AULAS DE VERANO

Instituto Superior de Formación del Profesorado

APRENDER MATEMÁTICAS. METODOLOGÍA Y MODELOS EUROPEOS

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA

APRENDER MATEMÁTICAS. METODOLOGÍA Y MODELOS EUROPEOS

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA

SECRETARÍA GENERAL DE EDUCACIÓN

INSTITUTO SUPERIOR DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA
SECRETARÍA GENERAL DE EDUCACIÓN
Instituto Superior de Formación del Profesorado

Edita:

Subdirección General de Información y Publicaciones

N.I.P.O.: 651-07-078-4
I.S.B.N.: 978-84-369-4427-3
Depósito Legal: M-26290 - 2007

Imprime: SOLANA E HIJOS, A.G., S. A.

http://publicaciones.administracion.es

Colección: AULAS DE VERANO
Serie: Principios

APRENDER MATEMÁTICAS. METODOLOGÍA Y MODELOS EUROPEOS

El libro, dirigido a profesores de Educación Infantil y Primaria, se escribe desde la actualización científica y la fundamentación de metodología didáctica para la enseñanza de la Matemática, dirigiendo su lectura hacia el diseño y desarrollo de procedimientos significativos para el proceso de enseñanza-aprendizaje y la presentación de materiales, técnicas y recursos que puedan mejorar el desarrollo del pensamiento lógico y matemático de los alumnos de 3 a 12 años de edad, a través del carácter instrumental, formativo y de interpretación y aplicación de esta ciencia.

Los modelos europeos para el aprendizaje de la Matemática dan por válida aquella metodología que aporte COMPRENSIÓN. Aplicar correctamente los conceptos adquiridos al entorno inmediato en el que el alumno se desenvuelve, y construir otros nuevos que aporten al conocimiento amplitud intelectual. Desarrollar en el que aprende la observación, la imaginación, la intuición, el razonamiento lógico y la emoción. Este libro presenta, desde la teoría y la práctica educativa, una exposición de modelos que basan la educación matemática en la experiencia, el descubrimiento y la construcción de los conceptos, procedimientos y estrategias, más que en la instrucción.

Dirección editorial del volumen *Aprender matemáticas. Metodología y modelos europeos:* JOSÉ ANTONIO FERNÁNDEZ BRAVO.

Coordinación: *CAMARENA CABEZA, M. Dolores*

Autores:

AIZPÚN LÓPEZ, Alberto
ATRIO CEREZO, Santiago
CANALS TOLOSA, M. Antonia
FERNÁNDEZ BRAVO, José Antonio
MARÍN RODRÍGUEZ, Margarita
PERALTA CORONADO, F. Javier
RAMÍREZ SILVA, Luis Fernando

ÍNDICE

METODOLOGÍA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA: VARIABLES FACILITADORAS DEL APRENDIZAJE

José Antonio Fernández Bravo

Centro de Enseñanza Superior «Don Bosco».
Madrid

INTRODUCCIÓN

Aún a pesar de estar totalmente admitido que la Matemática es una actividad mental, seguimos imponiendo, sin carácter científico y bajo la perezosa sospecha de la apatía, ese dogma prescriptivo: «así se hace», «así se coloca», «así se resuelve», «así se calcula»,..; protocolo aburrido y penumbra intelectual de un extraño secreto, justificado por la orgullosa acción de terminar un programa sin calidad, que, por los resultados obtenidos de las evaluaciones externas, ni siquiera imprime cuantificación académica. Seguimos vistiendo a la Matemática, desde la enseñanza, con ese falso atavío de ojos tristes, símbolos mezquinos y largas faldas negras, y en su aprendizaje se la reconoce, entonces, lejos de esa razonada elegancia discreta que la caracteriza y que, quizás, no sepamos transmitir.

> *«Uno de los mayores problemas con que se enfrentan las matemáticas es el de explicar a los demás de qué tratan. Los aderezos técnicos de esta materia, su simbolismo y expresiones formales, su desconcertante terminología, su aparente deleitarse con cálculos larguísimos: todo ello tiende a ocultar su auténtico carácter (…) Esta ciencia no trata de símbolos y cálculos. (…) El objetivo de las matemáticas son los conceptos. Se trata sobre todo de ver el modo en que los diferentes conceptos se relacionan unos con otros. El objetivo de las matemáticas es comprender (…) No se trata simplemente de hallar la respuesta correcta, sino más bien en comprender por qué existe una respuesta, (…) Pero lo que sobre todo tienen es significado.*[1]

1. ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN ACTUAL

A) Las operaciones

Nos podríamos preguntar si actualmente tiene sentido hacer sumas, restas, multiplicaciones o divisiones, sin comprender lo que se está haciendo o para qué se hace[2]; pues una cosa es, por ejemplo, hacer multiplicaciones y,

---

[1] STEWART, Ian. *De aquí al infinito. Las matemáticas hoy.* Crítica. Barcelona, 2004, págs. 13 y 14.

[2] Whitehead (1965), en un ensayo *Mathematics and liberal Education*, publicado por primera vez en 1912, decía que «Las matemáticas (se refiere a la enseñanza de la matemática)... deben ser depuradas de todo elemento que sólo pueda justificarse de cara a estudios posteriores. No puede haber nada más destructivo para una verdadera educación que el gastar largas horas en la adquisición de ideas y métodos que no llevan a ningún sitio... La sola idea de aprender tiene un sentido muy extendido de aburrimiento. Yo lo atribuyo a que a los estudiantes se les enseñan muchas cosas simplemente en el aire, cosas que no tienen ninguna coherencia con los pensamientos que surgen naturalmente en cualquier persona que viva en este mundo moderno, independiente de que sea o no un intelectual».

otra, muy distinta, saber multiplicar. Así ocurre que muchos docentes se expresan diciendo: «*no lo entiendo, mira que multiplican bien pero les cuesta mucho ver los problemas*». Con experiencia apoyada en datos científicos podemos decir que si sus alumnos supieran qué es multiplicar, no tendrían dificultad alguna en identificar situaciones multiplicativas en la vida real; la dificultad educativa reside, en este caso, en que se confunde saber multiplicar con hacer multiplicaciones. Y, quizás de estas confusiones se obtenga como resultado, algo *«Didácticamente equivocado, conceptualmente hipertrófico, científicamente inútil e históricamente absurdo»*, utilizando palabras de Pascal, como las refiere Rey Pastor[3] en su libro *Elementos de Análisis Algebraico*. Lo esencial requiere la organización de procedimientos abiertos a la oportunidad de adaptar, de renovar, reorganizar, cambiar, seleccionar, de realizar, de crear[4].

B) Pensamiento y matemáticas

Dicen que las matemáticas enseñan a pensar. Sin embargo, muchos docentes advierten que eso no sucede en la clase de matemáticas; en ella aseguran: *no se piensa*. Esto puede deberse a dos razones fundamentales: una, que las matemáticas no enseñen a pensar y hayamos sido víctimas de un engaño universal; otra, que en clase de matemáticas se haga de todo, menos Matemáticas. Son muchos los profesionales de la educación los que también admiten que **se pierde mucho tiempo en rellenar ejercicios de libros vacíos de actividad rentable**, con el único fin de entregar a los padres carpetas llenas de fichas o cuadernos repletos de números, prueba del trabajo y de la constancia y del contenido elaborado, pero lejos, muy lejos –como se puede comprobar– de explicar conocimiento[5] alguno.

---

[3] REY PASTOR, J. *Elementos de Análisis Algebraico*. Biblioteca Matemática. Madrid, 1981, pág. 8.

[4] Enseñar a sumar, restar, multiplicar y dividir, como fin en sí mismo, se exigía hace unos años en las escuelas porque se necesitaba entonces para abrirse camino en la vida, –y aproximadamente hasta finales de la primera mitad del siglo pasado–. Esto no quiere decir que no haya que hacer uso en la escuela actual de esas operaciones, pues cometeríamos un grave error si hiciéramos una falsa interpretación de estas ideas. Lo que se intenta decir es que el uso de las operaciones se haga desde una evidente realidad matemática y, más que la finalidad sea el cálculo de operaciones,… el objetivo consista en utilizarlas como medio para desarrollar el pensamiento. Pero estas expresiones que aquí hemos utilizado: si son fáciles de entender, no son fáciles de aceptar.

[5] Nos referimos al conocimiento matemático. La elección, si cabe, entre proceso y resultado o la exactitud del número frente al rigor del pensamiento. Muchas veces se mutila el proceso afianzando una forma más cómoda, según el profesor, para responder a los «contenidos». «*Así pues dime, y sin miedo, qué es lo que tú piensas que es el conocimiento*». (Platón. «Teeto». En *Obras completas.* Aguilar. Madrid, 1979).

C) Cálculo y matemática

Que el cálculo sea el instrumento de la matemática, nadie lo pone en duda; que la matemática sea en sí misma cálculo es totalmente discutible. En modo alguno se está diciendo que el cálculo no sea importante[6]; más bien, que el cálculo es ese utensilio que se elige cuando se sabe qué hacer y qué conseguir con él. Reconocer una situación matemática con claridad, en la que se necesite llegar a un resultado, y elegir convenientemente el procedimiento que me permita llegar a conclusiones lógicas, pertenece, a mi juicio, al hacer matemático. Luego, de ser así, a este hacer matemático no le describe sólo el procedimiento, sino también el reconocimiento, la elección y el razonamiento. Ideas comprendidas, en suma, frente a formas de operar vacías de actividad rentable.

D) Recuerdos de la enseñanza de la matemática

Actualmente existe un claro rechazo al aprendizaje de la matemática. Incluso, son muchos los profesores, sobre todo en Educación Infantil y Educación Primaria, que huyen, de alguna forma, de su enseñanza. Sus recuerdos hacia la matemática, como ellos dicen, no son agradables. Yo les pregunto: ¿por qué?, ¿te ha pegado alguna vez el número siete?, ¿te ha arañado alguna vez el signo menos?, ¿te has hecho daño al caerte de una raíz cúbica de ocho metros de altura?,... No, me dicen sonriendo. No, no, no. No es que tengan un mal recuerdo de la matemática, de lo que realmente tienen un mal recuerdo es de su enseñanza, de la tensión que generaba una persona, que con un carné de profesor ignoraba como actividades prioritarias la duda, la investigación, la comprobación del error, la necesidad de someter a contraste las ideas, las alternativas que probasen o refutasen, la participación como búsqueda de conocimiento, la necesidad de inventar una expresión convencional, la conducción del pensamiento erróneo mediante preguntas que a modo de retos canalizasen las conclusiones, la utilización de ejemplos y contraejemplos, la comprensión de las ideas generadoras de nuevas relaciones, el descubrimiento de distintos teoremas, la necesidad de identificarlos y ponerles un nombre, la utilización de materiales y recursos... Todo esto no se hace habitualmente, simplemente se cambia, con la dudosa explicación ante la sociedad de que no hay tiempo, por cómodas acciones que subrayan como único protagonista al profesor de la asignatura; «de esta forma», «de esta

[6] Gagné distingue el conocimiento declarativo del procedimental: Conocimiento declarativo sería el conocimiento sobre **qué** es algo, mientras que el conocimiento procedimental versa sobre **cómo** hacer algo. GAGNÉ, E. *La psicología cognitiva del aprendizaje escolar.* Aprendizaje-Visor. Madrid, 1991.

forma se representa..., de esta forma se calcula el límite de..., de esta forma se expresa el teorema..., de esta forma...

2. VARIABLES FACILITADORAS DEL APRENDIZAJE

El desarrollo de cuatro capacidades favorece *el pensamiento lógico-matemático:*

La observación. Se debe potenciar sin imponer la atención del niño a lo que el adulto quiere que mire. La observación se canalizará libremente y respetando la acción del sujeto, mediante juegos cuidadosamente dirigidos a la percepción de propiedades y a la relación entre ellas. Esta capacidad de observación se ve aumentada cuando se actúa con gusto y tranquilidad y se ve disminuida cuando existe tensión en el sujeto que realiza la actividad. Según Krivenko[7], hay que tener presentes tres factores que intervienen de forma directa en el desarrollo de la atención: el factor tiempo, el factor cantidad y el factor diversidad.

La imaginación. Entendida como acción creativa, se potencia con actividades que permiten una pluralidad de alternativas en la acción del sujeto. Ayuda al aprendizaje matemático por la variabilidad de situaciones a las que se transfiere una misma interpretación.

La intuición. Las actividades dirigidas al desarrollo de la intuición no deben provocar técnicas adivinatorias; el decir por decir no desarrolla pensamiento alguno. La arbitrariedad no forma parte de la actuación lógica. El sujeto intuye cuando llega a la verdad sin necesidad de razonamiento. Cierto esto, no significa que se acepte como verdad todo lo que se le ocurra al niño, sino conseguir que se le ocurra todo aquello que se acepta como verdad.

El razonamiento lógico. El razonamiento es la forma del pensamiento mediante la cual, partiendo de uno o varios juicios verdaderos, denominados premisas, llegamos a una conclusión conforme a ciertas reglas de inferencia. Para Bertrand Russell[8] la lógica y la matemática están tan ligadas que afirma: «*la lógica es la juventud de la matemática y la matemática la madurez de la lógica*». La referencia al razonamiento lógico se hace desde la dimensión intelectual que es capaz de generar ideas en la estrategia de actuación, ante un determinado desafío. El desarrollo del pensamiento es resultado de la influencia que ejerce en el sujeto la actividad escolar y familiar.

---

[7] KRIVENKO, M. *Psicología*. Planeta. Barcelona, 1990.

[8] RUSSELL, B. *Introducción a la filosofía matemática.* Paidos. Madrid, 1985, pág. 171.

Con estos cuatro factores hay que relacionar cuatro elementos que, para Vergnaud[9], ayudan en la conceptualización matemática:

- Relación material con los objetos.
- Relación con los conjuntos de objetos.
- Medición de los conjuntos en tanto al número de elementos.
- Representación del número a través de un nombre con el que se identifica.

2.1. Concepto frente a símbolo

El pensamiento matemático hay que entenderlo, al menos, desde tres categorías básicas:

- Capacidad para generar ideas cuya expresión e interpretación sobre lo que se concluya sea: verdad para todos o mentira para todos.
- Utilización de la representación o conjunto de representaciones con las que el lenguaje matemático hace referencia a esas ideas.
- Comprender el entorno que nos rodea, con mayor profundidad, mediante la aplicación de los conceptos aprendidos.

Sobre estas indicaciones cabe advertir la importancia del orden en el que se han expuesto. Obsérvese que, en muchas ocasiones, se suele confundir la idea matemática con la representación de esa idea. Se le ofrece al niño,

---

[9] VERGNAUD, G. *El niño, las matemáticas y la realidad*. Trillas. México, 1991.

en primer lugar, el símbolo, dibujo, signo o representación cualquiera sobre el concepto en cuestión, haciendo que el sujeto intente comprender el significado de lo que se ha representado. Estas experiencias son perturbadoras para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático. Se ha demostrado suficientemente que el símbolo o el nombre convencional es el punto de llegada y no el punto de partida, por lo que, en primer lugar, se debe trabajar sobre la comprensión del concepto, propiedades y relaciones.

Para la formación del conocimiento matemático es necesaria la distinción entre la representación del concepto y la interpretación de éste a través de su representación. Se suele creer que cuantos más símbolos matemáticos reconozca el niño más sabe sobre matemáticas. Esto se aleja mucho de la realidad porque se suele enseñar la forma; así, por ejemplo, escuchamos: «*El dos es un patito*» o «*La culebra es una curva*» o… Tales expresiones pueden implicar el reconocimiento de una forma con un nombre, por asociación entre distintas experiencias del niño, pero en ningún modo contribuye al desarrollo del pensamiento matemático, debido a que miente sobre el contenido intelectual al que se refiere, por ejemplo, el concepto dos: nunca designa a UN «patito». En resumen, lo que favorece la formación del conocimiento lógico-matemático es la capacidad de interpretación matemática, y no la cantidad de símbolos que es capaz de recordar por asociación de formas.

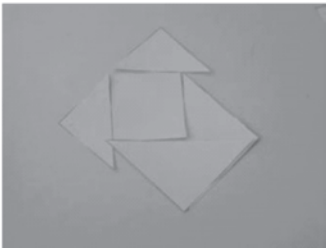
2.2. Desarrollo del pensamiento matemático

La Matemática es una actividad mental. El pensamiento matemático se desarrolla cuando se hace Matemática. Hacer Matemática implica ante todo establecer relaciones. El rigor va unido a la Matemática desde las primeras experiencias que el niño tiene para conseguir conocimiento. Pero rigor no es abuso de formalización y simbología sin significado; **rigor es, ante todo claridad mental**. El desarrollo del pensamiento no se consigue solo cuando trabajamos actividades de un contenido específico, sino en el momento en el que una acción o un conjunto de acciones se esfuerzan por conquistar la construcción de una idea. Formular unas cuantas observaciones indicativas con el fin de subrayar que el niño ha realizado actividades para desarrollar el pensamiento nada dice sobre el verdadero desarrollo, si descuidamos la emoción, la observación, la intuición, la creatividad y el razonamiento de las demás actuaciones, procesos, estrategias, comportamientos y diálogos. Toda acción lógica que opere significativamente en el aprendizaje de la Matemática debe, a nuestro juicio, desde la enseñanza:

- Basar la educación en la experiencia, el descubrimiento y la construcción de los conceptos, procedimientos y estrategias; más que en la instrucción. Basar la educación en estrategias de falsación o contraejemplos, evitando el «bien» o «mal» como autoridad que sustituye a la evidencia. Extender y transferir los conocimientos generando articuladas redes de aplicación.

- Atender a la manipulación de materiales con actividades que optimicen el entendimiento, que provoquen, desafíen, motiven porque actualizan las necesidades del alumno. Simplicidad, claridad y precisión en el lenguaje utilizado en la presentación de las actividades o enunciación de los conceptos. Respetar al alumno cuando vive el acto de pensar. Potenciar la autoestima, la confianza, la seguridad,…
- Habituar al alumno a explicar; fundamentar mediante argumentos lógicos sus conclusiones, evitando eso de «porque sí». Familiarizarles con las reglas de la lógica para permitir el desarrollo y la mejora del pensamiento. Esta familiarización no debe ser penosa y ardua para el alumno, sino todo lo contrario: una forma de jugar a crear relaciones, contrastando las respuestas antes de optar por una de ellas.



Lo que se pretende desde la enseñanza de la matemática es poner a disposición del alumno mecanismos válidos de autocorrección, para ello es necesario canalizar las estrategias didácticas hacia la comprensión, acción primordial para que los alumnos establezcan relaciones desde su realidad mental y la evidencia lógica. Estas estrategias didácticas no darán mucho éxito si no formulan preguntas que provoquen claros desafíos al pensamiento, ni favorecen creativamente la discusión y el diálogo dirigido a la investigación: «¿Qué pasaría si…?» «Supongamos que…»

El desarrollo del pensamiento lógico-matemático se puede recorrer didácticamente:

a) Estableciendo relaciones, clasificaciones y mediciones.
b) Ayudarles en la elaboración de las nociones espacio-temporales, forma, número, estructuras lógicas, cuya adquisición es indispensable para el desarrollo de la matemática.
c) Impulsar a los alumnos a averiguar cosas, a observar, a experimentar, a interpretar hechos, a aplicar sus conocimientos a nuevas situaciones o problemas
d) Desarrollar el gusto por una actividad del pensamiento a la que irá llamando matemática.
e) Despertar la curiosidad por comprender un nuevo modo de expresión.
f) Guiarle en el descubrimiento mediante la investigación que le impulse a la creatividad.
g) Proporcionarles técnicas y conceptos matemáticos sin desnaturalización y en su auténtica ortodoxia.

Los procedimientos que se utilicen para la consecución de los objetivos presentados anteriormente serán válidos en tanto se apoyen, en un principio, lo más posible en la experimentación, obteniendo como resultado experiencias fructíferas que aseguren la fiabilidad del conocimiento lógico y matemático. Con razón escribía Puig Adam[10]. *«Si abstraer es prescindir de algo, debe existir ese algo del que se pueda prescindir».*

[10] PUIG ADAM, P. *Didáctica. Matemática. Eurística*. Institución de Enseñanza Laboral. Madrid, 1956, pág. 8.

3. PRINCIPIOS METODOLÓGICOS E INTERVENCIÓN EDUCATIVA

A) Contenido frente a conocimiento

Que el alumno sea el constructor de sus propios aprendizajes, se ha dicho de mil formas diferentes en diferentes reformas educativas. Yo creo en ello. No por oídas, sino por lo que la experiencia me ha dictado y me dicta. Por lo que no tengo inconveniente en afirmar, desde mi experiencia, que de otro modo el aprendizaje se verá desnaturalizado, aportando al alumno un contenido, que no un conocimiento. Ya he dicho en otras ocasiones, que contenido es lo que se enseña y conocimiento es lo que se aprende.

B) ¿Enunciar - memorizar - comprender?

Otra tesis en la que apoyo mi intervención como didacta de la matemática es el cambio de: «Enunciar, memorizar, comprender» por «Comprender, enunciar, memorizar y aplicar». Me explico: Habitualmente se empieza por el enunciado de los conceptos, las relaciones o su representación convencional, como segundo paso se hace que se retenga en la memoria y, finalmente, se realizan ejercicios para su comprensión. Este orden de presentación de la enseñanza de la matemática nunca me dio buenos resultados. Cambié, entonces. En primer lugar, elaboré actividades que mediante ejemplos y contraejemplos, y sin corregir en modo alguno el pensamiento del alumno, le ayudasen a generar ideas, a comprender el concepto identificado siempre desde su propio lenguaje. Posteriormente enunciaba correctamente el nombre o expresión convencional de aquello que habían comprendido. Por último trabajaba en su memorización. Claro está que la memoria es importante. Pero para evitar esfuerzos innecesarios conviene que memoricen cómo se llama aquello que saben qué es.

C) Metalenguaje y lenguaje objeto

Es necesario, por tanto, como primera actividad, partir en todo momento del vocabulario del alumno[11]. En la construcción del conocimiento

---

[11] FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *La Numeración y las cuatro operaciones básicas: La investigación y el descubrimiento a través de la manipulación.* Editorial CCS. Madrid, 2002; FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *El número de dos cifras.* Editorial CCS. Madrid, 2004; FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *Didáctica de la Matemática en Educación Infantil*. Grupo Mayéutica. Madrid, 2006.

científico se hace distinción entre metalenguaje y lenguaje objeto. El lenguaje objeto es el propio de la ciencia en cuestión y el metalenguaje es ese lenguaje que utiliza para describir los términos pertenecientes al lenguaje objeto. Después, muchos términos del lenguaje objeto se pueden ir explicando a través de otros términos de ese lenguaje objeto. Cierto esto, el metalenguaje del aula para la construcción del conocimiento es el propio del alumno. Posteriormente, identificaremos un término matemático a partir de su lenguaje. Llegará un momento, dependiendo de la edad, que en el vocabulario del alumno podamos encontrar ya varios términos del lenguaje objeto que utiliza la matemática, definiendo, entonces, otros a partir de éstos. En definitiva, creo que hablamos demasiado y demasiado mal, cuando lo que hay que intentar es evitar, en la medida de lo posible, la información verbal, y enunciar con la precisión que caracteriza a la matemática cuando tengamos que hacerlo. Si observamos la ambigüedad de expresión que existe actualmente en los libros de texto dirigidos principalmente a los escolares de infantil y primaria, nos preguntamos cómo pueden tener con esos materiales un pensamiento lógico, y si éste no existe cómo pueden acceder a un pensamiento matemático. Faltan didactas y, sobran intérpretes de libros de texto.

D) La enseñanza de la matemática

Generalmente se ha aceptado que el aprendizaje de la matemática se refería al número y a la cantidad, apoyadas principalmente sus actividades en el orden y la seriación, siendo el contar el trabajo más preciado para la actividad matemática. Hoy la naturaleza de la enseñanza de la matemática se muestra diferente: como expresión, como un nuevo lenguaje y un nuevo modo de pensar con sus aplicaciones prácticas a su entorno circundante, mediante la contrastación de las ideas. Aunque la asociación matemática y número suele ser habitual, se hace necesario indicar que no siempre que aparece la matemática se refiere al número, del mismo modo que el hecho de utilizar números nada puede decir del hacer matemático, si este hacer no ha sido generado por una acción lógica del pensamiento.

Apoyamos la enseñanza de la matemática en lo que el profesor sabe, cuando deberíamos apoyarla en lo que el alumno desconoce. Damos por hecho que la simple información verbal de una situación clara para el docente, trasmite a la mente del alumno, con la misma claridad, lo que nosotros sobre ello comprendemos; y eso, mucho se aleja de la auténtica comprensión del concepto por la observación y experimentación de diversidad de situaciones en la que éste puede aparecer. Esto supone que muchos escolares reconozcan el concepto o la relación sólo cuando se le presenta de la misma forma como se le ha presentado para su aprendizaje. No puede reconocerlo en otras diferentes situaciones, no es funcional su aprendizaje, la aplicación del concepto se apoya en el azar y la adivinación y es nula la transferencia de estos contenidos a otros nuevos para la construcción del conocimiento. Es necesario que el profesor sustituya la información verbal que dirige a sus alumnos por dudas, retos y desafíos mediante acertadas actividades, que cuidadosamente preparadas, permitan adquirir lo que se esta trabajando con la solidez que como contenido matemático le caracteriza. Si el profesor dice: «*esto es una recta*», también está diciendo a la lógica interpretación del alumno que todo lo que no sea «esto», no se puede reconocer como «recta» (Wittgenstein)[12].

3.1. Existencia y asistencia del pensamiento

La existencia del pensamiento pertenece, todavía hoy, a un proceso mágico. Sin embargo, la asistencia al pensamiento se recoge, por su posibilidad de contrastación, en un proceso científico. La enseñanza debe permitir que el sujeto llegue a la adquisición de los conceptos por sus propios hallazgos. Su terminología específica y la simbología pertinente deben ser el punto de llegada en la construcción del conocimiento, y no el punto de partida. Enunciar el concepto es posterior a la comprensión de éste, porque creemos, al igual que Heidegger[13], que «*El enunciado es la articulación de lo que se ha comprendido*».

Esta indicación, tan reconocida en la teoría como escasa en la práctica, señala unos procedimientos a la vez que anula otros. Se espera, que la pregunta reine de modo supremo en la expresión del profesor, pero las preguntas preestablecidas para respuestas preestablecidas no forman parte del desarrollo de la actividad intelectual. Que todo desafío implique una pregunta, no hace suponer que toda pregunta implique un desafío, porque éste aspira a provocar en el sujeto un estado de indagación cuyo resultado añada algo a lo que ya sabía. Los retos, los ejemplos y contraejemplos son los alimentos de los que se nutre la interacción profesor-alumno. Se puede partir, entonces, de las experiencias y conocimientos previos de los que aprenden, que tienen la oportunidad de jugar con las respuestas antes de escoger una de ellas; acción que resuelve con frecuencia, el grave problema para el aprendizaje que supone la falta de ideas, junto con la privación de autonomía, perseverancia y flexibilidad[14].

---

[12] WITTGENSTEIN, L. *Observaciones sobre los fundamentos de la Matemática*. Alianza Editorial. Madrid, 1987.
[13] HEIDEGGER, M. *El ser y el tiempo*. FCE. México, 1951, pág. 112.
[14] STEPHEN, J. y ASHCROFT, J. R. *Mathematics for Dyslexics*. A teaching Handbook. Whurr Publishers. London, 1999.

3.2. Etapas del acto didáctico

Existen, a mi juicio, cuatro etapas[15] fundamentales en el acto didáctico: Elaboración, Enunciación, Concretización y Transferencia o Abstracción. Este orden de presentación de las etapas es irreemplazable.

1. **Etapa de Elaboración**. En esta etapa se debe conseguir la intelectualización de la/s estrategia/s, concepto/s, procedimiento/s que hayan sido propuestos como tema de estudio.

El profesor, respetando el trabajo del alumno y el vocabulario por él empleado, creará, a partir de las ideas observadas, desafíos precisos que sirvan para canalizarlas dentro de la investigación que esté realizando en su camino de búsqueda. Tal planteamiento, supone evitar la información verbal, así como las palabras correctivas: «bien» o «mal»; utilizando, en todo momento, ejemplos y contraejemplos que aporten continuidad a la pluralidad de respuestas que escuchemos. Estas respuestas, ya correctas o incorrectas, se forman a través de un diálogo entre todos y de un diálogo interior, y deben ser recogidas, como hipótesis, desde la motivación de comprobarlas por sus propios medios para establecer conclusiones válidas. La curiosidad por las cosas surge por la actualización de las necesidades de nuestros alumnos; necesidades, no solamente físicas o intelectuales sino también operativas en el pensamiento para buscar soluciones a las dudas que se reflejan en focos concretos de las situaciones propuestas.

Esta etapa subraya el carácter cualitativo del aprendizaje. El respeto al niño es obligación permanente para que su originalidad y creatividad tome forma en las estrategias de construcción del concepto o relación. Y es en esta etapa, más que en ninguna otra, donde el profesor pondrá a prueba el dominio que tiene sobre el tema. Un domino sin el cual se perderá fácilmente.

2. **Etapa de Enunciación**. El lenguaje, que desempeña un papel fundamental en la formación del conocimiento lógico-matemático, se convierte muchas veces en obstáculo para el aprendizaje. Los niños no comprenden nuestro lenguaje. Si partimos de nuestras expresiones les obligaremos a repetir sonidos no ligados a su experiencia. Estas expresiones darán lugar a confusión y se verá aumentada la complejidad para la comprensión de los conceptos y la adquisición de otros nuevos. Por esto, llegados al punto en que el niño ha comprendido a partir de la generación mental de una serie de ideas expresadas libremente con su particular vocabulario, se hace necesario enun-

[15] FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. «Las cuatro etapas del acto didáctico». *Comunidad Educativa*. ICCE, núm. 228, 1995.

ciar o simbolizar lo que ha comprendido, respecto a la nomenclatura o simbología correctas: *los convencionalismos*. Este es el objetivo de esta etapa: poner nombre o enunciar con una correcta nomenclatura y simbología. Por ello, la etapa anterior es de exagerada importancia y debe tener su particular evaluación para no considerar intelectualizado todo lo que en ella se ha visto, sino todo lo que en ella, ciertamente, se ha intelectualizado.

En esta etapa, se puede orientar al sujeto de esta forma: «Eso que tú dices... se dice...», «Eso que tú escribes como... se escribe...», «Lo que tú llamas... se llama...», «Lo que tú expresas de la forma... se expresa...», «Lo que tú indicas con... se indica...» (...)

3. **Etapa de Concretización**. Es la etapa en la que el alumno aplica, a situaciones conocidas y ejemplos claros ***ligados a su experiencia***, la estrategia, el concepto o la relación comprendida con su nomenclatura y simbología correctas. Se proponen actividades similares a las realizadas para que el alumno aplique el conocimiento adquirido, y evaluar en qué medida ha disminuido el desafío presentado en la situación propuesta en la etapa de Elaboración.

4. **Etapa de Transferencia o Abstracción**. Etapa en la que el niño aplica los conocimientos adquiridos a cualquier situación u objeto ***independiente de su experiencia***. Es capaz de generalizar la identificación de una operación o concepto y aplicarlo correctamente a una situación novedosa, tanto en la adquisición de nuevos contenidos, como en la interrelación con el mundo que le rodea. En muchas ocasiones, no se puede estudiar después de la etapa de Concretización; se confundiría con ella y su independencia como etapa no sería significativa. Existen niños que reproducen, sin dificultad alguna, formas de figuras inmediatamente después de haberlas trabajado, y, sin embargo, muchos de ellos no reconocen esas formas en los objetos del entorno en el que desenvuelven su actividad cotidiana, unos días más tarde. Se puede decir, que estos alumnos no han asimilado la relación o conjunto de relaciones trabajadas con anterioridad sobre el concepto. Si esto ocurre, el profesor revisará la preparación de las etapas anteriores y su actuación en ellas, desde una investigación-acción.

3.3. Ideas sobre metodología didáctica para la enseñanza de la matemática

1. Dominar la matemática que se esta enseñando, distinguiendo la idea, de la notación de la idea. Una cosa es el concepto y otra, muy distinta, es la simbología que se utiliza para representarlo. Así, por ejemplo, el número cero no es esto: «0», eso es lo que se utiliza para representar la ausencia de elementos, siempre y cuando así se interprete. No faltan libros de texto en los que, confundiéndose concepto y simbología, podemos leer que el cero es una *o*, que el cero es una rosquilla, que el dos es un patito, o, que el seis (6) es «el número que no quiso ser cero».

2. Dominar el arte de preguntar, partiendo siempre del lenguaje del alumno, como modelo de duda, desafío y camino de comprensión para el aprendizaje, en la adquisición del concepto que se esté elaborando intelectualmente; conduciendo al alumno mediante ejemplos y contraejemplos que fomenten la discusión y el diálogo, para que sea él, y sin corrección alguna por nuestra parte, el que advierta con claridad, por el diálogo interior provocado: el acierto o el error cometido.

3. Entender que la evidencia, la realidad, la necesidad y la curiosidad son las situaciones necesarias en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática; por lo que no debemos olvidar que los materiales que utilicemos pueden, por la metodología empleada, favorecer, o no, esas situaciones. Entendiéndose únicamente por material válido para el aprendizaje de la matemática, aquel que hace uso de ellas.

4. Utilizar modelos didácticos, fomentando la investigación y el método científico que, a modo de recurso, permita el descubrimiento de los conceptos, para facilitar que el alumno llegue al saber matemático con precisión de resultados y sin equivocación alguna.

5. Enunciar, representar y simbolizar, como un buen comunicador y con el rigor y la precisión científica que no impliquen ambigüedad alguna después, y sólo después, de que el alumno haya comprendido el concepto o relación. Relatar acontecimientos de la Historia de la Matemática que estén relacionados con el concepto trabajado, siempre que sea posible, y de manera sugerente y atractiva.

6. Presentar al alumno actividades matemáticas de cualquier tipo o modelo, desde las más sencillas a las más complejas, cuando el alumno tenga suficientes mecanismos de auto-corrección.

7. Fomentar en cualquier etapa educativa, con una correcta adaptación la aplicación, transferencia y abstracción de los contenidos enseñados, a cualquier campo científico, natural y social.

8. Apoyar la participación del alumno, de forma natural y espontánea, en la búsqueda del conocimiento, y no tan sólo y de forma exclusiva en el antojo de la enseñanza para obtener respuestas a preguntas pre-establecidas.

9. Motivar al aprendizaje de la matemática hacia el saber, hacia el sentir y hacia el querer.

10. Escuchar al alumno, atendiendo a modo científico:
    a) Que las respuestas que obtenemos no coincidan con las que esperamos implica simplemente discrepancia entre la enseñanza y el aprendizaje, y no significa en modo alguno que el niño no razone.
    b) El niño nunca responde por azar, si no ha sido intimidado.
    c) El niño nunca quiere fallar o hacerlo mal, si no ha sido irritado
    d) Ni existe, ni existirá método alguno de enseñanza superior a la capacidad de aprendizaje de la mente humana.

BIBLIOGRAFÍA

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. “Las cuatro etapas del acto didáctico”. *Comunidad Educativa*. ICCE, nº 228, 1995.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *La Numeración y las cuatro operaciones básicas: La investigación y el descubrimiento a través de la manipulación.* Editorial CCS. Madrid, 2002.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *El número de dos cifras.* Editorial CCS. Madrid, 2004.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *Didáctica de la Matemática en Educación Infantil.* Grupo Mayéutica. Madrid, 2006.

GAGNÉ, E. *La psicología cognitiva del aprendizaje escolar.* Aprendizaje-Visor. Madrid, 1991.

HEIDEGGER, M. *El ser y el tiempo.* FCE. México, 1951.

IAN STEWART. *De aquí al infinito. Las matemáticas hoy.* Crítica. Barcelona, 2004.

KRIVENKO, M. *Psicología*. Planeta. Barcelona, 1990.

PLATÓN. *Teeteto* en *Obras Completas*. Aguilar, 2ª ed., 4ª reim., Madrid, 1979.

PUIG ADAM, P. *Didáctica. Matemática. Eurística*. Institución de Enseñanza Laboral. Madrid, 1956.

REY PASTOR, J. *Elementos de Análisis Algebraico*. Biblioteca Matemática. Madrid, 1981.

RUSSELL, B. *Introducción a la filosofía matemática.* Paidos. Madrid, 1985.

STEPHEN J. y ASHCROFT, J. R. *Mathematics for Dyslexics.* A teaching Handbook. Whurr Publishers. London, 1999.

VERGNAUD, G. *El niño, las matemáticas y la realidad*. Trillas. México, 1991.

WHITEHEAD A. N. “Mathematics and Liberal Education”. *Journal of the Association of Teachers of Mathematics for the Southeastern Part of En-*

gland. Volume I, Number 1 in a philosopher looks at science, (Philosophers Library) New York, 1965.

WITTGENSTEIN, L. *Observaciones sobre los fundamentos de la Matemática.* Alianza Editorial. Madrid, 1987.