¿ES LA MULTIPLICACIÓN UNA SUMA DE SUMANDOS IGUALES?[1]

José Antonio Fernández Bravo

No es difícil recordar alguna situación en la que nos enseñaron algo que nosotros desconocíamos. La acción de "retener" lo que se nos ha dicho, implicaba, para nosotros, el haber "aprendido" y, generalmente, percibíamos como verdadero ese conocimiento.

Que sea verdad que sabemos, nada dice de la verdad de ese saber. Durante años se enseñaba en las escuelas: que la tierra era plana, que el sol giraba alrededor de ésta, que todo círculo quedaba dividido en dos partes iguales por un diámetro... Supongo que, cuando el aprendizaje de estas afirmaciones fuese evaluado, el poner "bien" o el poner "mal", se correspondería con la "verdad" o la "mentira", respectivamente. La verdad no se refiere, en esta clarificación, a la verdad del conocimiento adquirido sino a la verdad de adquirir así ese conocimiento.

UNA SERIA DIFICULTAD DIDÁCTICA

El conocimiento heredado nos dice que la multiplicación debe ser introducida, didácticamente, como "una suma de sumandos iguales". No obstante, una suma no es una multiplicación. Mientras que en las situaciones sumativas sólo aparece un conjunto (manzanas y manzanas; peras y peras; estanterías y estanterías), en las situaciones en las que interviene la multiplicación aparecen dos conjuntos, claramente definidos, y una relación constante (cajas y manzanas, bollos y euros, estanterías y libros, años y días). Les decimos a los niños que sólo se pueden sumar "cosas iguales" y aunque en la multiplicación aparezcan "cosas distintas" nos empeñamos en que sea una suma o, peor aún, que la actitud mental sea la misma en ambas situaciones.

La mayoría del profesorado asegura que los niños tienen dificultades con los problemas de multiplicar; que no son pocos los que, en principio, los confunden con la suma y, ante este problema: "Tengo 3

[1] Artículo original publicado en la revista "Comunidad Educativa" ICCE, Mayo-1994, Núm. 215, 43-45. El texto que aquí aparece ha sido revisado, obligándonos a presentar algunos cambios respecto al original.

estanterías y en cada estantería hay cinco libros, ¿Cuántos libros tengo en total?, responden: 3 + 5= 8. El niño ha hecho problemas de sumar pero no de multiplicar, si le decimos que la multiplicación es una suma, ¿qué error ha cometido? Posteriormente, y a la fuerza de hacer problemas iguales, el niño logra intuir la aplicación del símbolo (x), más o menos "correctamente". Mucho se desprende esta manera de proceder de los fundamentos de las matemáticas para la distinción intelectual operativa, por tanto, mucho se aleja de la posibilidad de que el alumno sea consciente de su pensamiento relacional.

Nos encontramos con una seria dificultad didáctica respecto a la comprensión del concepto, cuando decimos que una multiplicación es una suma de sumandos iguales ya que, no sólo estamos diciéndole al niño que la multiplicación es "eso" sino que todo lo que no sea "eso", no vale como multiplicación.

RAZONES DE DIFERENCIACIÓN

No podríamos hablar de construcción del conocimiento matemático si las ideas que son "válidas" no son válidas para siempre. Una idea D se ha descubierto y ha surgido a partir de otra idea C, anterior a D, y ésta se ha construido apoyándose en B, que ha surgido de la validez de la idea A, anterior a B. Una idea es matemática si es verdadero lo que afirma o falso lo que niega, se expresa con el mínimo discurso y es demostrable, con independencia de Espacio y Tiempo. Si dos mas dos son cuatro cuando se tienen siete años no se puede admitir resultado distinto a 4 a la edad, por ejemplo, de doce años.

"Demostramos" que una multiplicación es una suma de sumandos iguales mediante, supongamos la expresión: 5 + 5= 2 x 5; pero, con cierta objetividad, cualquier niño percibe diferencias. El primer miembro de la relación aparecen dos números iguales con el símbolo (+), en el segundo miembro aparecen dos números distintos con el símbolo (x), luego es evidente que se diferencian, y si hay diferencias, ¿cómo pueden ser iguales? Matemáticamente se respeta esta relación en tanto a que: 5 + 5 = 10 **y** 2 x 5 = 10, lo único que dice es que equivalen al mismo número, respetándose así la relación (=) en esas expresiones.

Que el agua hierva cuando se pone al fuego y que el agua hirviendo queme, no quiere decir que el agua sea fuego. Habrá gente que llegue a Madrid por a nacional II y gente que llegue a Madrid por la nacional VI, pero eso nada dice sobre que esas carreteras sean iguales. Que el rayo de sol sea necesario para que una hoja este verde no quiere decir, como afirma Sujomlinski, que se identifique el sol con la hoja verde.

Si partiésemos, utilizando la reversibilidad de las relaciones anteriores, por ejemplo el número ocho (8), este número se podría expresar como: 7 + 1, y también como: 9 – 1, se me puede respetar la relación: 7 + 1 = 9 – 1, pero de ahí no puedo inferir que una suma sea una resta.

Es matemáticamente correcto que: 35 =7 x 5 = 40 – 5, ¿diríamos, entonces, que una multiplicación es una resta? Seguramente que estamos pensando que todo esto no tiene nada que ver con la expresión, por ejemplo: 3 + 3 + 3 + 3 = 3 x 4, ya que lo que siempre sucede es que una multiplicación se puede hacer mediante sucesivas sumas.

La multiplicación 36 x 99 se puede calcular: (36 x 100) – (36 x 1), ¿qué les diríamos ahora?, ¿qué una multiplicación son dos sumas y una resta? Apoyándose en la multiplicación como suma de sumandos iguales a ningún alumno se le ocurriría calcular 78 x 396 como: (78 x 400) - (78 x 4), una manera rápida y mucho más matemática que seguir unas estereotipadas indicaciones.

Si pensamos que eso de *la suma de sumandos iguales* sirve para que a los niños les cueste menos entender lo que es una multiplicación y que, según vayan creciendo se les va cambiando lo que se les ha dicho otorgando al cambio un rigor matemático, hay que decir que estamos engañando a su pensar lógico, que no nos podremos apoyar en lo que saben para conducir el avance, que su respuesta intelectual no se apoyará en el razonamiento. Una cosa es añadir a un concepto más saber sobre él según avance el conocimiento y otra, muy distinta, cambiar el saber anterior sobre el concepto para entender su significado. Rigor es ante todo claridad, y éste se debe dar a cualquier edad.

Pensemos en la multiplicación de un número cualquiera por el número uno, en la forma "una vez". Pensemos por ejemplo en, "una vez siete". Una vez siete es igual a siete, y es difícil ver esta multiplicación como una suma de sumandos iguales debido a que, para hablar de sumandos, deben existir al menos dos. Quizás falte algo que añadir a la definición. Digamos que se podrá expresar como una suma de sumandos iguales excepto cuando se multiplica por el número uno. Mejor aún, podríamos decir que la multiplicación de un número cualquiera por el número uno no debe ser considerada como una multiplicación y, así, nos seguiríamos sujetando a la "*¿auténtica definición?"*

Supongamos que afirmo que un número es el producto de su raíz cuadrada y que tomo esto como definición de número. No tendría sentido, ¿qué tiene que ver eso con el concepto número? Habría que estudiar la estructura interna de esa operación con radicales y las propiedades implícitas que verifican un resultado numérico, distinguiendo la representación de los símbolos de las relaciones entre las representaciones simbólicas.

No he conocido ningún libro que desarrolle la expresión: 7 x 3 x 2 x 2 como suma de sumandos iguales, sería verdaderamente complicado. Si aplicamos esa expresión a una situación real tendríamos cuatro conjuntos diferentes: 7 casas; en cada casa 3 habitaciones; en cada habitación dos camas; en cada cama dos sabanas.

Si avanzamos un poco más en el programa matemático que se establece por currículum en los colegios, para la etapa de Educación Primaria, llegaríamos a calcular áreas y volúmenes; por ejemplo el área de un rectángulo y valiendo eso de “largo por ancho”, por mucho que se sume una longitud jamás equivaldría a una superficie o, si hablásemos de volúmenes, y valiese eso de “ superficie por altura”, ¿cómo lo comprenderían a través de una suma de sumandos iguales?: por mucho que sumemos una superficie nunca saldríamos del plano para situarnos en el espacio.

Supongamos un prisma de 7 centímetros cuadrados de base y una altura de 3 centímetros. Podríamos sumar tres veces 7 cm2 y formaríamos una superficie de 21 cm2. Ese número 21, coincidiría con el número 21 del volumen pero que el número coincida no quiere decir que la suma de superficies equivalga al volumen, o decir que un volumen es una suma de repetidas superficies, o que una superficie es una suma de repetidas longitudes.

Pero..., supongamos que alguien nos dice, como me han llegado a decir, que una superficie se puede sumar “hacia arriba” consiguiendo así el volumen, ¿qué podríamos decirle? Creo que más que decirle habría que plantearle dos preguntas: ¿Cuántos centímetros cuadrados equivalen a un centímetro cúbico?, ¿depende, quizás, del grosor del centímetro cuadrado?

Es imposible permitir un aprendizaje heurístico, llegando los alumnos al saber por sus propios descubrimientos, cuando los conceptos en los que se apoyan les llevan a confusiones por ser éstos cambiados de curso en curso, que una cosa es contenido y, otra, conocimiento.

EL LENGUAJE Y LA SIMBOLIZACIÓN

La palabra “por” que utilizamos al leer el signo (x) no tiene para el niño ningún significado ni asociación con la realidad. Identifica “por” con el signo (x), pero más que asociar imágenes debe intelectualizar una simbología. Entendiendo, que no existen símbolos matemáticos sino una interpretación matemática de los símbolos, es la palabra “veces” la que les acerca a una buena intuición del signo “x”. Cuando el alumno asocie el concepto a la palabra “veces” y al signo “x” de forma correcta y en repetidas ocasiones, podremos indicarles que, en matemáticas, lo que nosotros leemos por “veces” se lee: “multiplicado por” y, para abreviar decimos, simplemente: “por”.

El arduo empeño que tenemos en que escriba al revés de cómo se lee o, si se prefiere, en que lea al revés de cómo se escribe, la expresión, por ejemplo: “tres veces cinco”, que debería escribirla según el monopolio didáctico de los libros de texto como: 5 x 3, no constituye más que una reeducación metodológica. Nunca me he encontrado con la expresión: a2 + a3 = a5 (dos **a** más tres **a** igual a cinco **a**)

Análogas consideraciones podríamos hacer sobre las palabras “multiplicando” y “multiplicador”. ¿Cuál es el multiplicando? ¿Cuál es el multiplicador? Decimos que 5 x 4 = 4 x 5, entonces, ¿el multiplicando puede ser multiplicador y el multiplicador multiplicando? Pero, si el multiplicando puede ser multiplicador y el multiplicador multiplicando, ¿cómo los distingo? ¿Es quizás una cuestión de orden más que de concepto? Si es una cuestión de orden no tendría relevancia su distinción y, si es una cuestión de concepto, ¿qué sentido matemático tiene para el niño su distinción? Digamos, entonces: “factores”, palabra admitida y que pertenece al lenguaje objeto de la Matemática.

Encuentro también en los libros de texto utilizados por nuestros alumnos, y de forma habitual, órdenes como esta: “Escribe en forma de producto: 17 + 17”. ¿Qué quiere decir eso? ¿Es el producto una forma de la suma? Se ha inventado un postulado didáctico y a partir de él se ha dado significado a otros elegidos conceptos, se han elaborado correspondientes procedimientos y se han creado fieles ejercicios. Y ¿qué tiene que ver la propiedad con la definición? Digo “elegidos conceptos” porque no he encontrado en ningún material escrito órdenes como: “*expresa como suma de sumandos iguales `2 elevado a 4´”* ¿Por qué? Si se acepta que la multiplicación es una suma de sumandos iguales y la potencia es una multiplicación, se podría definir potencia a partir de multiplicación y decir que una potencia es una “suma larga de sumandos iguales”.

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$[(2 + 2) + (2 + 2)] + [(2 + 2) + (2 + 2)]$$

Podríamos definir una potencia “***a*** elevado a n” como una suma que tiene tantos sumandos iguales como indica el resultado de calcular “***a*** elevado a n-1”. Nos encontraríamos con una proposición recurrente ya que tendríamos que definir “***a*** elevado a n-1” (Es mejor no intentarlo por el mismo procedimiento)

Entonces cuando alguien nos invitase a inventarnos un problema en el que intervenga para su solución la potencia “2 elevado a 4” podríamos proceder así: Tengo ocho bolsas y en cada bolsa dos botones, ¿Cuántos botones tengo? Si damos eso por válido, tendríamos que admitir la igualdad de estas dos siguientes situaciones problemáticas:

- “Tengo tres euros y me dan dos euros. ¿Cuántos euros tengo en total?”
- “Tengo siete euros y me gasto dos. ¿Cuántos euros me quedan?”

Pero no se puede admitir la igualdad de esas dos situaciones problemáticas, porque una cosa es que tengan el mismo resultado y otra, muy distinta, es que la conducción intelectual sea la misma.

Es de comprensión ambigua para el pensamiento la utilización de una pareja permutable para la demostración de la propiedad conmutativa de la multiplicación en N, pero restringe más la clarificación de tal demostración si atendemos a: 3 x 4 = 4 x 3; porque 3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 4 + 4 y no percibo, por más que miro esta última expresión, el cambio de orden de los factores. Ahí no hay factores sino sumandos y, ¿qué es lo que hay que ver?, que siempre que haya cuatro sumandos iguales ¿es lo mismo que tres sumandos iguales?, ¿la propiedad conmutativa consiste en tener un sumando más en un miembro de la igualdad? Y ¿qué tienen que ver las propiedades de la suma con las de la multiplicación? ¿Es posible demostrar las propiedades de la multiplicación con las propiedades de la suma? En cierta ocasión me dijo un niño que “*una multiplicación no podía ser una suma porque multiplicar no era lo mismo que sumar cero, y cero y uno no eran iguales”*. ¿Qué quiso decir? ¿Tendrá esta afirmación algo que ver con lo que estamos diciendo?

Confundir la didáctica de la matemática, que debería estar apoyada en el descubrimiento del conocimiento completo de las alternativas, con la exposición de un modo de hacer, trae como consecuencia la transformación de “la fundamentación lógica” en “una psicología del convencimiento”[2].

---

[2] Utilizando palabras de Wittgenstein

Quiero terminar diciendo que en este momento llevo puesto un jersey de color verde. Es verdad que he dicho que llevo puesto un jersey de color verde, pero… ¿será verde el color de mi jersey? Que sea verdad que se haya escrito esto, nada dice de la verdad de lo que se ha escrito.

PROCESO DIDÁCTICO DE INICIACIÓN A LA MULTIPLICACIÓN

- Presentar el concepto “veces”.
- Utilizar la palabra *veces* correctamente asociada a situaciones de su entorno.
- Distinguir situaciones en las que se puede, o no, utilizar la palabra *veces*.
- Asociar a la palabra *veces* el signo “x”, que se lee: “multiplicado por”; de forma abreviada “por”.
- Expresar matemáticamente situaciones con el signo x
- Asociar al signo x la expresión matemática de una situación multiplicativa.
- Distinguir situaciones multiplicativas de situaciones sumativas.
- Construir las tablas de multiplicar.
- Reconocer la propiedad conmutativa de la multiplicación
- Estudiar relaciones entre las tablas.
- Entender el algoritmo de la multiplicación por una cifra y calcular correctamente mediante su utilización.
- Descubrir otras formas de calcular, más rápidas y sencillas a partir de la aplicación de las relaciones estudiadas entre las tablas.
- Multiplicar por el uno seguido de ceros y sus múltiplos.
- Entender el algoritmo de la multiplicación por cualquier cifra y calcular correctamente mediante su utilización.
- Descubrir otras formas de calcular, más rápidas y sencillas a partir de la aplicación de las relaciones estudiadas entre las tablas.
- Resolver, formular y construir situaciones problemáticas.