Capítulo XII

LA RESTA O SUSTRACCIÓN. EL ENFOQUE TRADICIONAL

1. INTRODUCCIÓN

La resta o sustracción es una operación difícil. Como señala algún docente, bastantes alumnos se pueden pasar todo el curso (2º de Primaria) intentando aprenderla. Y llevan razón. Su formato (el que mayoritariamente se emplea en España) es poco práctico y no tiene ninguna conexión con los procesos naturales que se siguen con las cantidades cuando se resta o sustrae.

Sin embargo, son muchos los docentes que siguen convencidos de que este formato es el correcto y por el que sus alumnos se han de internar en esta operación. Por ello, este capítulo se ocupará de la forma de abordar las dificultades propias del formato tradicional y las técnicas adecuadas para su superación. Se recordarán, en primer lugar, las estrategias espontáneas que utilizan los alumnos en sus cálculos. Después nos ocuparemos de la tabla de restar. En nuevo apartado analizaremos de manera graduada los escalones de dificultad del formato de toda la vida. Por último, trataremos de forma específica el problema de las llevadas, exponiendo algunas técnicas para solucionarlo.

2. LAS ESTRATEGIAS DE LOS ALUMNOS

Los alumnos ponen espontáneamente en marcha estrategias para resolver las situaciones de sustracción que se les presentan en su vida cotidiana. Han sido muy estudiadas por los investigadores, y son distintas cuando el alumno lleva a cabo sustracciones con manipulación directa de objetos, respecto a cuando opera con recuento mental.

2.1. Estrategias que incluyen recuento material

Son las que los niños ponen en marcha cuando tienen a su alcance los objetos que expresan el problema. Comúnmente manipulativas, se pueden reducir a dos. La segunda de ellas es más compleja que la primera, y tarda algo más en aparecer.

1. Sobre los objetos que representan el minuendo, el niño quita o retira el número de objetos equivalente al sustraendo. El resultado es lo que queda. Por ejemplo, si el niño tiene ocho caramelos y quiere saber cuántos le van a quedar después de dar seis, aparta los seis y cuenta los que le quedan.

2. Del minuendo va extrayendo elementos, hasta que queda convertido en el sustraendo. Los elementos separados son el resultado. Siguiendo con el ejemplo del caso anterior (quiere saber, de ocho caramelos que tiene, cuántos le quedan si da seis), procede retirando dos caramelos: los que quedan sobre la mesa son los que tiene que dar, y los que ha retirado son para él.

Se insiste: estas dos estrategias se presentan escalonadas. Es decir, la práctica repetida de la primera es la que lleva al niño a la segunda. No sería buena medida explicar la segunda y evitarle al niño el primer paso.

2.2. Estrategias que solo implican contar mentalmente

Se presentan después de las anteriores, y también de manera escalonada. Son:

1. El niño cuenta hacia atrás, desde el minuendo, tantas unidades como indica el sustraendo. El número en el que se detiene es el resultado. El ejemplo más claro de esta estrategia es la típica cuenta "con los dedos". El niño extiende tantos dedos como indica el minuendo, y sobre ellos va contando el sustraendo. Los que le quedan son el resultado: en el ejemplo que hemos seguido hasta ahora (8 - 6 = 2), el niño extiende ocho dedos; de los extendidos cuenta o elimina seis; los que quedan sin contar o sin doblar son el resultado.

2. El niño cuenta hasta llegar al sustraendo. Lo contado es el resultado. Se trata de una retrocuenta, que requiere más destrezas cognitivas. En el ejemplo que nos ha servido hasta ahora, el niño parte del ocho y cuenta hasta que llega al seis. Los dos números que ha contado son el resultado. Esta estrategia puede comenzar a aparecer practicada con los dedos. El alumno extiende ocho dedos y cuenta para atrás hasta que deja seis extendidos. Los contados o doblados forman el resultado.

2.1. Estrategias que incluyen recuento material

Son las que los niños ponen en marcha cuando tienen a su alcance los objetos que expresan el problema. Completamente manipulativas, se pueden reducir a dos. La segunda de ellas es más compleja que la primera, y tarda algo más en aparecer.

1. Sobre los objetos que representan el minuendo, el niño quita o excluye el número de objetos equivalente al sustraendo. El resultado es lo que queda. Por ejemplo, si el niño tiene ocho caramelos y quiere saber cuántos le van a quedar después de dar seis, aparta los seis y cuenta los que le quedan.

2. Del minuendo va extrayendo elementos, hasta que queda convertido en el sustraendo. Los elementos sacados son el resultado. Siguiendo con el ejemplo del caso anterior (quiere saber, de ocho caramelos que tiene, cuántos le quedan si da seis), procede retirando dos caramelos: los que quedan sobre la mesa son los que tiene que dar, y los que ha retirado son para él.

Se insiste: estas dos estrategias se presentan escalonadas. Es decir, la práctica repetida de la primera es la que lleva al niño a la segunda. No sería buena medida explicar la segunda y evitarle al niño el primer paso.

2.2. Estrategias que solo implican contar mentalmente

Se presentan después de las anteriores, y también de manera escalonada. Son:

1. El niño cuenta hacia atrás, desde el minuendo, tantas unidades como indica el sustraendo. El número en el que se detiene es el resultado. El ejemplo más claro de esta estrategia es la típica cuenta "con los dedos". El niño extiende tantos dedos como indica el minuendo, y sobre ellos va contando el sustraendo. Los que le quedan son el resultado: en el ejemplo que hemos seguido hasta ahora (8 - 6 = 2), el niño extiende ocho dedos; de los extendidos cuenta o elimina seis; los que quedan sin contar o sin doblar son el resultado.

2. El niño cuenta hasta llegar al sustraendo. Lo contado es el resultado. Se trata de una retrocuenta, que requiere más destrezas cognitivas. En el ejemplo que nos ha servido hasta ahora, el niño parte del ocho y cuenta hasta que llega al seis. Los dos números que ha contado son el resultado. Esta estrategia puede comenzar a aparecer practicada con los dedos. El alumno extiende ocho dedos y cuenta para atrás hasta que deja seis extendidos. Los contados o doblados forman el resultado.

5. El niño cuenta desde el sustraendo hacia arriba, hasta que llega al minuendo. Lo contado es el resultado. Es la estrategia más económica, e implica el dominio de todas las anteriores. El niño parte del seis y cuenta hacia adelante hasta llegar a ocho. Al llegar a ocho se detiene y cuenta los números pasados: es el resultado. Los niños más lentos e inseguros pueden ayudarse de los dedos, aunque en esta estrategia el caso es menos frecuente.

3. LA TABLA DE RESTAR

3.1. *La práctica diferenciada*

Queremos recordar al lector algunas de las cosas que hemos dicho en trabajos anteriores para iniciar al alumno en la tabla de restar:

"Si el alumno domina los hechos numéricos correspondientes a la suma (tabla de sumar), no ha de tener dificultades para operar con la resta.

(...) El aprendizaje y la práctica de la sustracción pueden colmar lagunas que se den en el conocimiento de las combinaciones básicas de la suma. Pero es muy recomendable que éstas sean dominadas para poder conseguir una buena ejecución en la resta.

El alumno ha de entrenarse en el principio de complementación de la adición y la sustracción. Esto es, ha de manejar las situaciones que impliquen sumar o restar de manera tal que pueda pasar de una a otra a partir de cualquiera de ellas. Esto va a potenciar la seguridad en el cálculo de los niños, puesto que a la hora de tener dudas en un hecho básico de cualquier operación, puede buscar la solución en la otra.

El repaso de los hechos básicos de la sustracción suele centrarse en la búsqueda del sumando perdido de los hechos básicos de la suma: 7 + ... = 10; ... + 8 = 11."[23]

El tratamiento diferencial de la tabla de restar viene en las llamadas familias de la resta o familias de diferencias. Forman una familia de diferencias la pareja de números (minuendo y sustraendo) cuya diferencia sea idéntica a la de otro par de números distintos. Así, 10 - 8 pertenece a la misma familia que 4 - 2 o 26 - 24.

23. Martínez Montero, J. (2000). *Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI*. Barcelona: CISS-Praxis. Pág. 59.

Pertenecen a la familia del cero todas las parejas de números cuya diferencia sea cero. Para tratar este concepto no es preciso detenerse en el número 10, como tradicionalmente se hace en el aprendizaje de las tablas, sino que se tiene que extender al universo de números que el niño conoce: 8 - 8 = 0, y también 80 - 80 = 0, 800 - 800 = 0, 8000 - 8000 = 0, etc.

Las familias de los números dígitos son sencillas de introducir y a los niños les gusta mucho integrarlas. Como son las más importantes, las llamamos "familias principales". Dominadas, es interesante abrir el panorama a familias "relacionadas". Pongamos ejemplos como en la Tabla 24.

Familia Principal	Familia Relacionada 1	Familia Relacionada 2	Familia Relacionada 3
8 - 5	18 - 5	28 - 5	48 - 15
6 - 3	26 - 13	36 - 13	56 - 23
12 - 9	42 - 29	52 - 29	72 - 39
13 - 10	23 - 10	33 - 10	93 - 60

Tabla 24

Así, la "familia relacionada 4" con la "familia principal" del 2 es la formada por las parejas de números (minuendo y sustraendo) cuya diferencia sea de 42: 164 - 122; 50 - 8, etc.

Naturalmente, todo esto se debe construir manipulando, con materiales muy figurativos, que los niños vean que las familias se crean aumentando o disminuyendo, en el mismo número, cada una de las cantidades que forman el minuendo y el sustraendo. En el caso de las "familias relacionadas" se deja sin variar la cifra de las unidades de ambas cantidades, pero sí se varía la cifra de las decenas (ver los ejemplos).

En cualquier caso insistimos y para terminar: bien sabidas las combinaciones básicas de la suma, la tabla de restar no se erige en dificultad.

5.2. *Materiales para ejercitarse en el aprendizaje de la tabla*

Remitimos al lector al apartado que se ocupa de esta cuestión en el capítulo correspondiente a la suma tradicional[24], puesto que la mayor parte de los materiales que allí

24. Véase Capítulo VIII.

se mencionaban pueden emplearse también con la resta: el empleo de los dedos, la recta numérica, dominós, etc. Alguno precisión requiere algún otro material citado.

REGLA DE CÁLCULO ELEMENTAL. El cálculo del resultado, en el caso de la resta, es el siguiente. Utilizamos como ejemplo la sustracción 13 – 9. Se identifica en una regla el minuendo (13). Sobre él se hace coincidir la segunda regla con el número correspondiente al sustraendo (9). El cero de la segunda regla se sitúa exactamente encima del resultado de la sustracción: 4. La Figura 49 explica este ejemplo.

Figura 49

EL SISTEMA DE MAHONEY. Las transformaciones para hacer resultar las combinaciones básicas de la resta no son complicadas. El minuendo es el número de piezas que se pongan. El sustraendo, las que se tapan, y el resultado o diferencia las que quedan sin tapar. La Figura 50 muestra ejemplos de lo que se señala.

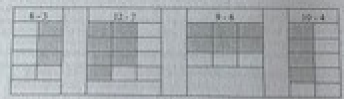

Figura 50

4. EL ALGORITMO TRADICIONAL: DIFICULTADES Y TRATAMIENTO

El sencillo test analítico-diagnóstico que se propone en la Tabla 29 permite detectar qué tipo de dificultad tiene el alumno que tiene problemas a la hora de resolver una resta. Hace un repaso exhaustivo de todas y cada una de las dificultades del algoritmo clásico y señala cuál es el punto concreto que impide al alumno resolver la operación.

a) 9 − 5	b) 68 − 20	c) 68 − 38	d) 68 − 36
e) 13 − 8	f) 45 − 27	g) 18 − 7	h) 40 − 13
i) 346 − 187	j) 800 − 194	k) 5093 − 1837	

Tabla 29

La operación recogida en a) prueba el dominio que tienen los alumnos de las combinaciones básicas de la sustracción que no implican descomposición de decenas ni, por tanto, "llevadas". En total, son cincuenta y cinco combinaciones las que presentan esta característica.

La operación recogida en b) extiende lo anterior a las decenas. No supone, salvo la generalización expresada, ningún escalón nuevo de dificultad.

Las operaciones recogidas en las letras c) y d) son generalizaciones de las destrezas anteriores a todos los casos de sustracciones con números multidígitos. No hay descomposición de unidades y se trata de repetir en un determinado orden la destreza que ya se posee.

Las operaciones señaladas con las letras e) y f) se ocupan de los primeros casos de descomposición de decenas o "llevadas" realizadas aquellos en que se sustrae de decenas. Resuman un total de 44 combinaciones distintas que exigirán descomposición. En el primer caso (e), se plantea la dificultad de la forma más sencilla. En el segundo caso (f), se aplica en una sustracción de trabajo. Esta fase es fundamental. Si el alumno falla aquí, se debe detener todo el proceso y no pasar a la fase siguiente hasta que ésta no se domine.

Las operaciones señaladas con las letras g) y h) se ocupan específicamente de las situaciones que quedaron excluidas en las dos letras anteriores: la resta de 10 o de decenas exacta (30, 50, etc.). Comprende los nueve hechos numéricos o combinaciones básicas que faltaban. En última instancia, son los casos en que se resta de cero los nueve dígitos regulares. Se consideran caso aparte porque los alumnos con mayores dificultades pueden problematizar bastante el caso de sustraer de "cero" o nada. Es, además, una buena ocasión de volver a practicar la composición y descomposición de decenas y centenas y, por tanto, afianzar estos conocimientos. El primer caso (g), plantea la combinación a partir del número 10, el segundo caso (h), la generaliza a cuatro decenas.

La letra i) representa la operación en que se le plantea al alumno la dificultad de encadenar dos llevadas o dos procesos consecutivos de descomposición de unidades.

Por último, las letras j) y k) plantean operaciones que resumen todas las dificultades anteriores y las generalizan. No sólo hay descomposiciones sucesivas, sino que hay que descomponer no ya la unidad contigua, sino la anterior a la contigua. Son las sustracciones más difíciles y se puede afirmar que si los niños realizan bien estas cuentas no tendrán dificultad en resolver bien cualquier otra operación de restar. En ellas, se podrán encontrar más repetidas las dificultades, pero no hallarán ninguna nueva que no haya sido tratada aquí.

Si el sujeto no realiza bien alguna de las operaciones indicadas, el maestro debe proponerle la realización de operaciones que sólo tengan la dificultad definida por el tipo de operación que no ha superado. Así por ejemplo, si el alumno no ha pasado de la operación definida en la letra i), debe realizar otras operaciones del mismo tipo para confirmar el diagnóstico. Por ejemplo, como las que vemos en la Tabla 30.

	3	5	8			2	4	1			7	1	6			9	2	3
—	1	5	9		—	1	8	3		—	3	5	8		—	2	8	7

Tabla 30

En definitiva, no se trata de que el alumno aprenda o se ejercite a la vez en todas las destrezas que requiere solucionar una cuenta tradicional de restar. Se trata de estimación cada vez en una dificultad, procurando que el resto de las destrezas que aparezcan en la cuenta que sirve de ejercicio las tenga el sujeto suficientemente superadas.

Queremos llevar al ánimo del maestro que no es cierto que el niño no sepa restar, globalmente y en abstracto: no sabrá las combinaciones básicas, o componer un resultado en la memoria y recuperarlo desde ella, o cómo se resuelve la dificultad de añadir las que se llevan en el exterior o interior de un número, etc. Detectada la dificultad, es específicamente en ella, y no en otras, en las que se debe entrenar y ejercitar al alumno.

5. EL PROBLEMA DE LAS LLEVADAS EN LA RESTA

5.1. *Planteamiento de la cuestión*

Este aspecto del algoritmo es, sin duda, el que más dificultades plantea a los alumnos y del que más se han encargado los investigadores. En un trabajo anterior[25] señalábamos:

"La dificultad de las popularmente denominadas "llevadas" está determinada por el tipo de algoritmo que se emplee y, sobre todo, por su realización mecánica. El mero hecho de que el alumno conociera y aplicara la propiedad uniforme allanaría muchas dificultades. Cómo las mejoraría si las cuentas se llevaran a cabo teniendo como referente el dinero, y representando cada orden de unidades un tipo de moneda: las unidades son las pesetas, las decenas las monedas de diez y las centenas las de cien. Si por algo se interesa el alumno que se inicia en la resta es por el manejo del dinero, el cambio, etc. Así, restar 30 de 100 no es más que cambiar la moneda de 100 (que es una) en diez de 10, de los que sí puede quitar las tres de diez, etc.

El sistema actual que se emplea en nuestras escuelas viene de atrás. Mueller[26] explica que hasta 1930 el método preponderante era el de la descomposición (como el que acabamos de explicar con el modelo de las monedas). A partir de entonces, la experiencia vino a demostrar que la gente usaba más el método austriaco (el escolar tradicional empleado en España) porque se conseguía mayor seguridad y, sobre

25. Martínez Montero, J. (2000). *Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI.* Barcelona: Cisspraxis.
26. Mueller (1971). Pág. 59 y 60.

todo, rapidez. Esto trajo su generalización a partir de los años 40, y aún hoy mantiene su preponderancia. Pero incluso a la hora de primar en un sistema mecánico, por aquello de salvaguardar la rapidez, existen métodos más fáciles y fiables que el norteamericano (...). Pero el peso de la tradición y de las prácticas irreflexivas a veces gravita de manera inexorable.

Por ello, recomendamos siempre el método de la descomposición, que además facilita la comprensión de la numeración como sistema de agrupación de unidades simples en otras más complejas.

Para desarrollar el pensamiento matemático conlleva algunas obligaciones. La aplicación de la propiedad uniforme a la sustracción y a la división es muy importante, y, por consiguiente, se debe trabajar también en la escuela. Así, es un buen ejercicio derivar sustracciones, sumando y restando a los dos miembros, a partir de una más simple (Tabla 31).

Se añaden	+6	-10	+20	+50
Se parte de 23 - 15	29 - 21	19 - 11	39 - 31	89 - 81
Diferencia	8	8	8	8

Tabla 31

De una forma sintética, el problema de las llevadas se puede abordar desde cinco perspectivas distintas. Las tres primeras se derivan de la aplicación de la propiedad uniforme. La cuarta está basada en el proceso de descomposición de la unidad de orden anterior. La quinta plantea el tratamiento de la llevada de forma distinta, con un formato de cuenta que obvia tal problema. De este último caso nos ocuparemos en el capítulo siguiente.

3.2. Las perspectivas derivadas de la aplicación de la propiedad uniforme

3.2.1. El enfoque tradicional o de las bases

El sistema tradicional tiene una base muy sencilla. Parte, como los dos que siguen, de la propiedad por la cual si a los dos miembros de una sustracción (minuendo y sustraendo) se les suma o resta un mismo número, la diferencia no varía. Así, en la sustracción 75 - 27, el niño comienza diciendo cuántas van de 7 a 15. Ha añadido o sumado diez unidades a las cinco del minuendo. Dice que se lleva una, y continúa operando de la siguiente manera: dos, y una que me llevo son tres, de tres a siete van cuatro. Naturalmente, no se "lleva" nada. Lo que hace es sumar diez (el mismo número de la cifra de las unidades) a la cifra de las decenas, con lo que al sumar diez en minuendo y sustraendo la diferencia no varía.

El quid de la cuestión está en que en el primer caso el alumno suma diez unidades sueltas en el minuendo, y en el segundo caso suma una decena o paquete de diez en el sustraendo, no diez sueltas como en la otra ocasión. Esto, naturalmente, no se le explica al niño, sino que se le debe aprender de memoria y "automatizarlo", esto es, hacerlo deprisa, sin errores y sin preguntarse por qué es así ni qué debe entender de este proceso. Este planteamiento acarrea un problema muy serio: el alumno carece de criterio para saber si la operación va bien o mal, si se ha equivocado o no.

El aspecto correctivo tiene que centrarse en que el alumno comprenda el proceso y se dé cuenta de lo que se hace y por qué. Tal vez el lector, cuando acabe de leer todo el apartado dedicado a "las llevadas" alcance una visión global del problema.

5.2.2. Se añaden números en el mismo orden de unidades

El método austríaco o de las bases, que se acaba de explicar, se basa en que se añade el mismo número al minuendo y al sustraendo, pero en órdenes distintos de unidades. En el caso actual, se añaden números en el minuendo y en el sustraendo pero en el mismo orden de unidades. En el fondo, se trata de transformar los datos de la resta para que éstos no contengan ningún caso de llevadas.

En el caso que pusimos anteriormente (75 - 27), basta con sumar cuatro unidades a ambos términos para que el problema de la llevada desaparezca. Quedan transformados así, 79 - 31. Ya no hay problema, ni necesidad de complicación.

Una buena forma de manipular la resta es ir eliminando las dificultades de las llevadas en los casos en que se presentan. Veamos el siguiente caso: 5601 - 2809.

- Para hacer desaparecer el problema en el orden de las unidades, puede bastar sumar 3. La cifra del sustraendo del 9 se ha convertido en 2, y la del 1 del minuendo se ha convertido en 4.

- De la anterior manipulación, "nos llevamos" una en la cifra del sustraendo. En efecto, en el paso anterior, 9 + 3 son 12. Luego hay una decena que añadir al sustraendo. Por ello, las cifras correspondientes son 0 (minuendo) y 1 (sustraendo), no 0 y 0. Por ello, para que no haya "llevada" hay que sumar 9. Entonces el minuendo se convierte en 9, y el sustraendo en 0. Ya se puede restar.

- En la cifra de las centenas del sustraendo, hay que añadir la que se ha formado en el paso anterior (1 + 9). Ahora las cifras correspondientes son 6 en el minuendo y 9 en el sustraendo. Con que se sume 1, se arregla el problema. El sustraendo pasa a ser 0 y el minuendo 7.

- Finalmente, nada hay que sumar en la cifra de las unidades de mil. La unidad de mil que se formó en las centenas del sustraendo (1 + 9) se añade al lugar correspondiente, y queda la cuenta en 5 - 3, que no plantea llevada ni descomposición.

En definitiva, si a los dos miembros de la sustracción 5601 - 2809 le añadimos 193, no se plantean problemas de llevadas. Hemos convertido esa operación en esta otra: 5794 - 3012.

¿Se puede emplear este sistema en enseñanza correctiva? No. El alumno que es capaz de hacer los cálculos anteriores no tiene ninguna dificultad en aprender cualquier método de resolución de la dificultad de las llevadas.

5.2.3. Se halla el complemento a diez del sustraendo

Las combinaciones básicas de la resta que mejor aprende y utiliza el alumno son las que tienen como sustraendo el cero, y cualquier otro número como minuendo: 9 - 0; 3 - 0; 5 - 0; 23 - 0; etc. La razón es obvia: la diferencia es igual al minuendo. Las siguientes combinaciones que más fácilmente aprende y aplica el niño son en las que no hay descomposición de decenas, no hay "llevadas": 9 - 3; 8 - 2; etc. Las más difíciles son, naturalmente, las que llevan descomposición de decenas: 17 - 9; 12 - 5, etc.

Es posible aplicar la propiedad uniforme de la sustracción de manera tal que el sustraendo correspondiente a una combinación que origina "llevadas" se convierta en cero. En ese caso, la sustracción sería realmente sencilla, puesto que sólo aparecerían combinaciones sin llevadas, en las que muchas de ellas serían de sustraendo cero. Veamos con un ejemplo muy sencillo. Sea la diferencia 22 - 14. Si le sumamos 6 al sustraendo, éste se convierte en 20. Naturalmente, hay que sumar también 6 al minuendo, convirtiéndose así en 28. Es decir, se origina la siguiente sustracción: 28 - 20.

Pongamos otro ejemplo más complicado, como es el que aparece en la Tabla 32. Se trata de la sustracción 5183 -2329.

A		5	1	8	3	B		5	1	8	4
	-	2	3	2	9		-	2	3	3	0
											4
C		5	8	8	4	D		5	8	8	4
	-	3	0	3	0		-	3	0	3	0
				5	4			2	8	5	4

Tabla 12

A. Aparece planteada la operación en formato tradicional.

B. En la cifra de las unidades hay "llevada". Para evitarlo, se suma 1 a la cifra del sustraendo, obteniendo 0 y llevándose 1, que se añade a la cifra de las decenas del sustraendo. Queda este convertido en 2330. Se añade también 1 a la cifra de las unidades del minuendo, y se obtiene así un nuevo minuendo: 5184. Ahora ya se convierte en una combinación muy fácil: 4 - 0. Se expresa el resultado.

C. Como no hay llevadas, se sustrae en la cifra correspondiente a las decenas (8 - 3), que es 5. A continuación, y con el fin de convertir las 3 centenas del sustraendo de la cuenta inicial en 0, se le añaden 7 más. El sustraendo queda convertido en 3030. Esas 7 centenas se le añaden al minuendo, que se convierte en 5884.

D. La cuenta ya no requiere más transformaciones y es muy fácil terminarla. Comparemos los términos de la cuenta A con los de la cuenta C, y nótese cómo en este caso las dificultades prácticamente desaparecen.

En definitiva, este procedimiento permite una solución al problema de las llevadas bastante sencillo, por cuanto el niño tiene que saber:

- Las combinaciones que tienen como sustraendo 0.
- Las combinaciones que no impliquen "llevada".
- Los complementarios a 10 de los dígitos que van del 1 al 9, para convertir en 0 el sustraendo, y saber sumar estos complementarios a la cifra correspondiente del minuendo.

La actuación puede ser igual de mecánica y sin sentido que la forma tradicional de abordar la resolución de la resta con descomposición de unidades. Pero requiere menos hechos de memoria. Incluso toda la cuenta se podría hacer con esta técnica, con lo cual el alumno podría aprender a restar conociendo la tabla de sumar y los complementarios a 10. El resultado de cada orden de unidades es, precisamente, la suma que se indica. Veamos el ejemplo:

- Sea la operación 315 - 129.
- Se suma 1 a las unidades del sustraendo. Tenemos como sustraendo 130. Se suma 1 a las unidades del minuendo. Obtenemos 316. Diferencia hasta ahora: 6.
- Se suma 7 a las decenas del sustraendo. Tenemos como sustraendo 200. Se suma 7 a las unidades del minuendo. Obtenemos 386. Diferencia hasta ahora: 86.
- Se suma 8 a las centenas del sustraendo. Tenemos como sustraendo 1000. Se suma 8 a las centenas del minuendo. Obtenemos 1186. Diferencia final: 186.

Este sistema es más sencillo, rápido y seguro que el tradicional, aunque se pone en marcha pocas veces. Pero se corre el riesgo de que se entienda tan poco como aquél. Por ello, entendemos que la mejor manera de abordar el problema de las llevadas en la resta se contempla en los apartados siguientes.

5.5. *La descomposición de la unidad de orden superior*

Es el método que progresivamente se va imponiendo en las escuelas y que va desplazando, no con la velocidad debida, al tradicional. La esencia del mismo es muy sencilla: se trata de descomponer la unidad de orden superior en diez unidades de orden inferior, que se añaden a ésta, por lo que siempre se obtendrá un minuendo superior a nuevo.

Emplear dinero como modelo suele dar buen resultado y ofrece un transunto real de la estructura matemática a la que se acoge. En el ejemplo (Tabla 33) que se va a utilizar, se emplean monedas de un euro, billetes de diez euros y de cien euros.

El alumno debe sustraer 7 monedas de euro, pero sólo tiene 3 sueltas. ¿No puede hacerlo? ¿Cómo no, si hay 723 euros? Lo que hay que hacer es disponer la misma cantidad, de manera tal que haya más monedas de un euro. Por ello, se cambia un billete de diez euros en monedas de un euro. Ahora ya hay 13 euros, por lo que no hay problema. A continuación debe sustraer 4 billetes de 10, pero sólo tiene 2. Repite la operación y cambia un billete de 100 euros. Ahora tiene 11 billetes, por lo que puede sustraer sin problema. Finalmente, sustrae los billetes de 100 euros, sin mayores problemas.

En un primer momento es bueno que el alumno escriba el minuendo con los ajustes necesarios. La Tabla 33 B es un ejemplo. En un segundo momento, puede utilizar el sistema de marcar el orden de unidades del cual ha "cambiado" una de ellas (Tabla 33, C). Con esta transición se evitarán muchos problemas.

3.4. *El enfoque correctivo. La equivalencia número-cantidades*

En este apartado queremos ir al fondo del problema de las "llevadas" en la resta. En la cuenta tradicional, y sea cual sea el método que se emplee, existe una dificultad insalvable: el sistema de notación de los números impide cualquier flexibilidad y no permite que el número escrito refleje el modo concreto en que se expresa la cantidad. Vamos a aclarar esto con un ejemplo.

En el último ejercicio el minuendo era de 723 euros. Tal y como está escrito, existe correspondencia con la cantidad real si fueran siete billetes de cien euros, dos billetes de diez euros y tres monedas de euro (Tabla 33). Pero 723 euros se pueden tener de muchas maneras, aunque sólo se pueda escribir de una. Esa cantidad podría aparecer como un billete de quinientos euros, uno de doscientos, un billete de veinte y tres monedas de euro. Esta manera de plasmar el dinero no tiene ninguna posibilidad de ser reflejada en la notación escrita: seguirá apareciendo 723. Las unidades van de diez en diez y nada más, y cada unidad sólo permite una cifra. Luego todos los ajustes se han de hacer "en la cabeza" y a veces contra la evidencia de la realidad.

			
	7	2	3
-	2	4	7

Tabla 33

Demos un paso más (Tabla 34). Supongamos que la cantidad anterior está formada por seis billetes de cien (600), once de diez (110) y trece monedas de euro (13). Tenemos la misma cantidad, pero a la hora de resolver manipulativamente la sustracción 723 - 247, no se necesita llevar a cabo ningún tipo de transformación, ni cambio, ni cosa que se le parezca: se quitan dos billetes de cien, cuatro de diez, y, por último, siete monedas de un euro.

			
	6	11	15
-	2	4	7

Tabla 34

Esto ocurre con casi todas las cantidades. Los huevos vienen en docenas, las cajas de botellas pueden venir de seis en seis, las bolsas de caramelos pueden venir en cantidades variables. Por ello, la forma de atajar la dificultad de las llevadas de la resta desde la raíz, consiste en crear en el alumno la capacidad de imaginarse la cantidad que le expresa el número en distintas versiones, con distintas composiciones, de manera tal que elija, entre todas las posibles, la que más le facilite la realización de la cuenta.

En un primer momento, se debe facilitar la tarea planteando al alumno formatos que permitan más de una cifra en el lugar correspondiente de las unidades. Sigamos con otro ejemplo, como el que se expone en la Tabla 35.

	500 €	200 €	100 €	50 €	20 €	10 €	5 €	1 €	Total
A	2					3		8	1038
B		4	2		1	1	1	3	1038
C	1	1	1	2		12	2	8	1038
D			8	3	4		1	3	1038

Tabla 35

Se trata de efectuar la operación 1038 - 693. Salvo porque no hay billetes de 1000 euros, la disposición de la cantidad en la fila A de la tabla es la que más se parece a la notación decimal. Sin embargo, restar de esa cantidad el sustraendo implica transformar y cambiar billetes de 500 y 100 euros. Las filas que corresponden a las letras B, C y D expresan otras posibilidades de tener, de forma concreta, la cantidad de 1038 euros. De la disposición expresada en las letras C y D, se puede sustraer directamente 693 sin necesidad de ninguna transformación:

C. Se extrae un billete de 500 y uno de 100 (600). Se extraen nueve billetes de los trece de 10. Por último, se extraen las tres monedas de un euro.

D. Se extraen seis billetes de 100 euros (600). Se extraen un billete de 50 y dos de 20 (90). Por último, se extraen las tres monedas de un euro (3).

En resumen, el proceso se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Se adquiere la capacidad de representar la misma cantidad en disposiciones diferentes. Formatos como los ofrecidos en la Tabla 35 facilitan la ejercitación. La sustracción se efectúa a partir de la disposición que mejor se adapte a los requerimientos del sustraendo. En el caso de la Tabla 35, la disposición C o la D.

2. Se cambia el minuendo, reflejando no la notación decimal, sino las agrupaciones reales que se presentan. Es el caso recogido en la cuenta de la derecha de la Tabla 36.

3. Se van sustituyendo poco a poco las agrupaciones reales, sustituyéndolas por algún signo convencional, como puede ser un punto o cualquier otro modo de llamada (Tabla 36, operación central).

4. Finalmente, la cuenta se plantea sin ningún tipo de refuerzo, recordatorio o ayuda (Tabla 36, operación de la izquierda).

	C	D	U			C	D	U			C	D	U
	5	2	6			5 •	2 •	6			4	12	6
S	2	7	4		-	2	7	4		S	2	7	4

Tabla 36

Capítulo XIII

LA RESTA O SUSTRACCIÓN. ALGORITMO ABIERTO BASADO EN NÚMEROS (I)

1. INTRODUCCIÓN

La resta es una operación difícil. Lo hemos debido decir ya varias veces. En realidad, abarcamos con ese nombre operaciones diversas, pero que admiten un procedimiento común de resolución. Cada modelo de los que aquí explicamos conlleva manipulaciones muy distintas, y el tener que aplicarles a todos ellos el mismo algoritmo supone una transformación de cada uno de ellos y un proceso de abstracción que no es sencillo llevar a cabo.

Cuando hablamos de restar, casi todos pensamos en una cantidad determinada, de la que quitamos otra. No hay más que un número, y el que debemos quitar no está en ninguna parte, si no es en nuestra cabeza. Los problemas de restar que tienen como soporte este modelo parecen los más sencillos: quitar, gastar, entregar, perder, etc., apuntan claramente a la operación de disminuir. Sin embargo, cuando queremos que el niño realice manipulativamente, y con apoyo numérico, este problema, nos damos cuenta que es de los más difíciles, porque tiene que "quitar" un número que sólo está en la cabeza, y las descomposiciones que tiene que efectuar apenas si tienen apoyo empírico. Sin embargo, cuando el niño ha alcanzado un cierto nivel de madurez y de soltura en el manejo de los números (3º o 4º de Primaria), estos problemas vuelven a ser muy sencillos. ¿Qué consecuencia queremos extraer de lo que hemos dicho? Pues que si, al pensar que estos problemas son muy fáciles, iniciamos a los niños en 1º con este modelo, tenemos muchas probabilidades de que los alumnos no lo sepan hacer.

El modelo llamado de "escalera descendente" es similar al anterior, pero aquí hay que descubrir un número encerrado dentro de la cantidad inicial. Si quiero saber, teniendo treinta y ocho, cuántos me sobran si sólo me quiero quedar con diecisiete, he de retirar, como en el modelo anterior, pero con una gran diferencia: retiro sucesivamente del montón de objetos hasta dejar las indicadas. Luego, sólo tengo que contar los que he apartado. Por eso, este modelo es, manipulativamente y para los niños pequeños, mucho más sencillo que el anterior. Desde otro punto de vista, a la hora de hacerlo con números, requiere un tipo de cálculo completamente diferente: saber contar hacia atrás.

El modelo de "escalera ascendente" es peculiar. Es inverso al anterior, y es de hecho más una suma que una resta. Parte de un número dado (por ejemplo, doce) y ha de ir añadiendo a ese número hasta llegar al pedido (por ejemplo, 23). Lo que he puesto y añadido es el resultado de la operación. Las destrezas de cálculo que requiere son, fundamentalmente, contar hacia adelante, que es algo que se da mejor que contar hacia atrás. Tal vez por ello, muchos niños adoptan este modelo como resumen de todos los demás y como algoritmo estándar. Casi permite hacer los cálculos mentalmente, aunque se utilicen utillajes.

El modelo de comparación es, a priori, el más complicado y el que peor conceptualiza el chico. A un alumno de Primero se le pueden mostrar dos cantidades diferentes (por ejemplo, 8 y 4 lápices), y él sabe cuál es mayor y cuál es menor. Cuando se le pregunta que cuántos más tiene una que otra, la gran mayoría no lo sabe. Sólo los más capaces responden dando una explicación plausible. Y sin embargo, cuando utilizamos números en lugar de cosas y lo hacemos a través del formato ABN correspondiente, resolver este tipo de problemas se convierte en algo sencillo: se trata, simplemente, de quitar lo mismo de ambas cantidades hasta que desaparezca la más pequeña. Lo que queda es el resultado. Eso lo hace cualquier sujeto con facilidad.

Resumiendo: no es sencillo, ni está claramente establecido, cuál es el mejor trayecto de progreso en la adquisición de las destrezas y habilidades necesarias para efectuar sustracciones. Las experiencias que hemos llevado a cabo en varios centros nos indican que la secuencia debe ser: comparación, escalera ascendente, escalera descendente y detracción. Es el camino que se ha seguido aquí.

2. LOS CUATRO PROCESOS DE MANIPULACIÓN DE LA SUSTRACCIÓN

Siempre se ha considerado la sustracción una operación difícil. No es fácil de conceptualizar por los niños, ni muchas veces tiene lógica el propio proceso de resolución. Por otro lado, los problemas de restar son muy numerosos y bastantes diferentes entre sí, pese a que todos ellos se resuelvan con la misma operación.

Hay trece problemas distintos de restar, como hemos visto con anterioridad. Sin embargo, si consideramos no sólo los problemas, sino las manipulaciones que hemos de hacer con los datos en la realidad, vemos que el número trece se reduce bastante.

En efecto. Cuando hablamos de restar o sustraer manipulando los objetos que funcionan como datos, no hay más procesos de manipulación que los cuatro que se enumeran a continuación:

- Manipulación por detracción
- Manipulación por igualación a un número mayor, o en escalera ascendente
- Manipulación por igualación a un número menor, o en escalera descendente
- Manipulación comparativa

Veremos cada uno de los tipos y sus consecuencias para la enseñanza.

2.1. *Manipulación por detracción*

En el caso más sencillo, más representado y que proporciona más ejemplos de problemas escolares. De alguna forma, es el prototipo de la resta. Consiste en, partiendo de una cantidad que tenemos delante, quitar una indicada y contar lo que nos queda. Hay, pues, una sola cantidad, a la que se le detrae otra que se indica. Cuatro problemas diferentes requieren esta manipulación:

- Cambio 2: "Tengo 8 € en la hucha. Saco 3. ¿Cuántos me quedan?".
- Cambio 5: "Mi abuelo me ha dado 3 €, y ahora tengo 11. ¿Cuántos tenía antes de que me dieran nada?".
- Combinación 2: "Tengo 12 caramelos. 7 son de menta, y los demás de fresa. ¿Cuántos son de fresa?".
- Comparación 4: "Silvia tiene 9 € y Lidia tiene 3 € menos que ella. ¿Cuánto dinero tiene Lidia?".

En todos los casos se requiere una cantidad única, de la que se detrae algo. En el caso de CA2, quitamos de lo que hay. En el caso de CA5, el criterio de detracción es la acción temporal, el volver atrás en el tiempo. En CO2 se detrae en función de una característica que se fija en un conjunto de cosas (ser de fresa). Finalmente, en CM4 se asume que Lidia tiene de partida los mismos euros que Lidia y, una vez que ya tiene esa cantidad, se le detraen los tres euros.

Manipulativamente, es un problema muy sencillo de resolver: vamos quitando hasta que alcanzamos la cantidad indicada y, una vez hecho, contamos los que quedo. Ese es el resultado final. Pero claro, el problema surge cuando hay que hacerlo con números, que no permiten esa manipulación, y especialmente cuando los números son grandes y no podemos controlar mentalmente los que quitamos, los que nos quedan por quitar y los que van quedando. Por ello, el algoritmo que quiera reflejar este tipo de manipulación debe tener tres partes: la que refleja las que se quitan, la que representa la cantidad que aún queda por detraer y, finalmente, lo que va quedando. El resultado es la cantidad que queda cuando ya no hay que detraer nada más.

325 − 136 =		
Quito	Quedan por quitar	Restan

El algoritmo ABN que traslade este tipo de manipulación lo ilustramos en las tablas siguientes. Partimos del problema: "En el colegio hay 325 niños. 136 se van de excursión. ¿Cuántos niños y niñas quedan?".

En la primera columna se van poniendo las cantidades que se detraen. En la segunda, lo que queda por quitar, y en la última lo que va restando de la cantidad inicial. El ejemplo que ponemos fue resuelto por una alumna experta de 2º de Primaria. Lo realiza en dos pasos.

325 − 136 =		
Quito	Quedan por quitar	Restan
125	11	200

En el primero, detrae 125, que resta de 136.

325 − 136 =		
Quito	Quedan por quitar	Restan
125	11	200
11	0	**189**

En el segundo, detrae los 11 restantes y termina la operación. Se destaca el resultado.

2.2. *Manipulación por igualación a un número mayor, o en escalera ascendente*

Se hace cuando se parte de una cantidad y se quiere ir añadiendo hasta llegar a otra mayor que sabemos cuál es. El alumno o alumna tiene delante de sí los objetos de los que parte, y va añadiendo hasta que llega al número deseado. Este proceso no está exento de dificultades. La más característica la presentan los alumnos de 1º de Primaria. En primer lugar, cuentan las que hay. Tras ello, van añadiendo y llevando la cuenta de la nueva cantidad que se va formando. Cuando llegan a la cantidad indicada, se dan cuenta de que no saben cuántas han puesto, porque al ir añadiendo no han separado las que se añadieron de las que ya había. Es conveniente dejarles cometer el error, porque, como muy tarde, a la segunda vez no lo vuelven a cometer.

Hay una gran diferencia entre resolver este cálculo manipulativamente o con los signos de los números. Manipulativamente el niño va añadiendo, y centra su atención exclusivamente en la cantidad que va formando. Cuando ha llegado a la que se le pedía, entonces cuenta las piezas que ha añadido. Pero esto no se puede hacer cuando se trabaja con números, tienes que llevar "dos cuentas" a la vez: las que pones y el número que alcanzas cada vez. De esta forma, el resultado hay que elaborarlo, y se obtiene sumando todas las que se han ido añadiendo.

Dos son los problemas que exigen este tipo de manipulación:

- Cambio 3: "Tenía 8 canicas, y después de jugar tengo 12. ¿Cuántas he ganado?".
- Igualación 1: "Yoli tiene 9€, y Rubén 5. ¿Cuántos € más debe tener Rubén para tener el mismo dinero que Yoli?".

El algoritmo ABN que resuelve esta manipulación requiere sólo dos columnas. La primera recoge la cantidad que se va añadiendo. La segunda, lo que se alcanza cada vez. Se pone a continuación un ejemplo desarrollado por un alumno competente de 3º de Primaria.

4 5 2 8 - 2 0 9 4 =							
Añado	Llego a	Añado	Llego a	Añado	Llego a	Añado	Llego a
2000	4094	2000	4094	2000	4094	2000	4094
		400	4494	400	4494	400	4494
				30	4524	30	4524
						4	4528
						2434	

Caben variantes que no afectan a la sustancia del algoritmo. Otro alumno se arreglaba mejor con esta disposición:

Hay que llegar a 4528	
AÑADO A	2094
4	2098
2400	4498
30	4528
2434	

La esencia es la misma, y la evolución del modelo desemboca, al final, en una unificación de las diversas variantes que han ido adoptando los alumnos.

2.5. *Manipulación por igualación a un número menor, o en escalera descendente*

Sería el caso inverso al anterior. Partimos de una cantidad, presente ante nosotros, y hemos de quitar de ella hasta que nos queda otra determinada. En la manipulación que se ajusta a más tipos de problemas:

- Cambio 4: "Ana tiene 14 canicas. Después de jugar le quedan 8. ¿Cuántas ha perdido?".
- Comparación 3: "Rosa tiene 8 €, y tiene 3 € más que Carlos. ¿Cuántos € tiene Carlos?".
- Igualación 2. "Marcos tiene 7 €. Raquel tiene 5. ¿Cuántos € tiene que perder Marcos para tener los mismos que Raquel?".
- Igualación 3. "Juan tiene 8 €. Si Rebeca ganara 5 tendría los mismos que Juan. ¿Cuántos € tiene Rebeca?".
- Igualación 6. "Marcos tiene 8 €. Si perdiera 5 tendría los mismos que Rafael. ¿Cuántos € tiene Rafael?".

Hay dos variantes que no afectan al modelo de algoritmo. O bien hay dos cantidades, en cuyo caso se quita de la mayor hasta que alcanza el tamaño de la pequeña (IG2), o hay una sola cantidad, y se tiene que quitar hasta dejar una cantidad dada (CA4). En cualquiera de los casos, se precisan sólo dos columnas: la que recoge las que se van quitando, y cuya suma dará el resultado, y la que indica la aproximación y llegada al número que se solicita.

Veamos el ejemplo 3789 – 1651:

3789 - 1651 =										
Quito	Llego a		Quito	Llego a		Quito	Llego a		Quito	Llego a
2000	1789		2000	1789		2000	1789		2000	1789
			100	1689		100	1689		100	1689
						30	1659		30	1659
									8	1651
									2138	

La variante que contemplamos en el anterior punto tiene aquí su cabida. Con el mismo ejemplo que se acaba de emplear, tendríamos:

Hay que bajar hasta 3651	
Le quito a	5789
2100	3689
30	3659
8	3651
2138	

2.4. Manipulación comparativa

Es la que se tiene que llevar a cabo para determinar o establecer en cuánto una cantidad es más pequeña o mayor que otra, que sirve de referente.

Suelen emplearse dos estrategias. La primera es la más espontánea, y la que se les ocurre a los niños cuando se les plantea, ante dos cantidades, cuál es mayor o más pequeña, y cuánto. Cuando los números son pequeños, el niño cuenta las que hay en la cantidad más pequeña (A), repite la acción en la cantidad mayor (B) y, en esta cantidad , las que no llega a contar son las que constituyen la diferencia. Esta estrategia se ejemplifica en la siguiente Tabla 37.

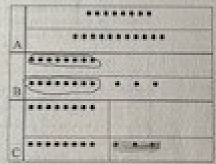

Tabla 37

La segunda se da cuando las cantidades a comparar son grandes, y el recurso a contar se puede hacer tedioso y pesado. Entonces, se retira de cada montón de objetos la misma cantidad a la vez, hasta que uno de los montones desaparezca. Lo que quede del otro es la diferencia, en más o en menos. La Figura 31 es un ejemplo de ello.

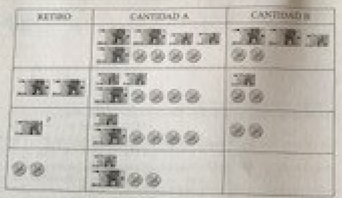

Figura 31

Esta estrategia lleva directamente al algoritmo ABN que soluciona este tipo de manipulación. Consta con tres columnas: la reservada a la cantidad que elimina, y las que recogen las dos cantidades que se separan. Hemos recogido una operación realizada por un alumno muy hábil y capaz, de 3º de Primaria.

4029 - 189 = 3840		
RETIRO	CANTIDAD A	CANTIDAD B
[illegible]	4029	189
109	3920	80
+20	3940	100
100	3840	0

Este formato es el que más gusta a los alumnos, y el que tienden a emplear espontáneamente. Las razones son dos. En primer lugar, no se tienen que preocupar de colocar en orden las que quitan o añaden, como en los algoritmos en escalera, con el fin de obtener el resultado con facilidad. Aquí pueden quitar de las dos cantidades en el orden y con el tamaño que deseen, que el resultado les aparecerá solo. En segundo lugar, si bien formalmente este modelo de algoritmo es idéntico al primero, hay una diferencia sutil: el niño, en el caso del modelo por detracción, debe "llevar la cuenta" del número que quita, que no está físicamente en ninguna parte. Aquí opera con dos cantidades reales y presentes, por lo que es mucho más sencillo el cálculo.

Los dos clásicos tipos de problemas de comparación son los que encajan con este modelo de manipulación y de algoritmo:

- Comparación 1: "El pueblo A tiene 1278 habitantes. El pueblo B tiene 744. ¿Cuántos habitantes más tiene A?".
- Comparación 2: "El pueblo A tiene 1278 habitantes. El pueblo B tiene 744. ¿Cuántos habitantes menos tiene B?".

Capítulo XIV
LA RESTA O SUSTRACCIÓN. ALGORITMO ABIERTO BASADO EN NÚMEROS (II)

1. MANIPULACIÓN POR COMPARACIÓN

El modelo de algoritmo ABN de comparación trata de establecer la diferencia que existe entre dos cantidades que están expresadas. Como siempre que se averigua una diferencia, esta puede ser en más o en menos. De ahí que sean dos los problemas que requieren de este modelo de manipulación:

- Comparación 1. "Lara tiene una colección de 12 muñecas, y Curri otra de 8 muñecas. ¿Cuántas muñecas más tiene Lara?".
- Comparación 2. "Lara tiene una colección de 12 muñecas, y Curri otra de 8 muñecas. ¿Cuántas muñecas menos tiene Curri?"

Desde un punto de vista manipulativo, no es tan sencillo como parece a primera vista. Para establecer la diferencia entre dos cantidades se suelen desarrollar dos tipos diferentes de manipulación, en función de si estas son pequeñas o grandes. Pero si consideramos su resolución a través del algoritmo ABN, y una vez que se ha alcanzado el concepto de comparación, entonces tenemos que es el modelo más fácil y por el se deben iniciar los alumnos en la resta o sustracción.

A. CANTIDADES PEQUEÑAS

Los niños de 1º de Primaria son capaces de apreciar si en un conjunto hay más o menos elementos que en otro. Subitizan (descubren de inmediato) las diferencias entre dos cantidades muy pequeñas: por ejemplo, 2 y 4 (Letra A en la Figura 52). Sin embargo, cuando las cantidades se hacen algo mayores (por ejemplo, 12 y 14 –letra B–) y se presentan sin estructura (Letra C), raramente son capaces de crear una estrategia de manipulación que les permita establecer la diferencia. En 2º de Primaria ya es corriente que la establezcan, y es siempre la misma: cuentan la cantidad menor, y cuentan ese número de objetos en la cantidad mayor. Los que quedan sin contar, constituyen la diferencia.

Figura 52

B. CANTIDADES GRANDES

Cuando las cantidades son mayores (más de dos decenas), la estrategia anterior se sigue aplicando, pero de una forma más práctica: se van retirando de ambas cantidades el mismo número de elementos, hasta que de la cantidad más pequeña no queda nada. Las piezas que quedan de la cantidad mayor es la diferencia. En el fondo, no se hace nada diferente de lo que hemos visto con anterioridad, pero sí se simplifica el proceso: no es lo mismo contar todos los elementos de la cantidad menor y después hacer lo mismo con la cantidad mayor, que ir retirando de cinco en cinco o la cantidad que se pueda, sin tener que ir acumulando resultados ni llevar cuenta de lo que se ha apartado. La Figura 53 permite hacerse una idea de la dificultad del trabajo.

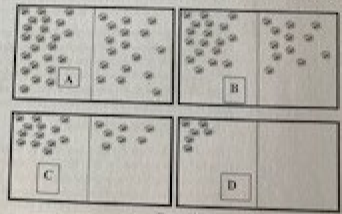

Figura 53

A. No es posible establecer las que hay por un simple golpe de vista. Habría que contarlas una a una. Por ello, se opta por ir eliminando de las dos partes la misma cantidad.

B. En la imagen de la derecha ya se han eliminado 5 de cada lado.

C. Se han vuelto a eliminar cinco en cada parte. En la imagen de la izquierda sólo quedan siete euros a la cantidad menor.

D. Se apartan a la vez los siete euros en los dos lados y atribuimos a la diferencia: una cantidad tiene seis euros más que la otra, o la otra tiene seis euros menos.

Esta manipulación retrata muy bien el algoritmo por comparación. De hecho, la mecánica del algoritmo es la reproducción fiel de las manipulaciones que se llevan a cabo.

El algoritmo ABN que resuelve este tipo de manipulación lo ilustramos en las tablas siguientes. Partimos del problema: "En el colegio hay 136 niños y 325 niñas. ¿Cuántos niños menos hay?"

325 – 136 =		
Quito	Cantidad menor	Cantidad mayor

En la primera columna, se van poniendo las cantidades que se detraen. En la segunda, lo que queda por quitar, y en la última lo que va quedando de la cantidad inicial o minuendo. El ejemplo propuesto fue resuelto por una alumna experta de 2º de Primaria. Lo realiza en dos pasos.

325 – 136 =		
Quito	Cantidad menor	Cantidad mayor
125	11	200

En el primero, detrae 125, que resta de 136.

325 – 136 =		
Quito	Cantidad menor	Cantidad mayor
125	11	200
11	0	189

En el segundo, detrae los 11 restantes y termina la operación. Se destaca el resultado.

Este algoritmo resulta muy sencillo por una razón muy simple: es el único en el que no hay que "llevar la cuenta" de las que se van quitando, cosa que no ocurre en los otros tres modelos. Por ello, admite actuaciones muy parsimoniosas, y es ideal comenzar con él para que se inicien los alumnos que tienen dificultades de aprendizaje o que les es más costoso desarrollar tareas de cálculo. En la siguiente secuencia, se puede observar cómo resolvería la misma sustracción un alumno que no se quiere arriesgar y toma todas las precauciones posibles. No hay que sumar las que se quitan, sino que el resultado aparece al final. Es, repetimos, el algoritmo más sencillo de todos.

325 – 136 =		
Quito	Cantidad menor	Cantidad mayor
100	36	225

325 – 136 =		
Quito	Cantidad menor	Cantidad mayor
100	36	225
10	26	215

325 – 136 =		
Quito	Cantidad menor	Cantidad mayor
100	36	225
10	26	215
10	16	205

325 – 136 =		
Quito	Cantidad menor	Cantidad mayor
100	36	225
10	26	215
10	16	205
5	11	200

325 – 136 =		
Quito	Cantidad menor	Cantidad mayor
100	36	225
10	26	215
10	16	205
5	11	200
10	1	190

325 – 136 =		
Quito	Cantidad menor	Cantidad mayor
100	36	225
10	26	215
10	16	205
5	11	200
10	1	190
1	0	189

2. LA SECUENCIACIÓN

Para este algoritmo es aconsejable seguir la secuencia de progresión que proponemos a continuación.

2.1. *Detracción de unidades*

En esta fase no es necesario utilizar el algoritmo, sino que los cálculos se tienen que realizar mentalmente. Son, de alguna forma, como la particular tabla de restar, son cálculos que deben estar muy consolidados y que, por ello, se deben practicar mucho. Se recomienda seguir la gradación que mostramos a continuación.

2.1.1. Tabla de sumar inversa

Se trata de trabajar con las combinaciones de la tabla de sumar, pero expresadas como una sustracción: 14 – 6 = ...; 16 – 7 = ...; etc. Para su aprendizaje se pueden ayudar de los recursos utilizados en la tabla de sumar. La recta numérica es muy útil, sobre todo para establecer el parecido entre los números y los objetos con los que se manipula, y de este modo se ayuda a conceptualizar este tipo de algoritmo. Para ello, es conveniente utilizar dos rectas: una para cada una de las cantidades.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

La ejercitación es bastante fácil. Se trata de marcar o señalar en la primera recta el número más pequeño o sustraendo, y en la siguiente el minuendo. A continuación, se marca el mismo número del sustraendo en el minuendo. Ahora ya sólo queda contar los números que hay a partir del sustraendo, hasta llegar al minuendo. Se muestra un ejemplo: 18 – 9 = 9.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

La progresión en la secuencia sigue los mismos pasos que la que se recomendará en el algoritmo por detracción. Ambos procedimientos son idénticos. La diferencia estriba en que en el modelo por detracción el sustraendo no existe. Esto es, no es una cantidad distinta de la del minuendo, mientras que en el presente modelo sí lo es. El resta es igual: hay que "quitar" del minuendo la cantidad menor, como se hacía en el caso de detracción.

Con esta aclaración, la secuencia que se propone es la que sigue a continuación.

2.2. *Comparación de unidades*

2.2.1. *Comparación con unidades*

Los pasos son:

- Sustracción sin descomposición de decenas
- Complementarios a diez
- Sustracción con descomposición de decenas

En la siguiente tabla se muestran cálculos graduados conforme se ha establecido:

Sin descomposición de decenas	9 – 6 = _; 7 – 4 = _
Complementarios a diez	10 – 6 = _; 10 – 3 = _
Desde decenas distintas	11 – 4 = _; 13 – 7 = _

2.2.2. *Ampliación de los cálculos anteriores*

En este paso, se debe generalizar el conocimiento adquirido en los cálculos anteriores a las decenas que el niño conoce. La progresión indicada aparece en la siguiente tabla:

Sin descomposición de decenas	29 – 3 = _; 27 – 4 = _
Complementarios a diez	40 – 6 = _; 40 – 3 = _
Desde decenas distintas	31 – 4 = _; 45 – 7 = _

2.3. *Comparación con decenas*

Como en el paso anterior, ya nos hemos ocupado de la comparación de unidades de números formados por decenas, aquí nos centraremos exclusivamente en el caso de las decenas. Hay tres escalones o pasos a seguir.

2.3.1. *Decenas completas*

Son los cálculos más sencillos. Se trata de "quitar" de minuendo y sustraendo decenas completas: 60 – 40 = ...; 80 – 30 = ...; etc. Recomendamos que, a pesar de su sencillez, se practiquen los cálculos con materiales, y no sólo con los signos.

Evidentemente, para este tipo de cálculos no es en absoluto necesario el empleo de ningún algoritmo.

2.3.2. *Decenas incompletas menos decenas completas*

Son también cálculos muy sencillos, y que no requieren del empleo del algoritmo: 65 –30 = ...; 88 – 20 = ...; etc. Si algún alumno tuviera algún grado de dificultad, le bastaría con practicar con el material que se emplears.

2.2.3. *Decenas incompletas menos decenas incompletas*

Se trata de cálculos algo más complejos, y que generalizan todos los anteriores. Se pueden dividir en tres pasos, escalonados en función de su dificultad:

A. DISTANCIA EXACTA ENTRE DECENAS: 48 – 38 = ...; 98 – 28 = ...

No se suele necesitar para estos cálculos el empleo del algoritmo, si bien es conveniente que, antes de realizar las operaciones mentalmente, se lleven a cabo con el material que se haya seleccionado.

B. DISTANCIA DE DECENAS Y UNIDADES, PERO SIN DESCOMPOSICIÓN

En el caso de 68 – 33 = ...; 44 – 21 = ...; etc. Es conveniente que todos los niños trabajen con el material y, posteriormente, introduzcan el algoritmo. Los sujetos más capaces prescindirán muy pronto de él, y realizarán estos cálculos mentalmente.

C. DISTANCIA DE DECENAS Y UNIDADES CON DESCOMPOSICIÓN DE DECENA: 68 – 39 = ...; 41 – 27 = ...; etc.

Estas operaciones requieren ya el uso del algoritmo. Son muy importantes porque van a suponer la ejercitación básica que luego se generalizará a números mayores.

No se debe plantear aquí la denominada "llevada". Lo que sí se van a encontrar los niños es que, a veces, van a tener que eliminar unidades sueltas y no tienen más que decenas completas. Para ello, deben cambiar una unidad mayor por su equivalente en unidades más pequeñas. Si se trabaja con palillos, se deshace una decena y se dejan los palillos sueltos. Si se calcula con dinero, se cambia el billete por su equivalente en moneda suelta.

2.4. *Detracción de centenas*

Las sustracciones en las que minuendo y sustraendo son centenas no presentan dificultades distintas las que ya se han enfrentado los alumnos en las fases anteriores. Lo nuevo, en este momento, es la generalización de lo que ya saben hacer a números más grandes.

La progresión recomendada contempla dos etapas diferenciadas. Una primera, sencilla, que no requiere el uso de algoritmo y que se puede resolver mentalmente, y una segunda que sí lo requiere.

2.4.1. *Sin necesidad de empleo del algoritmo*

Esta etapa se desglosa en dos pasos diferentes.

A. DETRACCIÓN DE CENTENAS COMPLETAS

Es el caso de 500 – 400 =...; etc.

B. DETRACCIÓN EN CENTENAS INCOMPLETAS, DE CENTENAS COMPLETAS

Es el caso de 784 – 300 =...; 505 – 100 =...; etc.

2.4.2. *Con empleo del algoritmo*

Las dificultades de esta fase conviene escalonarlas, siguiendo la siguiente progresión.

A. DETRACCIÓN EN CENTENAS COMPLETAS, DE CENTENAS CON DECENAS

Es el caso de 500 – 350 =...; 700 – 280 =...; etc.

B. DETRACCIÓN EN CENTENAS CON DECENAS, DE CENTENAS CON DECENAS

Es el caso de 530 – 350 =...; 540 – 280 =...; etc.

C. DETRACCIÓN EN CENTENAS COMPLETAS, DE CENTENAS INCOMPLETAS

Es el caso de 500 – 350 = ...; 700 – 249 = ...; etc. Este tipo de cálculo es de los que tienen más dificultades si se usa el algoritmo tradicional. Sin embargo, con el algoritmo ABN no plantea problemas. Una niña de 2º de Primaria hizo de esta forma la siguiente operación:

	295	300
350	45	150
45	0	305

Su cálculo fue claro: la mitad de 600 es 300, y la de 100 es 50. Lo demás resulta evidente.

D. DETRACCIÓN EN CENTENAS INCOMPLETAS, DE CENTENAS INCOMPLETAS

En el caso de 548 – 354 = ...; 796 – 289 = ...; etc. Este cálculo comprende todos los explicados anteriormente.

3. LOS PROBLEMAS DE COMPARAR

Como se señaló al principio, sólo hay dos problemas que se ajustan al formato de comparación: Comparación 1 y Comparación 2. Son igual de sencillos, y desde el primer momento se han de acostumbrar los alumnos a dar la diferencia indistintamente como "más" o como "menos". Por ello, hablaremos en general del problema de comparar, y no de CM1 y CM2 como problemas distintos y separados.

REPRESENTACIÓN DRAMATIZADA. Son muchas las actividades que se desarrollan en la escuela que pueden facilitar ejemplos para comparaciones directas evidentes (estaturas de los niños) o no evidentes, pero que sí hay una diferencia que se puede constatar (los pesos de los niños). Los niños son un buen material, y la iniciación en la estadística otra buena manera de practicar, comparando entre las frecuencias que tienen las variables que estudiemos: niños y niñas, con gafas y sin gafas; rubios y morenos; con hermanos y sin hermanos; etc. El propio material escolar es fuente de muchas comparaciones.

Insistimos: hay que preguntar siempre por más y por menos. Y eso lo puede contestar el alumno si tiene delante de sí los objetos o el material con el que trabajamos. Ante una comparación entre siete y cuatro euros, teniendo delante los euros, el niño no sólo puede contestar quién tiene más o menos, sino también cuántos hay que poner para igualar, o cuántos hay que quitarle a la mayor para hacerla igual a la pequeña.

Irina tiene

Yolanda tiene

¿Cuántos euros más tiene Irina?

¿Cuántos euros menos tiene Yolanda?

¿Cuántos euros más tiene que tener Yolanda para tener los mismos que Irina?

¿Cuántos euros debe gastar Irina para que le queden los mismos que a Yolanda?

Figura 54

Para un adulto, los números pueden representar en su mente la cantidad real a la que se refieren. Pero los niños no tienen esa experiencia. Para darnos cuenta de la diferencia entre unos y otros, basta con plantearles a los niños la misma situación que plantea la Figura 54 (esto es, los niños delante de dos colecciones de 8 y 5 €, que pueden tocar y contar y mover) en forma de problemas verbales. Serían así:

- Irina tiene 8 €. Yolanda tiene 5. ¿Cuántos euros más tiene Irina?
- Irina tiene 8 €. Yolanda tiene 5. ¿Cuántos euros menos tiene Yolanda?
- Irina tiene 8 €. Yolanda tiene 5. ¿Cuántos euros le deben dar a Yolanda para que tenga los mismos que Irina?
- Irina tiene 8 €. Yolanda tiene 5. ¿Cuántos euros debe perder Irina para que tenga los mismos que Yolanda?

Bajan mucho los aciertos y los niños, en muchos casos, dan respuestas al azar.