Fundamentos epistemológicos del aprendizaje-enseñanza por investigación. *Iniciación a la división*[1]

José Antonio Fernández Bravo

Los fundamentos epistemológicos de un aprendizaje-enseñanza por investigación se tienen que registrar en cualquier etapa educativa. Esos principios tienen que estar presentes en las diversas actuaciones, independientemente de la edad y de la fuerza del contenido.

Enfrentarse a un problema, formular hipótesis, jugar con las respuestas antes de escoger una de ellas, llegar a escribir sus propias conclusiones,... forma parte de un proceso de aprendizaje no solo atractivo y motivador, sino necesario.

La investigación-acción en el aula posee dos referentes encadenados: la enseñanza y el aprendizaje. No hay investigación si no subordinamos el primero al segundo. El aprendizaje de la matemática no se justifica en el "quehacer" del profesor para la adquisición, por parte de los alumnos, de determinados conceptos, sino en la constante presentación de los fundamentos que la engendran, la definen y constituyen; los fundamentos del pensamiento, de la observación, la intuición y la imaginación; del razonamiento lógico; de la capacidad para establecer relaciones, para inducir, inferir, deducir, para aplicar un significado a una simbología que opera en nuevas creaciones de significado. La enseñanza supone una acreditación de resultados; recoger para obtenerlos, con el máximo temperamento profesional, recursos con carácter sin distinguir "los listos" de los que "no pueden llegar", porque aunque no todos los niños tienen la misma capacidad para aprender matemáticas, sí todos tienen la misma necesidad de aprenderlas. La función de la enseñanza consiste en cubrir las necesidades y no dedicarse, únicamente, a clasificar las capacidades.

APRENDIZAJE CONSTRUCTIVO

Esta experiencia, realizada con niños de ocho años, es el fruto de un respeto a las propuestas infantiles durante varios cursos. En un principio se elaboraba, a

[1] Artículo original publicado en la revista "Comunidad Educativa" ICCE, Septiembre-Octubre, 1995, Núm. 226, 36-41. El texto que aquí aparece ha sido revisado, obligándonos a presentar algunos cambios respecto al original.

partir de una programación, una correlación de los "pasos" que a mi parecer conformaban la estructura para el descubrimiento y la adquisición del algoritmo de la división.

> *El diseño de las actuaciones, bien desde la máquina de escribir como programación, bien desde la imprenta como guía o libro de texto, intentan modelar la persuasión dirigiendo las mentes de los alumnos hacia unas metas preconcebidas ,caracterizando el conocimiento que tienen que conseguir y el cómo deben conseguirlo .El error no está , a mi juicio, en la contemplación "a priori" de unas pautas correlativas de actuación, sino en fijarlas, desde una formalización cuantificada, a un dogmatismo cerrado y sistemático. Son muchas las ocasiones en las que las exigencias del entendimiento del alumno no están planificadas, porque no se pueden programar los resultados de una intervención espontánea o la intencionalidad de la situación creada en el momento, las constantes variables de los procesos del pensamiento o la aceptación lógica de nuestros procedimientos. Si nos atamos a estos planes escritos desde el convencimiento de su infalibilidad, otorgando a sus componentes una firme consistencia, propongo que , en lugar de ser elaborados por maestros, psicólogos, pedagogos, matemáticos u otros especialistas, los realicen excelentes "parapsicólogos" y "videntes" de gran reconocimiento y probada eficacia.*

Me servía muy poco de lo que tenía programado; los niños elegían otros caminos, otras formas de construcción, otros puntos de apoyo, orientándome en la conexión de tres ideas desde donde construir, didácticamente la división:

1. Introducir la división como inversa de la multiplicación

12 dividido por 3 equivale a 4, porque 4 multiplicado por 3 equivale a 12.

2. Estudiar el resto

El número de elementos que sobran al hacer grupos no puede ser mayor que el número del divisor.

3. La relación "divisor por cociente" no puede ser mayor que el dividendo

El número total de elementos utilizados para hacer grupos, no puede ser mayor que el número de elementos de que disponemos. Se suele confundir en la introducción de esta operación el resto por defecto con el resto por exceso, siendo costosa la diferenciación del "sobran" con el "me faltan". No son pocos los alumnos que actúan así:

54 / 8
2 7

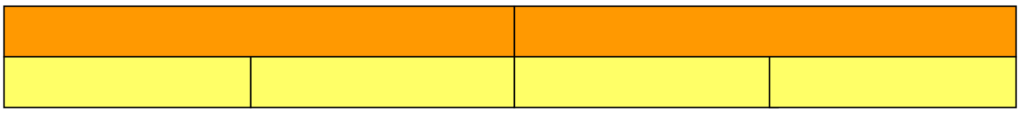
Porque 8 x 7 = 56, y 56 – 54 = 2

Es importante que el alumno descubra el contenido expresado en estos tres puntos. Presenta la generalidad de las causas de los errores cometidos por los escolares en la práctica de la división. El profesor se encargará, únicamente, de provocar situaciones desafiantes que, mediante la investigación favorezcan el descubrimiento, respetando en todo momento el lenguaje utilizado por el niño y haciendo constante uso de este lenguaje, si es necesario crear nuevos desafíos.

1. Inversa de la multiplicación

Material utilizado: Números en Color y material escrito.

-Tomad dos regletas naranjas y unirlas por sus extremos.
¿Cuántas regletas amarillas equivalen a esas regletas naranjas?



(Me dicen "cuatro" sin jugar con las regletas .Les digo que no es verdad que son tres regletas amarillas las que equivalen a dos naranjas. Ellos rompen su timidez, si es que la tiene, a la vez que ponen regletas amarillas, una tras otra, hasta llegar a cuatro, obligándome a mirar para confirmar así o que en un principio habían asegurado. Yo, callé; es muy importante que sea el material y no el profesor el que verifique sus respuestas)

Mi intención era orientarles en la visión de que con 20 blancas podíamos hacer cuatro grupos de cinco blancas porque cuatro veces cinco equivalía a 20, y me puse a dialogar con ellos para obtener la expresión esperada:

- Decís que son cuatro amarillas, pero ¿por qué no pueden ser tres amarillas?

- "Porque me faltaría una amarilla"."Porque si en una son dos, pues en dos tienen que ser cuatro"."Pues, porque son cuatro y si son cuatro no pueden ser tres".
(Estas fueron generalmente sus respuestas. Todas ellas con una lógica aplastante, pero la contestación esperada no aparecía. Quizás la pregunta no acercase la intuición hacia ella o la situación propuesta no encaminase el proceso intelectual hacia lo buscado)
Seguimos trabajando e hice que construyesen con regletas el siguiente modelo:

- ¿Qué veis?

- Una regleta naranja y una roja y también una regleta verde que esta al *principio*.(Esta pregunta parece irrelevante pero tiene un gran valor didáctico debido a que me permitió oír unas palabras utilizadas por ellos, que tomaría prestadas para acercarme a su entendimiento)

- Contestad, sin jugar con las regletas, ¿Cuántos grupos de tres blancas podemos hacer hasta llegar al "final"? (Observemos lo de "final".Todos lo entendieron. Ellos utilizaron "principio")

Como no podían jugar con las regletas expresaron rápidamente posibles respuestas y salieron unas cuantas diferentes. Las anoté en la pizarra: 4, 5, 3, 7. Después hice que utilizasen el material para averiguar la respuesta correcta.

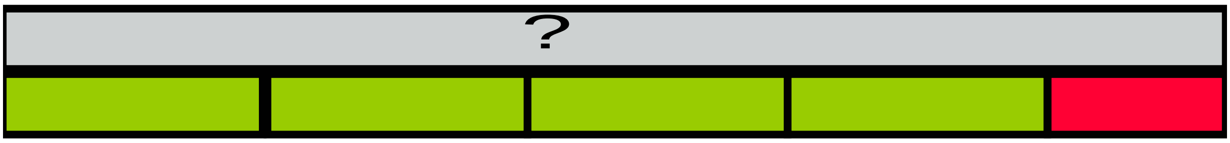
- ¿Quién ha expresado la respuesta correcta? ¿Cómo supisteis que eran cuatro si no habíais jugado con las regletas?
(Respuesta de un niño):"Porque cuatro veces tres es doce. ¡Claro!, contestaron todos los demás que habían acertado. Algunos de los que no lo habían conseguido, después de escuchar el argumento de este alumno, miraron su construcción como diciendo:"Es verdad".

Construimos otras situaciones-modelo:

- Decidme, sin jugar con las regletas, ¿Cuántos grupos de dos blancas se pueden hacer con 16 blancas?
- Ocho, respondieron.
- ¿Por qué?
- Porque ocho veces dos son dieciséis.

Hicimos algunos ejercicios más con regletas que ellos mismos comprobaban después de expresar sus respuestas, hasta asegurarme que tenían bien asimilado el "por qué".

Continuamos con situaciones-modelo cuyo resto fuese distinto de cero:
Hacer grupos de dos con nueve blancas, hacer grupos de tres con diez blancas, con once,...
Situaciones reversibles: ¿Cuántos elementos teníamos, en un principio, si hemos hecho cuatro grupos de tres blancas y nos han sobrado dos?,...



Iban percibiendo las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto, aunque aún no habían aparecido estas palabras, descubriendo así la propiedad fundamental y distinguiendo, al mismo tiempo, grupo de elemento.

Empezamos a trabajar numéricamente en la pizarra, simbolizando las situaciones de la siguiente forma:

16 grupos de 2; que se iba abreviando, 16 G2. Terminé con la expresión 16 <u>/ 2</u> que leía: Con dieciséis elementos hacemos grupos de dos.

48 G6	21 / 7	? / 3 0 4
37 / 9 ;	? / 5 ; 59 / 8 ; 2 8	? / 32 0 10
	59 / 8 **11 6**	**37 / 9** **10 3**

8 x 6 = 48; 48 + 11 = 59
9 x 3 = 27; 27+ 10= 37

En las situaciones exactas no falló ninguno, tampoco en las situaciones en las que había que completar el dividendo (aplicaban la propiedad fundamental, aunque no la identificasen en lo que hacían, para demostrar que sus respuestas eran acertadas. El profesor nunca indicaba lo que estaba bien y lo que estaba mal). En las situaciones de división entera, sin embargo, dejaban algunos un resto mayor que el divisor. Nada podía decirles porque demostraban que estaba bien aplicada la propiedad fundamental; efectivamente: el número obtenido era el dividendo. Si les hubiese indicado que el resto nunca puede ser mayor que el divisor les estaría informando, sin ningún fundamento más que mi palabra, sobre algo que ellos mismos podrían averiguar. Nuestra "palabra", como dogma de fe, evita la justificación del entendimiento.

Se abría, por tanto, respetando al alumno, un nuevo foco de atención hacia el que dirigir los desafíos: El estudio del resto

2. Análisis del resto en una división

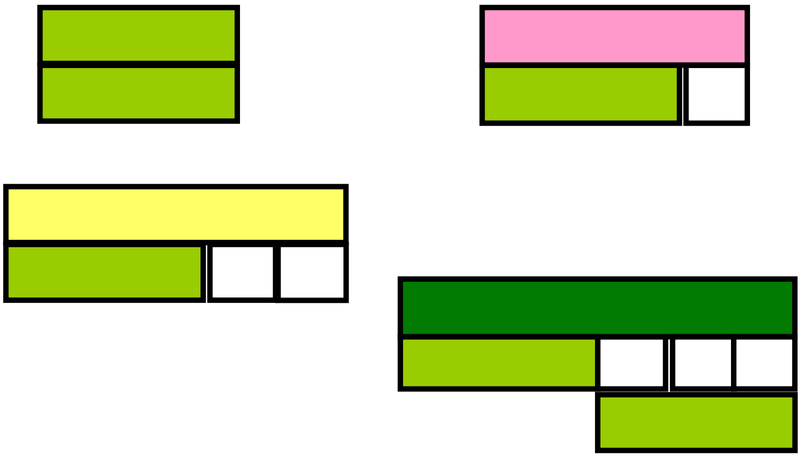
- ¿Cuántos grupos de tres blancas podemos hacer con tres blancas?
- Uno.

-¿Y con cuatro?
-Uno y sobra una blanca.

-¿Y con cinco?
-Uno y sobran dos blancas.

Entonces..., contestad lo más rápido que podáis. Repetimos:
-¿Con tres?
- Uno
- ¿Con cuatro?
-Uno y sobra una
-¿Con cinco?
-Uno y sobran dos

-¿Con seis?(Al contestar rápidamente, la continuidad rítmica les hizo decir a la mayoría:"Uno y sobran tres", pero se retractaron de su respuesta, también muy rápidamente, diciendo:"dos","dos y no sobra ninguna"



Dialogando con ellos, llegaron a la conclusión de que el mayor número de elementos que nos podía sobrar haciendo grupos de tres, era dos. Seguimos trabajando con la realización de modelos desafiantes similares, haciendo grupos de cinco elementos, de nueve, de...,escribiendo, en una hoja todos los posibles restos que ellos iban descubriendo de cada una de las situaciones:"Haciendo grupos de nueve elementos nos pueden sobrar 0,1,2,3,4,5,6,7,8; haciendo grupos de diecisiete elementos nos puede sobrar 0,1,2,...,16. (Una alumna advirtió: "En lugar de escribirlos todos podríamos escribir que nos podría sobrar todos los que son menores".Todos estuvieron de acuerdo. Esto es lo que se suele llamar, didácticamente, generar una necesidad; un apuro preciso que obliga a crear diferentes recursos de continuidad o a especificar y resumir sus conclusiones, como es el caso. Posteriormente les invité a escribir el teorema de otra forma es decir, lo que no nos podía sobrar. Propuse hacer grupos de diecisiete elementos y escribí rápidamente en la pizarra:
Haciendo grupos de diecisiete elementos no nos pueden sobrar 17,18, les pedía que siguieran y me fueron dictando, 19, 20, 21, 22, 23,... ¡Qué asombro!, no paraban. Intuitivamente habría asegurado que me dirían que en lugar de escribir todos -lo cual es imposible- escribiésemos que no me puede sobrar un número mayor o igual que el número de elementos del grupo "divisor". Lo que ocurrió es que se tomaron como un juego la continuidad rítmica de la dicción de los números naturales respecto a mi petición y esto no generó en ellos ninguna necesidad. Ésta vino después, cuando les propuse escribir en su hoja, todos los restos imposibles haciendo grupos de doce elementos. Empezaron a escribir sin preocuparse de más. Un corto espacio de tiempo y tres o cuatro niños dijeron que era imposible.
-¿Por qué es imposible?, les pregunté.
-Porque habría que escribir todos y eso es imposible.
-¿Todos?, ¿Qué todos?
-Pues todos los que son mayores y el que es el mismo.

Jugamos a corregir algunas divisiones. Aquellas en las que el error se apoyaba en el resto eran percibidas inmediatamente sin necesidad de operar. Quise evaluar al grupo-clase, recogiendo las conclusiones obtenidas, y les pregunté por el mayor número de elementos que me podía sobrar haciendo grupos de: 9, 32, 567, 2345, 76, 2,... No había ningún error y entonces me atreví a preguntarles: ¿Cuál es el mayor número que me puede sobrar haciendo grupos de "n" elementos? (Su razonamiento acentuó la originalidad. Desprovistos de un formalismo algebraico, tenían una perfecta comprensión del concepto con el que establecer relaciones. Un breve silencio y, alguien contestó: "Eme -m-, porque va antes que la ene -n-").

Nos pusimos a trabajar numéricamente:

55 / 8 ; 700 / 10 ; ? / 32
25

8 / 10 ; 136 / 52 ; 518 / 112 ; 603 / 98

? / 415
3 62

Unos tardaban más y otros menos. Todos investigaban mediante ensayo y error, y lo más importante de todo es que nadie venía a mí a preguntarme si estaba bien o mal su cálculo, únicamente decían: "¡Ya!",cuando la respuesta era hallada, utilizaban sus propios criterios de corrección.

3. El número total de elementos representados por el dividendo

Disfrutaban plenamente. Observaba lo que hacían y cómo lo hacían. No tardé en darme cuenta que algunos de ellos cometían error operando como sigue:

55 / 8 Decían que eran siete grupos y les sobraba una,
porque 8 x 7 = 56 y 56 - 55 = 1

Surgió entonces un nuevo foco de atención al que dirigir los desafíos. No podemos evitar las equivocaciones, pero sí debemos hacer que el alumno descubra sus causas generando un sólido armazón desde donde sea posible seguir construyendo. Tenían que ser conscientes de que utilizaban más elementos del total que tenían. No fue difícil hacerles conocedores de esto. Hicimos que estos niños formasen, en primer lugar, elementos de un conjunto que les invitase a percibir la relación y, en segundo lugar, hicimos un conjunto con 55 cruces en el que tenían que hacer grupos de ocho cruces, rápidamente se dieron cuenta de lo que sucedía.

Planteamos nuevos ejercicios numéricos para observar si el obstáculo había sido superado. Como nada sabían sobre el algoritmo convencional aplicaban los tres puntos descubiertos, investigando con ellos la veracidad del cálculo obtenido:

613 / 9 ; 4032 / 517 ; 809 / 72
1007 / 502 ; 593 / 106 ; 89 / 7 ; 8035 / 906

No distinguíamos entre dividir por una o varias cifras[2]; era irrelevante, las relaciones eran las mismas.

Después de unas cuantas divisiones de las que surgían una serie de situaciones intelectuales propias, se iban creando significativas estrategias de resolución de insospechada procedencia que les hacían ganar tiempo:

- Buscaban un número (cociente) aproximado, redondeando dividendo y divisor

846 / 136 -------→ 800 / 100
Números de los que partían para seguir buscando.

- Multiplicaban el divisor por múltiplos de diez para tener puntos de referencia respecto al dividendo,

846 / 136 136 x 10 = 1360

846 < 1360 ---> Núm. grupos < 10

- Intuían en la investigación la proporcionalidad de los resultados,

846 /136 Supongamos que empezaban multiplicando por tres;

[2].-Una de las causas por lo que los maestros no tenemos el reconocimiento social que merecemos es porque, a estas edades, el padre o la madre le pueden enseñar (cuando no la tía que está en Bachillerato y sabe más, o una vecina que estudia informática y se ha comprado un ordenador). Si permitimos que aprendan con ellos lo mismo que pueden aprender con nosotros, no habrá ningún reconocimiento; no existen pautas de diferenciación profesional y los parámetros de capacitación no se perciben socialmente.

136 x 3 = 408. Observaban que 846 era aproximadamente el doble de 408. El siguiente número utilizado como cociente era seis;

136 x 6 = 816; 846 - 816 = 30; 30 < 136.

He querido resaltar estas tres estrategias, demostrando que pueden ser descubiertas[3], porque son de las que, paradójicamente, solemos informar.

Observemos algunos modos del proceder de los niños con la división:

645 / 47

NIÑO A)

47 x 10 = 470; 47 x 12 = 564

645 - 564 = 81 ---> Se pueden hacer más grupos.

81 > 47

47 x 15 = 705---> Se utilizan más elementos.

Prueba con números entre 12 y 15. Lo consigue en 13.
47 x 13 = 611; 645 - 611 = 34--> Es posible.

NIÑO B) 645 / 47

47 x 10 = 470. Sobran muchos. Según él unos 200.

47 x 15 = 705 ---> Se pasaba. Lo consigue en 13, mediante ensayo y error, sabiendo que el número es mayor que 10 y menor que 15.

---

[3] La matemática no se estudia, se hace desde una disposición mental. No hay que esperar a estudiar vectores, integrales o matrices para que el alumno haga matemática. Se puede hacer matemática a cualquier edad al igual que se puede dejar de hacerla aunque estemos trabajando con derivadas parciales.

NIÑO C) **645 / 47**

47 x 10 = 470

47 x 20 = 940 Esta entre 10 y 20, nos dice.
Elige números y lo consigue en 13.

NIÑO D) **645 / 47**

Elige al azar el número 18 para empezar.

47 x 18 = 846; 846 - 645 = 201
Como se pasa en 201 elementos busca grupos de 47 con esos 201 elementos:

201 / 47 --> 47 x 4 = 188 ---> 4 grupos
Piensa, entonces, que se ha pasado en cuatro grupos y resta los grupos:
18 - 4 = 14 grupos.

Comprueba: 14 x 47 = 658. Se pasa por muy poco, según él.
Lo consigue en 13.

NIÑO E) **645 / 47**

Elige al azar el número 7 para empezar.

47 x 7 = 329; 645 - 329 = 316. Se da cuenta que le faltan "otros tantos" elementos (645 ---> (aprox.) doble de 329)

Prueba con 14 grupos: El doble de 7 grupos. Comprueba.
Lo consigue en 13.

No diferenciaban la relación por las cifras que tuviese el divisor. Les daba igual que el dividendo tuviese ceros intercalados, que los tuviera el divisor, o que existieran en el cociente; que la división fuese exacta o entera. Se me ocurrió, entonces, comprobar quién terminaría antes y que con qué margen de error, si estos niños de ocho años (a partir de aquí se identificarán por "A") o niños de uno o dos grupos superiores ("B"), que dividían aplicando el algoritmo de la división. Provoqué esta experiencia mezclando A y B y les pedí que calculasen en sus cuadernos, de una en una, las siguientes divisiones, viniendo a mí en el momento que supiesen con certeza que su cálculo era correcto, y sólo entonces:

1) 4334 / 538

2) 538 / 51

3) 52 / 103

Los niños B hacían la división y luego "la prueba". Eso les hacía perder un tiempo enorme respecto a los otros, ya que los (A) empezaban por ahí. No solamente terminaron antes los niños A, sino que no cometieron error alguno, cosa que sucedió, sobre todo, con los restos parciales en las divisiones realizadas por los niños B. En la tercera división algunos de los niños B, o se estancaron sin saber qué hacer, o ponían solamente cero en el cociente, mientras que los niños A indicaron que no se podía, argumentando "que no se podían hacer grupos" o " que no había ningún número que multiplicado por 103 diese 52".

Este análisis me llevó a hacerme algunas preguntas y a cuestionarme algunas ideas didácticas. Comparaba el tiempo que empleamos los profesores en la escuela en enseñar "la forma" o "el qué se hace", con el que utilizamos para que nuestros alumnos sean capaces de descubrir relaciones. Me preguntaba hasta qué punto era necesario enseñar un algoritmo a las puertas del año 2000, cuando las calculadoras y los ordenadores son instrumentos a los que recurrimos más que al bolígrafo. He podido comprobar cómo adolescentes de 16 y 17 años no sabían hacer una división sin calculadora y cómo estudiantes de facultad se estancaban ante esta simple operación.

Supongo que el aprendizaje del algoritmo es necesario respecto a unos objetivos pero si no se consiguen, ¿para qué enseñarlo? El algoritmo es la articulación de un conjunto de relaciones comprendidas, y no la exposición modular de una forma de proceder en la utilización de un lenguaje desprovisto de sentido y significado: ¿Qué significa "no cabe"? ¿qué significa "se baja"?, ¿por qué no se "sube"?

Los ingleses proceden de esta forma para dividir, por ejemplo: **1256 por 5**

```
      0   2   5   1
    _______________
        1   2
  5 ) 1   2   5   6
              1
```

¿Dividen mal los ingleses porque "no bajan"?, o, ¿utilizan otras representaciones para articular el conjunto de relaciones comprendidas?

Mientras nos empeñemos en anular la observación y la comprensión lógica no conseguiremos hacer matemática. Mientras los libros informen vistosamente que "para comprobar si una división exacta está bien hecha se multiplica el cociente por el divisor" sin permitir que esto sea descubierto por el alumno, o no tengan reparo en afirmar que "hay que empezar por la izquierda y separando del dividendo las cifras necesarias para formar un número igual o mayor que el divisor", anulando la imaginación y creatividad y cerrando la investigación no habrá matemática. ¿Qué razones le damos al niño para empezar por la izquierda? ¿Por qué no se puede empezar por la derecha? Hemos gastado un buen tiempo en la ardua tarea de que sumen y resten y multipliquen empezando por la derecha. ¿Qué entiende el niño por "separar del dividendo"?, ¿cómo se separa del dividendo el dividendo? ¿Por qué se separa? ¿Por qué las cifras necesarias para formar un número igual o mayor que el divisor? ¿Qué es lo que las hace necesarias?,...

Una cosa es
1) que entiendan lo que hay que hacer,
y otra, muy distinta,
2) que comprendan el por qué de lo que hay que hacer.
El "quehacer" no es único y lo segundo no es consecuencia de lo primero.

Mientras la vertiente actual del "libro de texto", que confunde el contenido con el conocimiento, sea considerada como un importante compromiso en el argumento educativo del razonamiento, no habrá matemática, aunque se disfrace al garantizar la consecución de objetivos de área o de Etapa o se atreva a subrayar el interés y la actitud reflexiva del alumno.

Antes de "algoritmizar", de "normalizar" las formas de proceder favorezcamos la expansión de un hacer matemático, dejémosles que creen enfoques propios, particulares modos de establecer relaciones, originales maneras de ligar las ideas construyendo nuevos problemas; que decidan ,que elijan, que opten,... La matemática es en sí una dinámica de relaciones -y lo pedagógico formal- que procesa las estructuras didácticas y metodológicas para su aprendizaje, no puede ignorar o esconder en su apariencia. Una cosa es hacer divisiones y otra, muy distinta, es que se sepa dividir.