguientes funciones polinómicas, intenta separar sus raíces.
a) $f(x)=x^3-x+3$, b) $g(x)=x^5+5x^4+2x+1$, c) $h(x)=x^5+x+1$, $j(x)=4x^2-4x+1$

18.- Demuestra que las siguientes ecuaciones tienen solución.
a) $x^{179}+\dfrac{163}{1+x^2+\operatorname{sen}^2 x}=119$ b) $x^{50}+\dfrac{133}{1+x^2-\cos^2 x}=70$

19.- Separa los ceros de la función $f(x)=2x^4-14x^2+14x-1$

20.- Supongamos que $f(x)$ es una función continua en $[0,1]$ tal que $\forall x\in[0,1]$, $0<f(x)<1$. Probar que debe existir un número $c\in(0,1)$ tal que $f(c)=c$. Indicación: Utilizar el teorema de Bolzano aplicado a la función $g(x)=f(x)-x$.

21.- Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $[a,b]$ de manera que $f(a)<g(a)$ y $g(b)<f(b)$. Probar que debe existir un número $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=g(c)$. Indicación: Utilizar el teorema de Bolzano aplicado a la función $h(x)=f(x)-g(x)$

22.- Explicar por qué una función polinómica de grado impar tiene siempre un cero, por lo menos, utilizando el teorema de Bolzano. Indicación: Estúdiese el comportamiento para $x\longrightarrow+\infty$ y $x\longrightarrow-\infty$.

23.- Explicar por qué una función polinómica $f(x)$ de grado par y coeficiente del término de mayor grado positivo debe alcanzar el mínimo sobre R. Esto es: Probar que existe un número *c* tal que $\forall x\in R$, $f(c)\le f(x)$

24.- Demostrar a partir del teorema de Bolzano que existen:
a) Una raíz cuadrada de 2. b) Una raíz cuadrada de 3. C) Una raíz cuadrada de todo número positivo *b.*

25.- Supongamos que $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y que $\forall x\in[a,b]$, $f(x)$ es racional. ¿Qué puede decirse sobre la función?

26.- Supongamos que $f(x)$ es una función continua que toma valores no negativos, y que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$. Probar que $f(x)$ alcanza su máximo sobre R.

27.- Demuestra que la función $f(x)=x^3+x^2-\cos\pi x$ toma el valor 3

28.- Prueba que la función $f(x)=3x^4-5x+8$ alcanza su mínimo sobre R.

29.- Separa las raíces de la ecuación $8x^5-12x^2-2x+3=0$

30.- La función $f(x)=tagx$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ y sin embargo no se anula en él. ¿Contradice esto al teorema de Bolzano?