

# TALLER DE PROBLEMAS

1º CICLO

# SECUENCIACIÓN

Nivel	Tipo de problema
1º	CA 1, CA 2, CO 1
2º	CA 4, CM 3, CM 4, IG 5, IG 6, M1, M2, M3, DP
3º	CA 6, CO 2, CM 2, CM 1, IG 2, IG 1, IG 3, M1, M2, M3, DP, DA
4º	CA 3, CA 5, CM 5, CM 6, IG 4, RI 2, RI 1
5º	CM 5, CM 6, RI 3, RI 4, RI 5, RI 6, PC 1
6º	CM 5, CM 6, RI 3, RI 4, RI 5, RI 6, PC 2
4º/5º/6º	<b>MULTIPLICACIÓN/DIVISIÓN ESCALARES: COMPARACIÓN Y FÓRMULAS.</b>  La que se indica en la columna de nivel académico
3º/4º/5º/6º	<b>PROBLEMAS DE DOS OPERACIONES</b>

## PROBLEMAS DE CAMBIO (CA)

- Se trata de problemas en los que se parte de una cantidad, a la que se añade o se le quita otra de la misma naturaleza.
- En los problemas de CAMBIO se puede preguntar por la cantidad final, por la cantidad resultante de la transformación, y por último la cantidad inicial.
- Cada una de estas tres posibilidades se puede enfocar desde dos puntos de vista: la cantidad crece o decrece.
- De aquí surgen los 6 tipos de problemas de CAMBIO:

TIPO DE PROBLEMAS	NIVEL ACADÉMICO	EJEMPLOS
<p style="text-align: center;"><b>CAMBIO 1 (CA1)</b></p> Problema de sumar. Se conoce la cantidad inicial. Se le hace crecer. Se pregunta por la cantidad final.	1er Ciclo I 1º E. Primaria 6 años.	“Tengo 12€. Mi tío me da 4€. ¿Cuántos euros tengo ahora?”
<p style="text-align: center;"><b>CAMBIO 2 (CA2)</b></p> Problema de restar: se parte de una cantidad inicial a la que se le hace disminuir. Se pregunta por la cantidad final.	1er Ciclo I 1º E. Primaria 6 años.	“Tengo 12€. Le doy a mi hermano 4€ ¿Cuántos euros tengo ahora?”
<p style="text-align: center;"><b>CAMBIO 3 (CA3)</b></p> Problema de restar: se conoce la cantidad inicial y se llega, mediante una transformación, a una cantidad final conocida mayor. Se pregunta por el aumento (transformación)	Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 7 - 8 años	“Tengo 12€. Mi tío me da dinero. Ahora tengo 16 €. ¿Cuántos euros me ha dado mi tío?”
<p style="text-align: center;"><b>CAMBIO 4 (CA4)</b></p> Problema de restar: Se parte de una cantidad inicial y, por una transformación, se llega a una cantidad final conocida y menor que la inicial. Se pregunta por la transformación.	Ciclo Iº-IIº 2º E. Primaria 7 - 8 años	“Tengo 12€. Le doy dinero a mi tío. Ahora me quedan 8 €. ¿Cuántos euros le he dado a mi tío?”
<p style="text-align: center;"><b>CAMBIO 5 (CA5)</b></p> Problema de restar: se tiene que averiguar la cantidad inicial conociendo la cantidad final y lo que ha aumentado. Se pregunta cantidad inicial.	Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 8 - 9 años	“Mi tío me da 4€. Con ellos reúno 12€. ¿Cuántos euros tenía antes de que mi tío me diera dinero?”
<p style="text-align: center;"><b>CAMBIO 6 (CA6)</b></p> Problema de sumar: se tiene que averiguar la cantidad inicial y se conoce la cantidad final y su disminución. Se pregunta cantidad inicial.	Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 8 años	“Le he dado a mi tío 4€. Me quedan 8 €. ¿Cuántos euros tenía antes de darle dinero a mi tío?”

### SECUENCIACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE CAMBIO

PRIMER CICLO		SEGUNDO CICLO	
1º	2º	3º	4º
CA 1, CA 2	CA 4	CA 6	CA 3, CA 5

## PROBLEMAS DE COMBINACIÓN (CO)

- Se trata de problemas en los que se tienen dos cantidades, las cuales se diferencian en alguna característica.
- En los problemas de COMBINACIÓN se puede preguntar por la cantidad total que se obtiene cuando se reúnen las anteriores, o cuando conociendo la total y una de aquellas, se quiere saber cuál es la otra.
- De aquí surgen los 2 tipos de problemas de COMBINACIÓN.

TIPO DE PROBLEMAS	NIVEL ACADÉMICO	EJEMPLOS
<b>COMBINACIÓN 1 (CO1)</b> Problema de sumar: se conocen las dos partes y se pregunta por el todo.	1er Ciclo I 1º E. Primaria 6 años.	"En mi clase hay 13 niñas y 11 niños. ¿Cuántos somos en total?"
<b>COMBINACIÓN 2 (CO2)</b> Problema conmutativo y de restar: es el problema inverso al anterior, puesto que se conoce el todo y una de las partes, y se pregunta por la otra.	Ciclo IºIIº 2º-3º E. Primaria 8 años	"En mi clase hay 24 niñas y niños. Si hay 13 niñas, ¿cuántos niños hay?"

### SECUENCIACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE COMBINACIÓN

PRIMER CICLO		SEGUNDO CICLO	
1º	2º	3º	4º
CO 1		CO 2	

## PROBLEMAS DE COMPARACIÓN (CM)

- Problemas en los que se comparan dos cantidades. Los datos del problema son precisamente esas cantidades y la diferencia que existe entre ellas. De estas dos cantidades, una es la comparada y otra la que sirve de referente. La diferencia es la distancia que se establece entre ambas.
- En los problemas de COMPARACIÓN se puede preguntar por la diferencia si se conocen las dos cantidades, por la cantidad comparada cuando se conocen el referente y la diferencia, o por la cantidad referente, si se conocen la comparada y la diferencia.
- Cada una de estas tres posibilidades se puede enfocar desde dos puntos de vista: si preguntamos por cuántos más o por cuántos menos.
- De aquí surgen los 6 tipos de problemas de COMPARACIÓN

TIPO DE PROBLEMAS	NIVEL ACADÉMICO	EJEMPLOS
<p><b>COMPARACIÓN 1 (CM1)</b></p> <p>Problema de restar: Conocemos las dos cantidades y se pregunta por la diferencia en el sentido del que tiene más. Problema de INCONSISTENTE. Es difícil porque la formulación del problema induce al error, ya que el alumno/a asocia “añadir” a “sumar”</p>	<p>Ciclo Iº-IIº 3º E. Primaria 8 años</p>	<p>"Mi abuelo tiene 68 años, y mi padre tiene 41. ¿Cuántos años más que mi padre tiene mi abuelo?"</p>
<p><b>COMPARACIÓN 2 (CM2)</b></p> <p>Problema de restar: conocemos las dos cantidades y se pregunta por la diferencia en el sentido del que tiene menos.</p>	<p>Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 7 - 9 años</p>	<p>"Mi abuelo tiene 68 años, y mi padre tiene 41. ¿Cuántos años menos que mi abuelo tiene mi padre?"</p>
<p><b>COMPARACIÓN 3 (CM3)</b></p> <p>Problema de sumar: se conoce la cantidad del 1º y la diferencia “en más” del 2º. Se pregunta por la cantidad del 2º.</p>	<p>Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 8-9 años</p>	<p>"Mi padre tiene 41 años, y mi abuelo tiene 27 años más que él. ¿Cuántos años tiene mi abuelo?"</p>
<p><b>COMPARACIÓN 4 (CM4)</b></p> <p>Problema de restar: se conoce la cantidad del 1º y la diferencia “en menos” del 2º. Se pregunta por la cantidad del 2º. Problema para el 1º Ciclo de EP aunque algunos alumnos/as no lo dominan hasta el 2º Ciclo.</p>	<p>Ciclo Iº 2º E. Primaria 7-8 años</p>	<p>"Mi abuelo tiene 68 años, y mi padre tiene 27 años menos. ¿Cuántos años tiene mi padre?"</p>
<p><b>COMPARACIÓN 5 (CM5)</b></p> <p>Problema de restar: se conoce la cantidad del 1º y su diferencia “en más” con la del 2º. Se pregunta por cantidad del 2º. Problemas para el 2 - 3º Ciclo de E P, y requiere mucho entrenamiento.</p>	<p>Ciclo IIº-IIIº 3º-6º E. Primaria 8-11 años</p>	<p>"Mi abuelo tiene 68 años, y tiene 27 años más que mi padre. ¿Cuántos años tiene mi padre?"</p>
<p><b>COMPARACIÓN 6 (CM6)</b></p> <p>Problema de sumar: se conoce la cantidad del 1º y su diferencia “en menos” con la del 2º. Se pregunta por cantidad del 2º. Problemas para el 2º - 3º Ciclo de E P, y requiere mucho entrenamiento.</p>	<p>Ciclo IIº-IIIº 3º-6º E. Primaria 8-11 años</p>	<p>"Mi padre tiene 41 años, y tiene 27 años menos que mi abuelo. ¿Cuántos años tiene mi abuelo?"</p>

## SECUENCIACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE COMPARACIÓN

PRIMER CICLO		SEGUNDO CICLO		TERCER CICLO
1º	2º	3º	4º	5º/6º
	CM 3, CM 4	CM 2, CM 1	CM 5, CM 6	CM 5, CM 6

# PROBLEMAS DE IGUALACIÓN (IG)

- Problemas que contienen dos cantidades diferentes, sobre una de las cuales se actúa aumentándola o disminuyéndola hasta hacerla igual a la otra, de estas dos cantidades, una es la cantidad a igualar y la otra es la cantidad referente. La transformación que se produce en una de dichas cantidades es la igualación.
- La diferenciación con la categoría de comparación está en que cuando se compara no se añade ni se quita nada, cuando se iguala necesariamente se añade o quita algo.
- En los problemas de IGUALACIÓN se puede preguntar por la cantidad a igualar, por la referente o por la igualación.
- Cada una de estas tres posibilidades se puede enfocar desde dos puntos de vista: según que la igualación sea de añadir o de quitar.
- De aquí surgen los 6 tipos de problemas de IGUALACIÓN.

TIPO DE PROBLEMAS	NIVEL ACADÉMICO	EJEMPLOS
<p><b>IGUALACIÓN 1 (IG1)</b></p> <p>Problema de restar: conocemos cantidades del 1º y del 2º. Se pregunta por el aumento de la cantidad menor para igualarla a la mayor.</p> <p>Problema INCONSISTENTE. Es difícil porque la formulación del problema induce al error, ya que el alumno/a asocia “añadir” a “sumar”.</p>	<p>Ciclo IIº 3º- 4º E. Primaria 9 - 10 años</p>	<p>“Marcos tiene 8 euros. Raquel tiene 5 euros. ¿Cuántos euros le tienen que dar a Raquel para que tenga los mismos que Marcos?”</p>
<p><b>IGUALACIÓN 2 (IG2)</b></p> <p>Problema de restar: conocemos cantidades del 1º y del 2º y se pregunta por la disminución de la cantidad mayor para igualarla a la menor</p>	<p>Ciclo IIº 3º- 4º E. Primaria 9 - 10 años</p>	<p>“Marcos tiene 8 euros. Raquel tiene 5 euros. ¿Cuántos euros tiene que perder Marcos, para tener los mismos que Raquel?”</p>
<p><b>IGUALACIÓN 3 (IG3)</b></p> <p>Problema de restar muy difícil: conocemos la cantidad del 1º y lo que hay que añadir a la 2º para igualarla con la 1ª. Se pregunta por la cantidad del 2º.</p> <p>Problema INCONSISTENTE. La dificultad principal radica en que refleja una situación de igualación en que, para alcanzar la solución, se debe realizar lo contrario de lo que señala el enunciado.</p>	<p>Ciclo IIº 3º- 4º E. Primaria 9 - 10 años</p>	<p>“Juan tiene 17 euros. Si Rebeca ganara 6 euros, tendría los mismos que Juan. ¿Cuántos euros tiene Rebeca?”</p>
<p><b>IGUALACIÓN 4 (IG4)</b></p> <p>Problema de sumar muy difícil: conocemos cantidades del 1º y lo que hay que quitar a la 2º para igualarla con la 1ª. Se pregunta por la cantidad del 2º. Problema</p>	<p>Ciclo IIº 3º- 4º E. Primaria 9 - 10 años</p>	<p>“Juan tiene 17 euros. Si Rebeca perdiera 6 euros, tendría los mismos que Juan. ¿Cuántos euros tiene Rebeca?”.</p>

INCONSISTENTE. La dificultad principal radica en que refleja una situación de igualación en que, para alcanzar la solución, se debe realizar lo contrario de lo que señala el enunciado.		
<b>IGUALACIÓN 5 (IG5)</b> Problema de sumar: conocemos cantidades del 1º y lo que hay que añadirle para igualarla con la del 2º. Se pregunta por la cantidad del 2º.	Ciclo IIº-IIIº 3º 4º-5º E.Pri. 9 - 11 años	“Marcos tiene 8 euros. Si le dieran 5 euros más, tendría los mismos que tiene Rafael. ¿Cuántos euros tiene Rafael?”.
<b>IGUALACIÓN 6 (IG6)</b> Problema de restar: conocemos cantidades del 1º y lo que hay que quitarle para igualarla con la del 2º. Se pregunta por la cantidad del 2º.	Ciclo IIº-IIIº 3º 4º-5º E.Pri. 9 - 11 años	“Marcos tiene 8 euros. Si perdiera 5 euros más, tendría los mismos que tiene Rafael. ¿Cuántos euros tiene Rafael?”

## SECUENCIACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE IGUALACIÓN

### Sobre todo a nivel oral y manipulativo

PRIMER CICLO		SEGUNDO CICLO	
1º	2º	3º	4º
	IG 5, IG 6	IG 2, IG 1, IG 3	IG 4

### PROBLEMAS DE MULTIPLICACIÓN – DIVISIÓN RAZÓN:

- Problemas en los que se establecen entre los datos y la solución una función de proporcionalidad directa. Se trata de problemas que utilizan cantidades extensivas discontinuas (naranjas, dinero, caramelos...).
- Es la categoría más sencilla al no plantear contradicciones entre su sentido y las operaciones con las que se resuelven. Dichas operaciones guardan un estrecho parentesco con las de sumar y restar, por lo que a veces los alumnos los resuelvan con estas últimas.

TIPO DE PROBLEMAS	NIVEL ACADÉMICO	EJEMPLOS
<b>MULTIPLICACIÓN RAZÓN 1</b> Dada una cantidad de determinada naturaleza (multiplicando) y el “número de veces” que se repite (multiplicador- Razón 1), se pregunta por la cantidad resultante (producto), que es de la misma naturaleza que el multiplicando.	Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 7 - 8 años	“Agustín lleva al contenedor 8 envases vacíos de vidrio, va 4 veces en el día, y siempre que va lleva el mismo nº de envases. ¿Cuántos envases ha llevado en total durante el día?”

<p><b>MULTIPLICACIÓN RAZÓN 2</b></p> <p>Dadas dos cantidades de la misma naturaleza (multiplicando y multiplicador), se pregunta por la cantidad resultante (producto) que es de la misma naturaleza.</p>	<p>Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 7 - 8 años</p>	<p>“Hay 4 montones de manzanas, cada montón tiene 32 manzanas. ¿Cuántas manzanas hay en total en los cuatro montones?”.</p>
<p><b>MULTIPLICACIÓN RAZÓN 3</b></p> <p>Dada una cantidad de naturaleza “A” (multiplicando) y otra de naturaleza “B” (multiplicador-Razón 3), se pregunta por la cantidad resultante (producto) de la misma naturaleza que el multiplicador. Es un problema donde se establece una relación o proporción fija que se cumple en todos los casos comprendidos en el multiplicador.</p>	<p>Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 7 - 8 años</p>	<p>“Jaime compra 5 cuentos. Cada cuento cuesta 3 euros. ¿Cuántos euros pagó?”.</p>
<p><b>DIVISIÓN PARTICIÓN / RAZÓN</b></p> <p>Dada una cantidad de naturaleza “A” (dividendo) y otra de naturaleza “B” (divisor), se pregunta por la cantidad resultante (cociente) de la misma naturaleza que el dividendo.</p>	<p>Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 7 - 8 años</p>	<p>“Una colección consta de 96 cromos. Su álbum tiene 12 páginas. En todas ellas se pega el mismo nº de cromos. ¿Cuántos cromos se pegan en cada página?”.</p>
<p><b>DIVISIÓN POR AGRUPAMIENTO RAZÓN</b></p> <p>Dadas dos cantidades de la misma naturaleza (dividendo y divisor), se pregunta por la cantidad resultante (cociente) de distinta naturaleza que las anteriores.</p>	<p>Ciclo IIº 3º E. Primaria 8 años.</p>	<p>“Una colección consta de 96 cromos. Si en cada página del álbum pegamos 8 cromos. ¿Cuántas páginas tendrá el álbum?”.</p>

## SECUENCIACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE MULTIPLICACIÓN/DIVISIÓN RAZÓN

PRIMER CICLO		SEGUNDO CICLO	
1º	2º	3º	4º
	M1, M2, M3, DP	M1, M2, M3, DP, DA	

## PROBLEMAS DE DOS OPERACIONES

- Los problemas de dos operaciones (P2E) son muy difíciles, mucho más de lo que se piensa.
  - Están compuestos por dos o tres problemas simples (P1E).
  - No saber resolver bien P1E impide resolver P2E.
  - Saber resolver P1E no es garantía de que se puedan resolver P2E.
  - Los P2E tienen su propia estructura, con un componente latente o pregunta oculta.
  - Para resolverlos utilizaremos tres estrategias.
  - De trabajarse este tipo de problemas en el Primer Ciclo, lo haríamos en el tercer trimestre de segundo curso preferentemente.
  - Lo trabajaríamos de una de las maneras que se expresan a continuación, la más fácil: problemas encadenados, problemas en la que aparece la supuesta pregunta oculta, problemas en los que aparecen redactados todos los interrogantes.

### DIDÁCTICA de este tipo de problemas.

Hay tres estrategias que hemos de conocer y aplicar con el alumnado (en el caso de trabajar en el primer ciclo lo haremos utilizando la más sencilla):

1. Aprender a componer un P2E partiendo de P1E.
2. Aprender a preguntarle al problema para descubrir la pregunta oculta.
3. Aprender a desmontar o descomponer un problema de P2E en dos de P1E.

## 1. Aprender a componer un P2E partiendo de P1E.

Dos modalidades:

- a. Montar un problema nuevo a partir de otro ya resuelto.
- b. Problemas que recogen una historia.

### a. Montar un problema nuevo a partir de otro ya resuelto.

Se pretende que, a partir del resultado de un problema ya resuelto se construya uno nuevo.

Ejemplo:

“Va a comenzar el curso y le compran a un alumno los zapatos, que cuestan 32 euros, y las zapatillas de deporte, que cuestan 25 euros. ¿Cuánto cuestan los dos pares?”

Añadimos una nueva situación:

“Pagan la cuenta con 60 €. ¿Cuánto les devuelven?”

Les pedimos que nos enuncien el problema abarcando las dos situaciones. Posiblemente los niños lo cuenten así:

“A un niño le compran zapatos, que valen 32 €, y unas zapatillas de deporte, que valen 25 €. Los dos pares cuestan 57€. El papá paga con 60€. ¿Cuánto le devuelven?”

El siguiente paso sería pedirle al alumno/a que vuelva redactarlo omitiendo el precio de los dos pares. Comprobará que se dice lo mismo y que se pide lo mismo en el problema.

“A un niño le compran zapatos, que valen 32 €, y unas zapatillas de deporte, que valen 25 €. El papá paga con 60€. ¿Cuánto le devuelven?”

En definitiva, los pasos que conlleva esta estrategia son:

1. Resolución de un P1E.
2. Construcción de otro P1E que asuma como primera proposición el resultado del anterior.
3. Relato unificado de ambos problemas, que puede incluir la pregunta o la solución intermedia o del primer problema.
4. Relato unificado de ambos problemas omitiendo la pregunta y la solución del primer problema.

*NOTA: En el primer ciclo nos quedamos con las fases 1 y 2.*

#### **b. Problemas que recogen una historia.**

Son los problemas que se van encadenando conforme a los sucesos o episodios de una historia. No son más que la prolongación natural de la estrategia anterior.

**Ejemplo:**

Julián sale de su casa con 12 euros	
LO QUE LE PASA	SOLUCIÓN
1	En la plaza se encuentra con su abuelo, que le da 5€. Reúne _____ €
2	Va a la papelería y compra por valor de 6€ Le quedan _____ €
3	Pasa por el Kiosco y compra chuches para él y para su hermana, que le cuesta 2€ Le quedan _____ €
4	Va a la oficina de su padre. Le da 50€ para que pague las clases de tenis. Ahora tiene _____ €
5	Paga las clases, que asciende a 35€ Le quedan _____ €
¿Con cuánto dinero vuelve a casa Julián? Con _____ €	

Esta historia es susceptible de convertirse en un texto clásico de P2E reuniendo algunos sucesos o episodios. Por ejemplo, la situación de partida y los episodios 1 y 2:

“Julián sale de su casa con 12 euros. En la plaza se encuentra con su abuelo, que le da 5€. Va a la papelería y compra por valor de 6€. ¿Cuánto dinero le queda”

## 2. Aprender a preguntarle al problema para descubrir la pregunta oculta.

Es importante entrenar al alumno en la técnica de la formulación de preguntas.

Aprendamos con estos ejemplos:

- “Pepa tiene 5 caramelos y su amiga le da 3”. Admite una única pregunta prácticamente.
- “Pepa tiene 5 caramelos y su amiga 3”. Aumenta el número de preguntas que se pueden hacer: ¿Cuántas tienen entre las dos?, ¿cuántas tiene menos su amiga?,...

Si en lugar de preguntar sobre dos datos lo hacemos sobre tres o cuatro, el número de posibles preguntas aumenta de manera considerable:

- “El pastelero tiene 5 pasteles de nata. Rocío compra 2.”
- “Un ama de casa gasta un día 26€ en alimentación, 14€ en productos de limpieza y 3€ en papelería”.
- “En un garaje caben 88 coches en la primera planta, y 125 coches en la segunda planta. Cada coche paga 5€ al día”.
- Un kilo de manzanas cuesta 1,30€. Un Kilo de naranjas cuesta 0,90€. Un Kilo de peras cuesta 1,50€. Un Kilo de chirimoyas cuesta 2€”.

Otra forma de entrenar al alumnado en la formulación de preguntas es con la técnica de “preguntas sobrevenidas” una vez que la tarea o problema ha sido resuelto.

Ejemplo:

“Irene tiene 3 chicles. Su madre le da 2”.

**Pregunta directa:** ¿Cuánto chicles reúne Irene?

**Preguntas añadidas:** ¿Y si después le dan 4? ¿Y si después pierde 2? ¿Y si se come 3? ¿Cuánto cuestan si cada uno vale 10 céntimos?

Las preguntas añadidas pueden situarse también unas tras otras, encadenándose y sirviendo la respuesta de una como base para después formular otra.

Esta técnica se puede revitalizar o volver a surgir de nuevo si el texto permite poder añadir información nueva:

“Irene tiene 3 chicles. Su madre le da 2. Su hermano tiene todavía 4 chicles más que ella”.

Resumiendo: un alumno entrenado en la técnica de la formulación de preguntas pertinentes con un determinado texto tiene muchas posibilidades de averiguar la pregunta oculta de cualquier P2E.

### 3. Aprender a desmontar o descomponer un problema de P2E en dos de P1E.

**¡De un problema hacemos dos!**

**Problema:** “Para hacerle un regalo a mamá, Luis ha puesto 4,70€ y yo he puesto 2,90€. El regalo ha costado 5,20€. ¿Cuánto nos ha sobrado?”

**Escribe la pregunta oculta:** ¿Cuánto dinero hemos puesto Luis y yo?

**Escribe la respuesta:** Luis y yo hemos puesto 7,60€

**Escribe los dos problemas:**

**Problema 1:** “Para hacerle un regalo a mamá, Luis ha puesto 4,70€ y yo he puesto 2,90€. ¿Cuánto dinero hemos puesto Luis y yo?”

**Problema 2:** “Para hacerle un regalo a mamá, Luis y yo hemos puesto 7,60€. El regalo ha costado 5,20€. ¿Cuánto nos ha sobrado?”

## ESTRATEGIAS GENERALES

- Trabajar la resolución de problemas a través de un taller no tiene por qué ser resolver problemas, no tiene por qué ser proponer problemas para su resolución. Pues es preciso antes trabajar las distintas “fases-camino de ida y vuelta”: manipular, ejercitarnos en ciertas estrategias relacionadas con el enunciado, con los datos, con la pregunta,... resolver problemas es una consecuencia de haber trabajado todo lo anterior.
- Aplicar, en la resolución de problemas, las etapas o fases: **DAPREOSO**.
  - **D**Atos
  - **P**REgunta
  - **O**peración
  - **S**OLución
- Trabajar los problemas **por fases**, es decir, estableciéndose actividades para mejorar en **cada una** de las fases del problema, a través de sesiones de trabajo:
  - **Comprender el enunciado:** identificación de datos (número y “naturaleza”), identificación de la pregunta, identificación de palabras claves, contar “la historia”, inventar nuevos enunciados cambiando los números, el protagonista y/o el paisaje, el escenario, ...
  - **Concebir un plan:** reflexión sobre lo que se busca y cómo puedo encontrarlo, con ayuda de las palabras claves descubrir qué operación matemática se ha de realizar, dibujo o representación gráfica en la que pueda apoyarme, qué espero encontrar.
  - **Ejecutar el plan:** realizar la operación matemática por la se obtiene la solución al problema.
  - **Examinar la solución obtenida:** revisar la pregunta y comprobar que lo expuesto como solución da respuesta a la pregunta, plantearnos si la solución es lo esperado, si es posible ese resultado, si es una solución lógica.

- Trabajar con sistematicidad todos los tipos de problemas matemáticos y con secuenciación según su nivel de dificultad.
  - Cubrir una gama completa de situaciones que pueden ser modeladas por problemas.
  - La repetición de los distintos tipos de problemas, para un adecuado nivel de entrenamiento.
  
- Necesitamos enseñar estrategias que ayuden al alumno.
  - Las muletas, ayudan a entender, a representar la realidad, la situación, a concretar las matemáticas.
  - Deben estar presentes y permitir al alumno manipular y trabajar con ellas.
    - La tabla del 0 al 100 y cómo trabajarla.
    - La tabla de multiplicar y cómo trabajarla.
    - El ascensor de la resta.
    - Otros recursos: ábacos, palillos de dientes / polos/ pajitas... para decenas y unidades (creación de números, confección de la tabla de multiplicar,...), tapones, fichas, dados, plantillas,...
  
- Los números en los problemas: El progreso que deben seguir.

### LOS NÚMEROS EN LOS PROBLEMAS: SU PROGRESIÓN

1. Dígitos	5, 8	Hay 5 niños en el patio. Vienen más niños. Ahora hay 8 niños. ¿Cuántos han venido?
2. Decenas completas.	50,80	Hay 50 niños en el patio. Vienen más niños. Ahora hay 80 niños. ¿Cuántos han venido?
3. Decenas completas y dígitos.	52, 84	Hay 52 niños en el patio. Vienen más niños. Ahora hay 84 niños. ¿Cuántos han venido?
4. Centenas completas	200, 500	Hay 200 niños en el patio. Vienen más niños. Ahora hay 500 niños. ¿Cuántos han venido?
5. Centenas y decenas completas.	230, 560	Hay 230 niños en el patio. Vienen más niños. Ahora hay 560 niños. ¿Cuántos han venido?
6. Etc.	235, 568	

LAS OPERACIONES SURGEN CUANDO SE NECESITAN NÚMEROS GRANDES

➤ **Trabajar con los enunciados:**

- **Redacción:** Presentación según la edad (frases, textos cortos,...), cuidar el vocabulario, lógicos, de la vida cotidiana y real, significativos,... Es conveniente comenzar utilizando el modelo de las tres frases: Parto de algo que tengo. Algo sucede, se pregunta por lo ocurrido y qué ha pasado.
  - Tengo 28 canicas.
  - Jugando con mi amigo pierdo 6 canicas.
  - ¿Cuántas canicas tengo ahora?
- **Datos:** El número y el concepto, naturaleza o magnitud. Cómo recogerlo según la edad. (Subrayando de un color determinado)
- **Pregunta:** Cómo recogerla según la edad. (Subrayando de un color determinado)
- **Palabras claves:** Identificarlas. Previamente ha habido que trabajar con ellas: su significado y su relación con las operaciones matemáticas. A veces no están presentes, pero la redacción del problema me lleva a ellas.
- **Espacio para trabajar:** suficiente, organización, plantilla.

➤ **La generalización:** consiste en aplicar lo sabido a otras situaciones.

- Generalizar a conjuntos mayores lo que ya se sabe hacer con otros más pequeños.
- Generalizar lo que se sabe hacer a otras situaciones distintas: números decimales, fracciones, magnitudes de medidas,...

➤ **La simplificación o concreción:** lo contrario a generalizar.

- Simplificamos los datos, los convertimos en números pequeños. Averiguamos con más facilidad cómo resolver y luego lo aplicamos al caso concreto.

➤ Conocer las relaciones entre tres cantidades:

- Sumas y restas que relacionan a tres cantidades:

$5 + 3 = 8$	$8 - 3 = 5$	$8 - 5 = 3$
-------------	-------------	-------------

- Multiplicaciones y divisiones que relacionan a tres cantidades:

$4 \times 2 = 8$	$8 : 4 = 2$	$8 : 2 = 4$
------------------	-------------	-------------

## RELACIÓN ENTRE OPERACIONES

LA SUMA DA LUGAR A DOS RESTAS RELACIONADAS CON ELLA.

$5 + 3 = 8$	$8 - 3 = 5$
	$8 - 5 = 3$

LA RESTA DA LUGAR A UNA SUMA Y OTRA RESTA RELACIONADAS CON ELLA.

$5 - 3 = 2$	$2 + 3 = 5$
	$5 - 2 = 3$

LA MULTIPLICACIÓN DA LUGAR A DOS DIVISIONES.

$4 \times 2 = 8$	$8 : 4 = 2$
	$8 : 2 = 4$

LA DIVISIÓN DA LUGAR A OTRA DIVISIÓN Y A UNA MULTIPLICACIÓN.

$10 : 2 = 5$	$10 : 5 = 2$
	$5 \times 2 = 10$

## LA TABLA DE MULTIPLICAR ES UNA GRAN BASE DE DATOS

La tabla de multiplicar es una gran base de datos que nos dice cuánto vale la cantidad que es un número de veces mayor o menor que otra. Para ello, la tabla hay que “leerla” de una manera diferente a como lo han hecho hasta ahora.

$8 \times 4 = 32$
Treinta y dos es ocho <b>veces más</b> que cuatro
Treinta y dos es cuatro <b>veces más</b> que ocho
Ocho es cuatro <b>veces menos</b> que treinta y dos
Cuatro es ocho <b>veces menos</b> que treinta y dos

$6 \times 9 = 54$

RELACIONES ENTRE 3 NÚMEROS ( <b>x</b> , <b>:</b> )		
<b>8</b>	<b>4</b>	<b>32</b>
$8 \times 4 = 32$		$32 : 4 = 8$
$4 \times 8 = 32$		$32 : 8 = 4$

## ACTIVIDADES A DESARROLLAR EN LAS DISTINTAS SESIONES DEL TALLER DE PROBLEMAS

### SESIONES PARA TRABAJAR CON EL ENUNCIADO

#### A. TRABAJAR CON LOS DATOS.

- Identificar datos: número + “naturaleza”  
38 alumnos, 25 manzanas, 475 Kilogramos, ...  
Subrayar si es necesario.
- Jugar cambiando los números.
- Jugar cambiando la “naturaleza”.
- Recoger los datos: (“naturaleza-concepto”: número)

#### DATOS

Manzanas: 45

Naranjas: 32

Limonas: 14

- ...

#### B. TRABAJAR CON LAS PALABRAS CLAVES

- Trabajar con las **palabras claves**: asociar cada palabra con la operación matemática (ficha de asociación); identificar la/s palabra/s claves sobre distintos enunciados (p.e.: rodearlas con un lápiz de color); indicar una operación y decir qué palabras claves hacen referencia a ella, ...
- ...

#### C. TRABAJAR CON LAS PREGUNTAS

- Identificar **la pregunta** del enunciado. Preguntar sobre lo que se pide.
- Plantear al mismo enunciado otras posibles preguntas.
- Añadir nuevas preguntas y hacer un problema encadenado.
- Dada una pregunta componer el resto del problema.

#### **D. TRABAJAR CON EL ENUNCIADO COMPLETO**

- Cambiar, en un problema dado, el “escenario o paisaje”, la “naturaleza o concepto” del dato, el protagonista, los números, varios elementos a la vez (protagonista y escenario, números y naturaleza,...)
- Formular problemas a partir de unas orientaciones dadas: datos y operación, operación, datos y pregunta,... Primero hemos de trabajar de forma oral y después se pasará a escribir el enunciado, a redactarlo.
- ...

#### **E. TRABAJAR CON LA SOLUCIÓN**

- Plantearnos si la solución encontrada es la esperada, si es posible, si es lógica,...
- Ofrecer varias posibles soluciones y elegir entre ellas.

- Problemas orales con manipulación. Ver viaje de ida y vuelta
- Problemas orales.
- Paso del problema oral y su solución a la operación matemática.
- DAPREOSO
- MAS QUE, MENOS QUE, FALTA PARA: Utilizar ficha y material manipulativo, juego de los dedos,...
- GENERALIZACIÓN. A partir de un enunciado con datos pequeños, ir haciendo propuestas con datos cada vez mayores, con datos que son números decimales, con datos que son fracciones, ...
- SIMPLIFICACIÓN. Proceso contrario al anterior. Sustituir los datos por otros que sean de una cifra y proporcionales a los dados.
- DIDÁCTICA de los problemas de dos operaciones. Trabajar la estrategia apropiada a primer ciclo y descrita anteriormente)

Hay tres estrategias que hemos de conocer y aplicar con el alumnado:

1. Aprender a componer un P2E partiendo de P1E.
  2. Aprender a preguntarle al problema para descubrir la pregunta oculta.
  3. Aprender a desmontar o descomponer un problema de P2E en dos de P1E.
- LA TABLA DE MULTIPLICAR. Ejercicios como, los descritos anteriormente.
  - RELACIONES ENTRE TRES CANTIDADES
    - Suma / Resta
    - Multiplicación / División
  - RECONOCER BIEN EL SIGNIFICADO DE CADA UNO DE LOS TÉRMINOS DE UNA DIVISIÓN.
  - INVENTAR PROBLEMAS
  - ...

# EL VIAJE DE IDA Y VUELTA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

**El viaje de IDA:** Consiste en 6 etapas que van desde la manipulación, dramatización, representación, vivencia,... hasta la abstracción, hasta la escritura de lo experimentado.

**1ª ETAPA:** La maestra/o coge un puñado de lápices. Los enseña y hacen que los niños los cuenten. Hay 8. Ahora esconde las manos y vuelve a sacarlas, pero con sólo 6 lápices. Les dice a los niños que alguien ha venido por detrás y le ha quitado lápices. ¿Cuántos me ha quitado? Los niños cuentan los que ahora tiene en la mano, piensan un poco y concluyen que faltan 2, que son los que se ha llevado alguien. Esto se repite con otros objetos: palillos, bolas, cochecitos, canicas,...

**2ª ETAPA:** Se repite la situación anterior pero pidiendo un voluntario. Sale un niño o una niña y ella será quien le quite los lápices, que esconderá para que nadie los vea. Los mostrará cuando los compañeros hayan dicho la solución. La secuencia se repite con más voluntarios.

**3ª ETAPA:** Ahora la maestra o maestro les sugiere a los niños que salga alguno, pero no para ser su ayudante, sino para inventarse una situación (el problema) y desarrollarlo como si el niño fuera la maestra. Se desarrolla la experiencia, pero esta vez protagonizado por un niño. El niño tendrá que elegir con qué material va a hacerlo, cuántos va a coger de ellos, cuántos piezas va a hacer desaparecer, cuántas piezas va a mostrar, debe de formular la pregunta,...

**4ª ETAPA:** Los niños y niñas ya saben plantear problemas de manera dramatizada, protagonizándolos y viviéndolos. Ahora se da un paso más. La maestra pide que salga alguien y diga el problema de manera verbal, porque ya no hace falta que se represente algo que todos conocen. Ahora han de llevar a cabo procesos mucho más complejos. Han de saber traducir unas cuantas acciones al lenguaje verbal. En esta etapa podemos sustituir los elementos presentes de clase: lápices, niños, mesas, canicas,... por otros elementos no presentes: frutas, personas, metros, euros,...

**5ª ETAPA:** Los niños han adquirido ya cierta soltura a la hora de plantear problemas. Damos un paso más. Ahora sustituimos los objetos por números que aparecen escritos en una operación. El niño se inventa una historia y la narra, incluyendo en ella los números que aparecen en la operación, siendo congruente el relato con la cuenta. Los demás alumnos permanecen atentos para corregir o proponer un relato alternativo. Ya se ha avanzado mucho: los procesos se abordan con signos y símbolos, no hay manipulación de la realidad, sino suplantación de ésta por algo que la representa, sea la palabra o el número. Podemos permitirnos ahora trabajar con cantidades que no podían representarse con objetos: 28 lápices, 245 niños, 65 cromos,...

**6ª ETAPA:** La más complicada. Requiere un cierto dominio de la escritura. La mayoría será hábil en ello en el tercer trimestre de segundo de primaria. Se trata de transcribir al lenguaje escrito lo que el niño es capaz de decir verbalmente. Cuando esta etapa se consigue se cierra el ciclo que comenzó con su maestra sacando lápices.

**Las dos primeras etapas de este proceso se pueden trabajar incluso desde la educación infantil.**

**Estas etapas han de ser repetidas muchas veces de manera que todo el alumnado pueda practicar y sea capaz de plantear un problema sobre situaciones que él conoce.**

**El viaje de VUELTA:** Es el camino desde el enunciado al proceso y la solución. El camino de vuelta será más o menos complicado en función de cómo hayamos realizado con ellos el camino de ida y de cuantas “muletas” (pistas, estrategias, ideas claras, recursos,...) le hayamos ofrecido y/o le permitamos utilizar para no perderse.

A la hora de trabajar con los enunciados debemos plantearnos varias posibilidades:

- 1. Utilizar problemas cuyo enunciados tengan números muy pequeños cubre distintas finalidades:**
  - a. La comprensión.
  - b. Descubrir la operación.
  - c. La generalización.
- 2. Problemas orales para descubrir la operación.**
- 3. Problemas sin datos.**
- 4. Enunciados sin preguntas.**
- 5. Preguntas sin enunciados.**
- 6. Problemas difusos, con datos no necesarios.**
- 7. Elaborar problemas siguiendo unas instrucciones concretas:**
  - a. Damos los datos.
  - b. Damos los datos y la operación.
  - c. Damos la solución.
  - d. ...