

GeoGebra⁴

Guía Rápida de Referencia

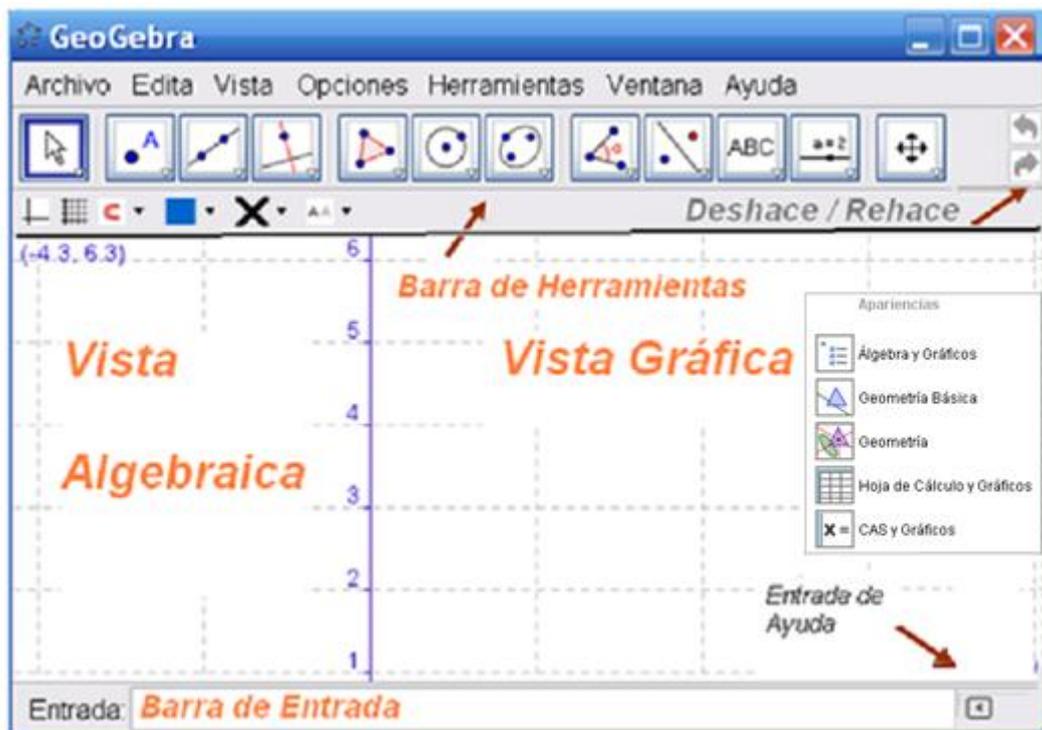
¿Qué es GeoGebra?

- Un conjunto unificado y fácil de usar que conforma un potente programa de Matemática Dinámica
- Un utilitario para enseñar y aprender en todos los niveles educativos
- Un encuadre versátil en que se conjugan **geometría** interactiva, **álgebra**, el cálculo propio del análisis y de las estadísticas y sus registros gráficos, de organización en tablas y de formulación simbólica.
- Una fuente abierta del programa libre accesible en www.geogebra.org

Lo Primero a Destacar

- *GeoGebra* le facilita a los estudiantes la creación de construcciones matemáticas y modelos para las exploraciones interactivas y los sucesivos cambios de parámetros.
- *GeoGebra* es también una herramienta de autoría que les permite a los docentes crear páginas-web interactivas, seleccionadas de entre las que colegas de todo el mundo ofrecen para compartir las producciones en www.geogebraTube.org.

Al abrir *GeoGebra*, aparece la siguiente ventana:

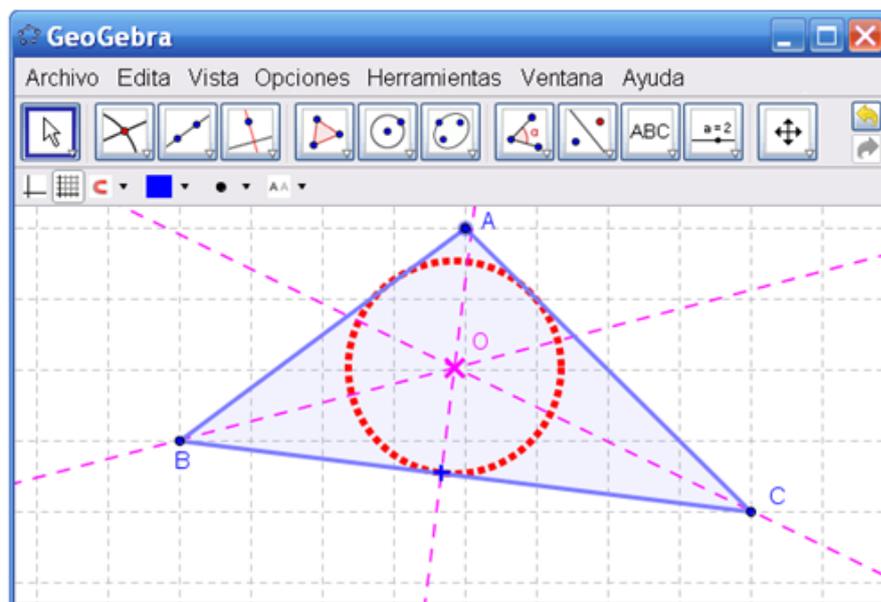


Guiando con el ratón (o *mouse*) los útiles de la **Barra de Herramientas** pueden trazarse construcciones en la **Vista Gráfica** a partir de elementos cuyas coordenadas o ecuaciones aparecen, en simultáneo, en la **Vista Algebraica**:: lo geométrico y lo algebraico en GeoGebra, se complementan y se registran uno junto al otro,.

En la **Barra de Entrada** pueden anotarse directamente coordenadas, ecuaciones, comandos y funciones que pasarán a representarse en la **Vista Gráfica** al ingresarse pulsando *Enter* (*Intro* en algunos teclados).

Primer Ejemplo: Circunferencias en un Triángulo

Tarea: Construir un triángulo y la circunferencia intermedia entre la inscrita y la que lo circunscribe.



Construcción Guiada por el Ratón o Mouse

Preparativos

- Abrir el menú **Disposiciones** y seleccionar *Geometría*.

Pasos de la Construcción

1		Seleccionar de la barra de herramientas, la de "Polígono". Ahora, un <i>click</i> tras otro en la Vista Gráfica , permite crear los vértices A, B, y C de un triángulo que se cierra reiterando un <i>click</i> sobre A.
2		Elegir la "Bisectriz": (un <i>click</i> sobre el triangulito inferior izquierdo que aparece en el borde de la cuarta caja de herramientas, despliega todas las disponibles y activar la cuarta, la <i>Bisectriz</i> . Para trazar las de un par de ángulos, basta con indicar los tres puntos que los delimitan, en sentido anti-horario con el vértice entre sendos laterales: B, C, A para uno y A, B, C para el otro.

3		Con la herramienta “ <i>Intersección de Dos Objetos</i> ”, indicando ambas bisectrices, queda establecido el punto del centro de la circunferencia buscada. Para llamarlo “O”, basta con un clic derecho sobre el punto (Mac OS: ctrl-clic) y elegir “Renombra” del menú contextual desplegado.
4		Se traza la “ <i>Recta Perpendicular</i> ” desde “O” al segmento a (del lado que une a B con C..
5		Se vuelve a emplear la herramienta “ <i>Intersección de Dos Objetos</i> ” para que quede establecido el de la perpendicular con el lado a, “E”. <u>Atención:</u> Es importante distinguir que lo que se interseca sea la perpendicular con el lado, no con el triángulo que es una alternativa también posible pero errónea en este caso.
6		Con “ <i>Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos</i> ” se completa la construcción con un clic en el punto centro O y otro en el de intersección recientemente creado, “E”
7		Con “ <i>Elige y Mueve</i> ” se puede emplear el ratón o mouse para desplazar los vértices del triángulo y notar como toda la construcción se ajusta dinámicamente a los cambios, manteniendo las relaciones establecidas que dan lugar a la circunferencia correspondiente.

Algunas Pistas

 Los botones de “**Deshace**”/ y “**Rehace**” en la esquina derecha de la barra de herramientas son muy útiles para el desenvolvimiento de cualquier construcción y conviene emplearlos al menos tentativamente

 Para **ocultar un objeto**, basta con apuntarlo y con un *clic* derecho (en SO Mac, Ctrl-*clic*) y en el menú contextual desplegado, quitar el tilde a *Muestra Objeto*.

 Para cambiar la **aparición de los objetos**, (color, tipo de trazo,...) se puede emplear la barra de estilo: un *clic*  en el margen superior de la Vista Gráfica, lo expone u oculta. Para más opciones, basta con un clic (en Mac OS: Ctrl-*clic*) sobre el ícono de  *Propiedades de GeoGebra* y seleccionar  *Objetos* del menú.

 Los **Ejes** y la **Cuadrícula** pueden mostrarse u ocultarse empleando la Barra de Estilo.

 Se pueden seleccionar diferentes *vistas* - como la **Vista Algebraica, Gráfica, Hoja de Cálculo** y/o **CAS de Algebra Simbólica**, según se tilden o no en el menú “*Vista*”, o en la barra lateral de **Apariencias** (a la derecha de la Vista Gráfica)..

 Para **desplazar la construcción** en la **Vista Gráfica**, basta con seleccionar la herramienta que “**Desplaza la Vista Gráfica**” y arrastrarla con ayuda del *mouse* o ratón.



El **Protocolo de Construcción** es un ítem del menú **Vista** en cuya ventana emergente se lista la secuencia de construcción (para revisarla paso a paso y cambiar el orden o modificarla). Usando los botones correspondientes se puede volver a realizar la construcción paso a paso. En su propio menú se fija la lista exhaustiva de datos a ostentar por cada paso de construcción.

- Además, se pueden desplazar las filas de cada paso hacia arriba o abajo para modificar el orden de los pasos.

Construcción utilizando la Barra de Entrada

Preparativos

- Vamos ahora a llevar adelante la misma construcción pero usando la barra de entradas, por lo que recomenzamos todo pidiendo *Nuevo* del menú *Archivo*.
- Abrimos el menú *Disposiciones* para seleccionar *Algebra y Gráficos*.

Pasos de Construcción

Veamos cómo construir el mismo triángulo desde la Barra de Entrada.



Comenzamos por abrir una nueva hoja de trabajo (**Archivo – Nuevo**) e introducir los siguientes comandos en la Barra de Entrada (al pie de la pantalla), pulsando *Enter* (*Intro* en algunos teclados) al final de cada línea.

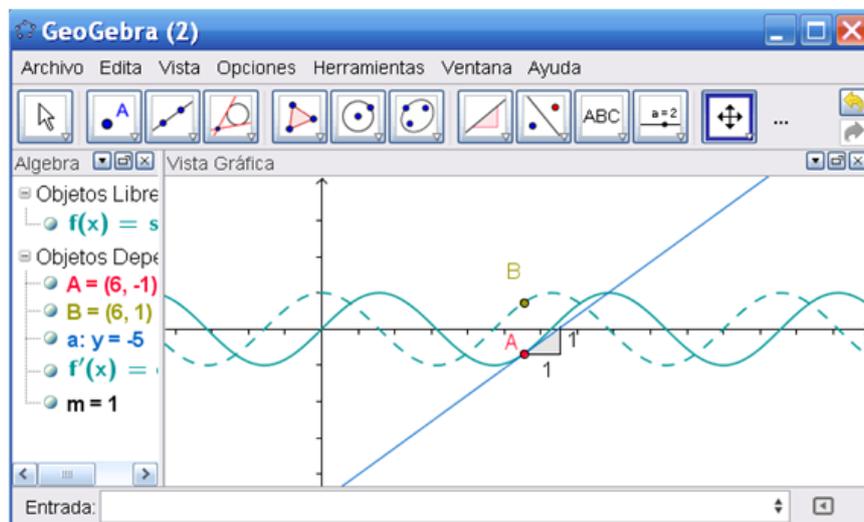
```
A = (2, 1)
B = (12, 5)
C = (9, 11)
Polígono[A, B, C]
CircunferencialInscrita[A, B, C]
b_a = Bisectriz[A, B, C]
b_b = Bisectriz[B, C, A]
M = Interseca[b_a, b_b]
```

Algunos trucos

- Auto completado de comandos: después de ingresar las dos primeras letras de un comando, se completa una palabra sugerida. Si se trata del comando deseado, basta pulsar *Enter* (*Intro* en algunos teclados) pero si no es así, se continúa tecleando el nombre del comando.
- No es necesario teclear el nombre de cada comando: es posible seleccionarlos de la lista situada a la derecha del campo de entradas.
- Un *clic* sobre el botón **Ingresar** (a la izquierda) activa el modo **Campo de entradas** que permite introducir directamente un objeto, simplemente eligiéndolo con un *clic* en la **Ventana de Álgebra** o en la **Zona Gráfica**.
- Una ventana expone explicaciones más detalladas al respecto al pulsar el botón de **Ayuda** con un *clic* sobre el correspondiente botón de la izquierda.
- Combinando las ventajas de las dos formas de trabajo posibles, mediante el *mouse* o ratón y con la introducción de comandos, se obtendrán los mejores resultados con **GeoGebra**.

Ejemplo 2: Derivada y Tangente de una Función

Desafío: Representar gráficamente la función seno, su derivada y su tangente en un punto, así como el triángulo ilustrativo de la pendiente de la misma.



Primera Versión: Punto sobre la gráfica de la función

Preparativos

- Abrir una  Nueva Ventana con tal opción del menú *Archivo*.

Pasos de Construcción

1	$f(x) = \sin(x)$	Teclear en el campo de entradas la función $f(x) = \sin(x)$ y pulsar Enter (Intro en algunos teclados).
2		Seleccionar la herramienta <i>Nuevo Punto</i> y dar <i>clic</i> sobre la representación gráfica de la función f para crear un punto A sobre la gráfica de f .
3		Activar la herramienta <i>Tangente</i> y dar <i>clic</i> sobre el punto A y sobre la gráfica de f . Renombrar t a la tangente (<i>clic</i> derecho sobre ella y <i>Renombra</i>).
4		Seleccionar la herramienta <i>Elige y Mueve</i> y arrastrar el punto A observando el movimiento de la tangente.
5		Activar la herramienta <i>Pendiente</i> y dar <i>clic</i> sobre la tangente trazada en el punto A .
6		Seleccionar la herramienta <i>Elige y Mueve</i> y arrastrar el punto A observando el movimiento de la tangente y de la pendiente m correspondiente.
7	$B = (x(A), m)$	Teclear $B = (x(A), m)$ y activar la traza de este punto (<i>clic</i> derecho sobre B y <i>Activa Rastro</i>).
8	 	Seleccionar la herramienta <i>Elige y Mueve</i> y arrastrar el punto A observando el movimiento de la tangente y de la pendiente m correspondiente y el rastro que deja B .
9	Derivada[f(x)].	Teclear el comando <i>Derivada[f]</i> en la Barra de Entrada

Algunos trucos

- Ingresar una función diferente, por ejemplo $f(x) = x^3 - 2x^2$ en el campo de entradas; inmediatamente aparecerán su derivada y su tangente.
- Probar también el comando `Integral[f(x)]`.
- Seleccionar la herramienta que  *Elige y Mueve* y arrastrar la gráfica de f con el ratón o *mouse*. Observar los cambios en las expresiones de la función y de su derivada
- **Completado Automático de Comandos:** tras ingresar las primeras dos letras de un comando, aparecerá completo automáticamente el que comience con estas para que se acepte la sugerencia con un `Enter` o `Intro` o se continúe escribiendo.
- La ayuda de cada entrada  se encuentra a la derecha, próxima a la barra de entradas y ofrece una lista de todos los comandos disponibles en *GeoGebra*.

Segunda Versión: Punto en $x = a$

Preparativos

- Vamos a realizar la misma construcción anterior pero de otro modo. Para empezar, seleccionar **Archivo – Nuevo** para abrir una nueva hoja de trabajo.

Pasos de Construcción

Para este procedimiento, basta introducir en el campo de entradas los comandos siguientes, tecleando **Enter** (**Intro** en algunos teclados) al final de cada línea:

$f(x) = \sin(x)$
 $a = 2$
 $T = (a, f(a))$
 $t = \text{Tangente}[a, f]$
 $m = \text{Pendiente}[t]$
 $B = (x(T), m)$
`Derivada[f]`

Tangente sin recurrir al comando

GeoGebra también trabaja con vectores y ecuaciones paramétricas. Así será posible construir una tangente t sin necesidad de recurrir al comando `Tangente[]`.

Para comprobarlo, suprimir la tangente de la figura, con *clic* derecho sobre la recta y seleccionando **Borra**.

Luego introducir los comandos siguientes:

$v = (1, f'(a))$
 $t: X = A + r v$

v es un vector direccional de la tangente t . Se puede utilizar, en lugar de r , cualquier otra letra como parámetro.

Algunos Trucos

Seleccionar la herramienta que **Elige y Mueve** y dar *clic* sobre el número a . Se pueden pulsar las teclas de las flechas para modificar su valor de a . Inmediatamente el punto T y la tangente se desplazarán a lo largo de la gráfica de función f .

Deslizadores

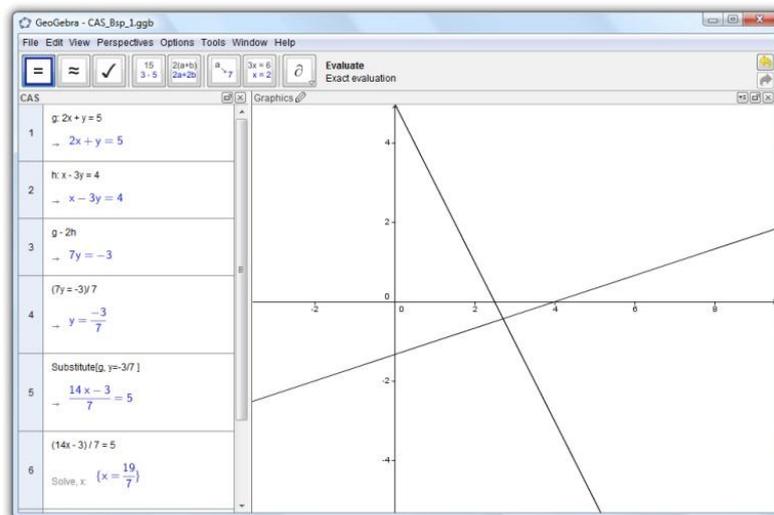
- También puede controlarse el valor del número a creando un **deslizador**: con un *clic* sobre el símbolo \circ a la izquierda de a en la **Vista Algebraica**. Se expone el **deslizador** ilustrativo de a y se su cambia valor, arrastrando con el ratón o *mouse* el punto que aparece sobre la línea que lo representa.

Truco

Los deslizadores y las teclas-flecha son especialmente útiles para trabajar con parámetros, por ejemplo p y q en la función cuadrática $y = x^2 + p x + q$.

Ejemplo 3: Resolución de un Sistema de Ecuaciones

Desafío: Resolver un sistema de ecuaciones lineales por método de sustitución.



Preparativos

- Pulsando la flecha en el borde lateral derecho de la Vista Gráfica, en el menú desplegado de **Apariencias**, seleccionar $\boxed{x=}$ CAS y Gráficos. La sigla CAS refiere a álgebra simbólica computacional.
- Es importante tener en cuenta que la Vista CAS de Cálculo Simbólico sólo está disponible a partir de GeoGebra 4.2 en adelante.

Pasos de Construcción

Se deben anotar los siguientes comandos en las filas de la vista CAS, pulsando **Enter** (**Intro** en algunos teclados), después de cada línea.

1	$g: 2x + y = 5$... para crear la recta g
2	$h: x - 3y = 4$... para crear la recta h
3	$g - 2h$	Se restan las ecuaciones para eliminar la variable x
4)	Ingresar) para obtener el resultado de la línea previa. Ahora, basta con teclear /7 para obtener $(7y = -3)/7$
5	Sustituye[g, $y=-3/7$]	Sustituye y por $-3/7$ en la primera ecuación g.
6	$3x = 6$ $x = 2$	Clic sobre la salida $\frac{14x-3}{7} = 5$ y de la fila previa para copiarla en la activa actual. Ahora, un <i>clic</i> en la herramienta <i>Resuelve</i> para obtener la solución de x también.

Algunos Trucos

La vista CAS permite trabajar con fracciones, ecuaciones y formulas que incluyan variables indefinidas, de modo que los estudiantes puedan incursionar en este tipo de tareas con *GeoGebra*.

¹⁵
3-5 Para manipular solo una parte de una expresión, basta con seleccionarla con el *mouse* o ratón y a continuación un *clic* sobre la herramienta, por ejemplo **Factoriza**, que afectará a la expresión escogida.

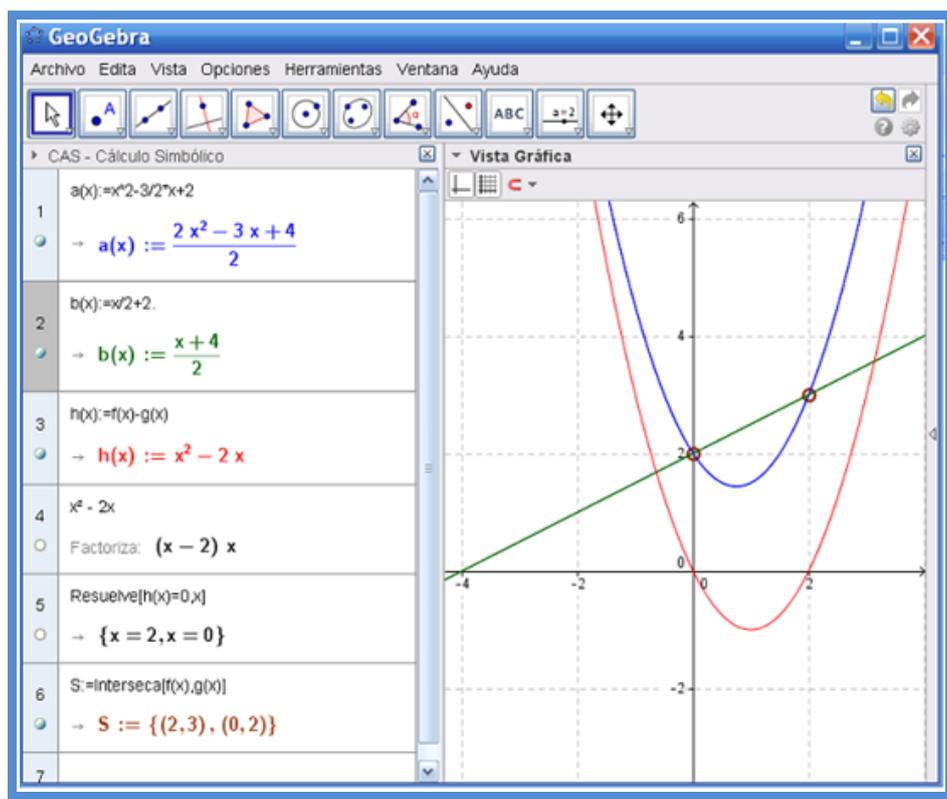
x = La solución también se puede determinar inmediatamente, definiendo $f(x)$ y $g(x)$ en el ejemplo previo, seleccionando ambas filas y aplicando la herramienta que Resuelve.

Ejemplo 4: Intersección de Funciones Polinómicas

Desafío: *Intersecar una parábola con una función lineal para determinar las raíces de su diferencia*

Preparativos

- Pulsando la flecha en el borde lateral derecho de la Vista Gráfica, en el menú desplegado de **Apariencias**, seleccionar x = CAS y Gráficos. La sigla CAS refiere a álgebra simbólica computacional.
- Es importante tener en cuenta que la Vista CAS de Cálculo Simbólico sólo está disponible a partir de GeoGebra 4.2 en adelante.



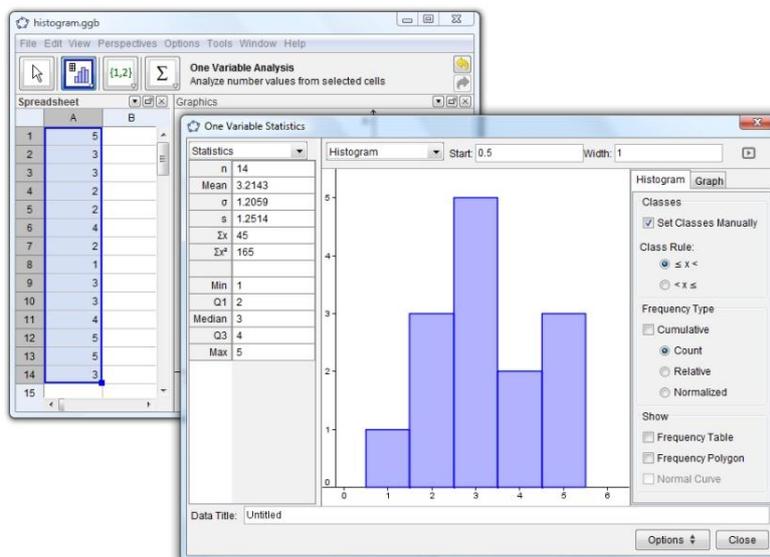
Pasos de Construcción

Se deben anotar los siguientes comandos en las filas de la vista CAS, pulsando **Enter** (**Intro** en algunos teclados), después de cada línea y siempre evaluando cada entrada.

1		Anotar $f(x) := x^2 - 3/2 * x + 2$ en la primera fila de para definir $f(x)$. Evaluar pulsando la tecla Enter (Intro en algunos teclados). <u>Pista:</u> := se emplea para las asignaciones..
2		En la segunda fila, anotar $g(x) := x/2 + 2$.
3		Definir $h(x)$ como $h(x) := f(x) - g(x)$ en la tercera fila.
4	<input type="text" value="15"/> <input type="text" value="3·5"/>	Anotar $h(x)$ en la cuarta línea y seleccionar la herramienta que Factoriza . Las raíces quedarán expresadas de inmediato.
5		<u>Emplear el comando $\text{Resuelve}[h(x)=0, x]$ para confirmar las soluciones previamente halladas.</u>
6		Crear los puntos de intersección anotando $S := \text{Interseca}[f(x), g(x)]$.

Ejemplo 5: Análisis de Datos

Desafío: Crear un histograma y evaluar media, mediana y moda, mínimo y máximo de una serie de valores.



Preparativos

- Abrir el menú *Vista* y seleccionar *Hoja de Cálculo* o pulsar en la flecha sobre el lateral derecho de la Vista Gráfica y en el menú Apariencias desplegado seleccionar *Hoja de Cálculo y Gráficos*

Pasos de Construcción

1		Ingresar algunos datos en las celdas de la columna A de la hoja de cálculo. Por ejemplo, completar desde A1 a A14 con valores como 5, 3, 3, 2, 2, 4, 2, 1, 3, 3, 4, 5, 5, 3
2		Resaltar las celdas y seleccionar la herramienta apropiada como, para este ejemplo, "Análisis una Variable". <u>Pista:</u> En este ejemplo: resaltar las celdas A1 a A14 y con un <i>clic</i> en la herramienta <i>Análisis Una Variable</i> . . Tras el <i>clic</i> en <i>Análisis de los Datos</i> en la caja de Diálogo de la <i>Fuente de Datos</i> , aparecerá <i>Analiza-</i> la de <i>Análisis de Datos</i> .
3		Elegir las "Clases" apropiadas en la zona superior de la ventana. <u>Pista:</u> Para los números de este ejemplo, se emplearon 5 <i>Clases</i> porque hay cinco valores diferentes.
4	Σx	Seleccionar el ícono <i>Muestra Estadísticas</i> de la <i>Barra de Estilo</i> para abrir el panel de <i>Estadísticas</i> . Hallar la media, mediana, el máximo y el mínimo de los datos en la sección " Estadísticas " del sector izquierdo de la ventana emergente.
5		<i>Clic</i> el botón en la zona superior derecha permite seleccionar " <i>Selección Manual de Clases</i> " en el menú derecho de " <i>Histograma</i> ". <u>Pista:</u> Pulsar <i>Enter</i> (<i>Intro</i> en algunos teclados) después de especificar el valor de " <i>Inicio</i> " 0.5 y el " <i>Ancho</i> " 1 (valores de este ejemplo).

Algunos Trucos

Cambiar algunos valores en la columna A permite notar la influencia sobre el histograma y los valores estadísticos como media, mediana, máximo y mínimo.

Modificar el tipo de diagrama de “Histograma” a “Diagrama de Cajas” en la caja de listas arriba del histograma.

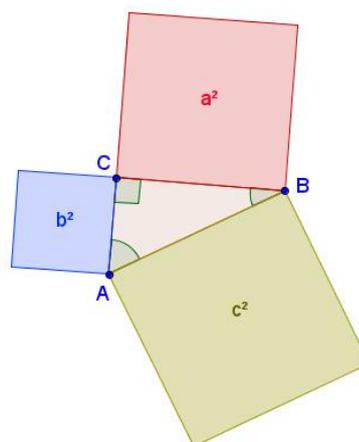
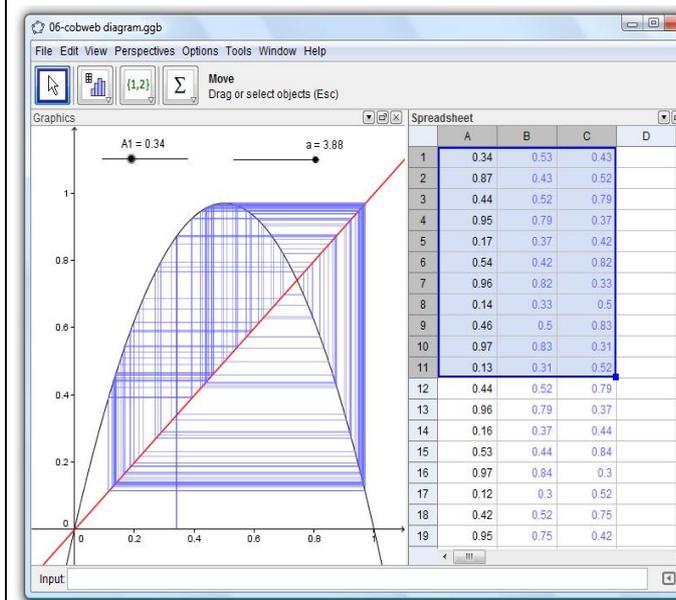
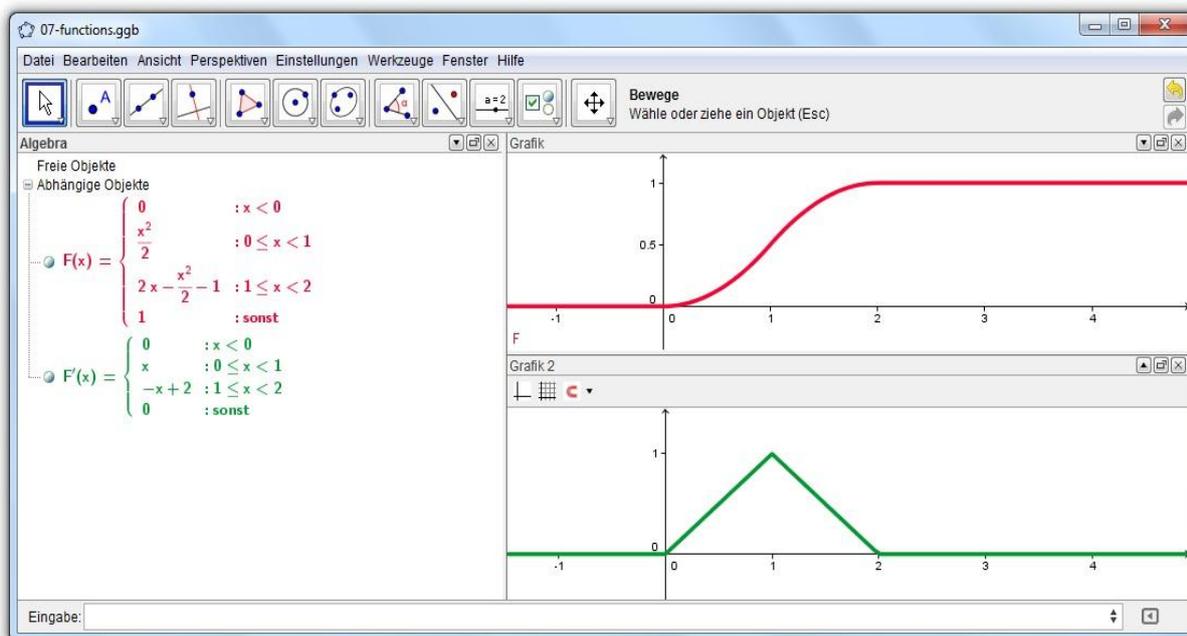
Más Información

GeoGebra también permite crear fácilmente páginas web dinámicas porque no sólo exhiben sino que permiten la interacción desde cualquier navegador (como Firefox, Netscape, Safari o Internet Explorer). La página web de *GeoGebra* ofrece ejemplos de este tipo además de otras informaciones y recursos. Quedan invitados a visitar...

Software	http://www.geogebra.org La página web de <i>GeoGebra</i> www.geogebra.at en que encontrarán tanto información complementaria y diversificada como... ¡la última versión del programa!
Manual y Tutoriales	http://wiki.geogebra.org
GeoGebra en Tube	http://www.geogebraTube.org
Ejemplos y Materiales (Banco de Recursos Educativos)	www.geogebra.at/en/wiki
Foro de Usuarios	http://www.geogebra.org/forum

Por sugerencias o avisos, dirigirse en inglés a Markus.Hohenwarter@sbg.ac.at o en español a la traductora y moderadora, liliana.saidon@centrobabbage.com

Traducción, actualización, edición y revisión de Liliana Saidon
liliana.saidon@centrobabbage.com Directora del Centro Babbage – Instituto GeoGebra para la República Argentina.
 Traducción previa de Manuel Sada msadaall@pnte.cfnavarra.es



$$\begin{aligned}
 a &= 10.36 & a^2 &= 107.29 & a^2 + b^2 &= \\
 b &= 6.01 & b^2 &= 36.15 & 107.29 + 36.15 &= 143.44 \\
 c &= 11.98 & c^2 &= 143.44 & a^2 + b^2 &= c^2
 \end{aligned}$$