TEMA 7

7.1 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

7.2 FUNCIÓN DERIVADA

7.3 REGLAS DE DERIVACIÓN

7.4 ESTUDIO DE LA DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN DEFINIDA "A TROZOS"

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

7.5 RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UNO DE SUS PUNTOS

7.6 INFORMACIÓN EXTRAÍDA DE LA PRIMERA DERIVADA

7.7 INFORMACIÓN EXTRAÍDA DE LA SEGUNDA DERIVADA

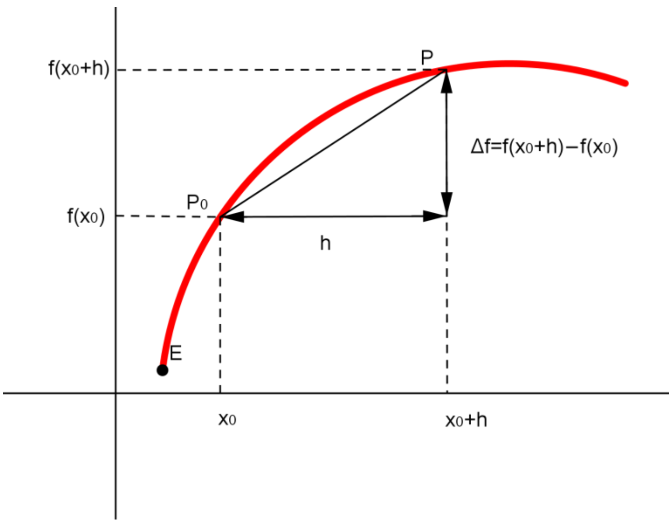
7.1 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

7.1.1 TASA DE VARIACIÓN MEDIA (T.V.M.)

El cociente incremental $\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$ se llama TASA DE VARIACIÓN MEDIA (T.V.M.)

Y significa la variación relativa de f con relación a x en el intervalo $[x_o, x_o + h]$

Gráficamente, es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P_o(x_0, f(x_o))$ y $P(x_o + h, f(x_o + h))$



$\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$ es la pendiente de la recta r_{P_0P}

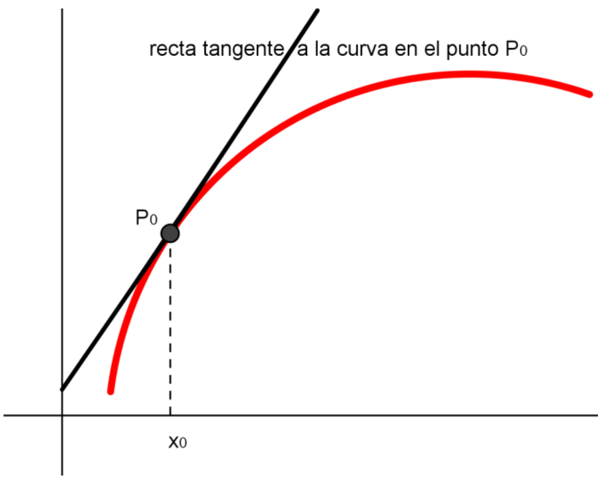
7.1.2 DERIVADA

El límite $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, si existe y es finito, se llama

DERIVADA DE LA FUNCIÓN f en x_0, y se designa $f\,'(x_0)$

SIGNIFICADO DE $f\,'(x_0)$: es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$, en el punto de abscisa x_0

Si existe $f\,'(x_0)$, se dice que f es derivable en x_0



$$f'(x_0) \quad = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Salvo alguna excepción, las funciones conocidas son derivables en todos los puntos en los que está definida. Es decir,

LAS FUNCIONES ELEMENTALES SON DERIVABLES EN SU DOMINIO.

7.1.3 DERIVADAS LATERALES

$h \to 0^-$ significa que h tiende a 0 tomando valores menores que 0, h tiende a 0 por la izquierda

$h \to 0^+$ significa que h tiende a 0 tomando valores mayores que 0, h tiende a 0 por la derecha

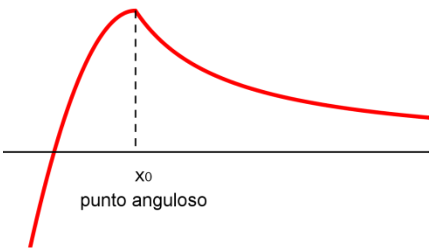
Se define la derivada por la izquierda de f en x_o como:

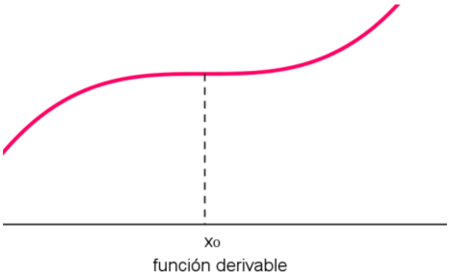
$$f'({x_o}^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

Se define la derivada por la derecha de f en x_o como:

$$f'({x_o}^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

Si en un punto las derivadas laterales no coinciden, son distintas, el punto es "anguloso". Si las derivadas laterales coinciden, la curva es "suave", es decir, es derivable.



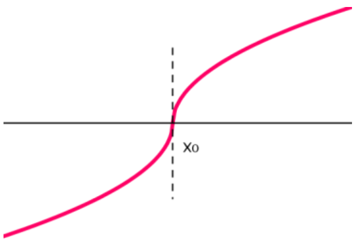


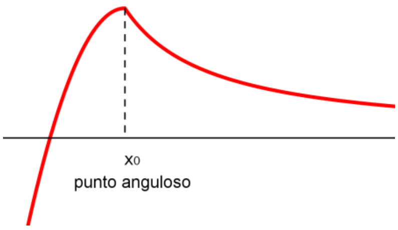
$f'({x_o}^-) \neq f'({x_0}^+)$ $f'({x_0}^-) = f'({x_0}^+) = f'(x_0)$

7.1.4 DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

Una función puede ser continua en un punto y no ser derivable en él

Es lo que ocurre en los puntos angulosos y en los puntos de tangente "vertical" (perpendicular al eje X)





Sin embargo,

SI UNA FUNCIÓN ES DERIVABLE EN UN PUNTO, NECESARIAMENTE ES CONTINUA EN ESE PUNTO

IMPORTANTE

CONTINUIDAD $\not\Rightarrow$ DERIVABILIDAD

Hay funciones continuas en x_o que no son derivables en x_o

DERIVABILIDAD $\Rightarrow$ CONTINUIDAD

Toda función derivable en un punto, es continua en él

En los ejercicios: PARA ESTUDIAR LA DERIVABILIDAD EN UN PUNTO, PRIMERO VEMOS SI ES CONTINUA EN ÉL Y DESPUÉS ESTUDIAREMOS LA DERIVABILIDAD.

es decir $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = f'(x_0)$

si no es continua en x_0, ya no es derivable en x_0

7.2 FUNCIÓN DERIVADA

Si una función, f, es derivable en todos los puntos de un intervalo I,

la función $f': x \longrightarrow f'(x)$ definida en I, se llama función derivada de f

si f' es derivable, su derivada se llama f'' (se lee f segunda). Así sucesivamente se definen $f''', f^{IV}, \dots, f^n$ (f tercera, f cuarta, f n−ésima)

otra manera de nombrar las derivadas es Df, D^2f, D^3f..., D^nf

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

7.3 REGLAS DE DERIVACIÓN

SUMA	$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$	$(f+g)' = f' + g'$
PRODUCTO POR UN NÚMERO	$D[k.f(x)] = k.f'(x)$	$(k.f)' = k.f'$
PRODUCTO DE DOS FUNCIONES	$D[f(x).g(x)] = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$	$(f.g)' = f'.g + f.g'$
COCIENTE DE DOS FUNCIONES	$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$	$\left({}^{f}/_{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g}{'g^2}$
REGLA DE LA CADENA	$D[f[g(x)]] = f['g(x)].g'(x)$	$(fog)' = f'(g).g'$
COMPOSICIÓN DE FUNCIONES	$D\left[f[g[h(x)]]\right] = f'[g[h(x)]].g'[h(x)].h'(x)$	$(fogoh)' = f'(goh).g'(h).h'$

DERIVADAS INMEDIATAS DE FUNCIONES ELEMENTALES

FUNCIÓN CONSTANTE	$f(x) = k$	$\rightarrow f'(x) = 0$	
FUNCIÓN IDENTIDAD	$f(x) = x$	$\rightarrow f'(x) = 1$	
POTENCIA	$f(x) = x^n$	$\rightarrow f'(x) = n.x^{n-1}$	$(f^n)' = n.f^{n-1}.f'$
RAÍZ CUADRADA	$f(x) = \sqrt{x}$	$\rightarrow f'(x) = \frac{1}{2.\sqrt{x}}$	$(\sqrt{f})' = \frac{1}{2.\sqrt{f}}.f'$
FUNCIÓN INVERSA	$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$\rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-1}{f^2} \cdot f'$
FUNCIÓN SENO	$f(x) = sen(x)$	$\rightarrow f'(x) = \cos(x)$	$(sen(f)' = \cos(f) \cdot f'$
FUNCIÓN COSENO	$f(x) = \cos(x)$	$\rightarrow f'(x) = -sen(x)$	$(\cos(f))' = -sen(f) \cdot f'$
FUNCIÓN TANGENTE	$f(x) = tg(x)$	$\rightarrow f'(x) = 1 + tg^2x = \frac{1}{cos^2x}$	$(tg(f))' = \frac{1}{cos^2f} \cdot f'$
FUNCIONES ARCO	$(arcsen(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$(arcsen(f))' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
(INVERSAS O RECÍPROCAS	$(arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$(arccos(f))' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
DE LAS TRIGONOMÉTRICAS)	$(arctg(x))' = \frac{1}{1+x^2}$		$(arctg(f))' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
EXPONENCIALES	$(e^x)' = e^x$		$(e^f)' = e^f \cdot f'$
	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$		$(a^f)' = a^f \cdot \ln a \cdot f'$
LOGARÍTMICAS	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$		$(\ln f)' = \frac{1}{f} \cdot f'$
	$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$		$(\log_a f)' = \frac{1}{f} \cdot \log_a e \cdot f'$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. $f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) = 5 \cdot x^{5-1} = 5 \cdot x^4$
2. $f(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4} \rightarrow f'(x) = -4 \cdot x^{-5} = \frac{-4}{x^5}$
3. $f(x) = \sqrt[5]{x^3} = x^{3/5} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{5} \cdot x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5} \cdot x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5 \cdot x^{\frac{2}{5}}} = \frac{3}{5 \cdot \sqrt[5]{x^2}}$
4. $f(x) = \sqrt[5]{7x^2} = 7^{1/5} \cdot x^{2/5} \rightarrow f'(x) = \sqrt[5]{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{\sqrt[5]{7} \cdot 2 \cdot x^{-\frac{3}{5}}}{5} = \frac{2\sqrt[5]{7}}{5 \cdot \sqrt[5]{x^3}}$
5. $f(x) = x^3 - \sqrt{2x} + \frac{3}{x} \rightarrow f'(x) = (x^3)' - \sqrt{2} \cdot (\sqrt{x})' + 3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = 3 \cdot x^2 - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 \cdot \frac{-1}{x^2} = 3x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$
6. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7x + 1 \rightarrow f'(x) = 3 \cdot (x^4)' - 5 \cdot (x^2)' + 7 \cdot (x)' + (1)' = 3 \cdot 4x^3 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0 =$

   $$= 12x^3 - 10x + 7$$

7. $f(x) = sen(x^2 + 5x - 1) \rightarrow f'(x) = cos(x^2 + 5x - 1) \cdot (x^2 + 5x - 1)' = cos(x^2 + 5x - 1) \cdot (2x + 5) =$
   $= (2x + 5) \cdot cos(x^2 + 5x - 1)$
8. $f(x) = \sqrt{sen(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{sen(x)}} \cdot (sen(x))' = \frac{1}{2\sqrt{sen(x)}} \cdot \cos(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{sen(x)}}$
9. $f(x) = 5e^{x^2+3x} \rightarrow f'(x) = 5e^{x^2+3x} \cdot (x^2 + 3x)' = 5e^{x^2+3x} \cdot (2x + 3) = 5(2x + 3) \cdot e^{x^2+3x}$

10. $f(x) = sen\left(\sqrt{x^2+5x-1}\right) \rightarrow f'(x) = \cos\left(\sqrt{x^2+5x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+5x-1}\right)' = \cos\left(\sqrt{x^2+5x-1}\right)\cdot$ $\frac{1}{2\sqrt{x^2+5x-1}}\cdot(x^2+5x-1)' = \cos\left(\sqrt{x^2+5x-1}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+5x-1}}\cdot(2x+5) = \frac{(2x+5)\cdot\cos\left(\sqrt{x^2+5x-1}\right)}{2\sqrt{x^2+5x-1}}$
11. $f(x) = arc\cos\sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{-1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{2\sqrt{(1-x)\cdot x}} = \frac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}$
12. $f(x) = arc\,tg(sen\,x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+(sen\,x)^2}\cdot(sen\,x)' = \frac{1}{1+(sen\,x)^2}\cdot\cos x = \frac{\cos x}{1+(sen\,x)^2}$
13. $f(x) = \ln(\ln x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)' = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\cdot\ln x}$
14. $f(x) = arc\,tg\,\sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\cdot(1+x)}$
15. $f(x) = (x^2-\sqrt{x}+sen\,x)^4 \rightarrow f'(x) = 4\cdot(x^2-\sqrt{x}+sen\,x)^3\cdot(x^2-\sqrt{x}+sen\,x)' = 4\cdot(x^2-\sqrt{x}+sen\,x)^3\cdot$ $\left[(x^2)'-(\sqrt{x})'+(sen\,x)'\right] = 4\cdot(x^2-\sqrt{x}+sen\,x)^3\cdot(2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\cos x)$
16. $f(x) = \ln\left(\frac{1+sen\,x}{1-sen\,x}\right) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\frac{1+sen\,x}{1-sen\,x}}\cdot\left(\frac{1+sen\,x}{1-sen\,x}\right)' = \frac{1-sen\,x}{1+sen\,x}\cdot\left[\frac{(1+sen\,x)'\cdot(1-sen\,x)-(1+sen\,x)\cdot(1-sen\,x)'}{(1-sen\,x)^2}\right] =$

$= \frac{1-sen\,x}{1+sen\,x}\cdot\left[\frac{\cos x\cdot(1-sen\,x)-(1+sen\,x)\cdot(-\cos x)}{(1-sen\,x)^2}\right] = \frac{1-sen\,x}{1+sen\,x}\cdot\frac{\cos x-sen\,x\cdot\cos x+\cos x+sen\,x\cdot\cos x}{(1-sen\,x)^2} =$

$= \frac{1-sen\,x}{1+sen\,x}\cdot\frac{2\cos x}{(1-sen\,x)^2} = = \frac{\cancel{(1-sen\,x)}}{1+sen\,x}\cdot\frac{2\cos x}{(1-sen\,x)^{\cancel{2}}} = \frac{2\cos x}{(1-sen\,x)\cdot(1+sen\,x)}$

17. $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x+1}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\sqrt{x+1}}}\cdot\left(x\sqrt{x+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x\sqrt{x+1}}}\cdot\left[(x)'\cdot\sqrt{x+1}+x\cdot\left(\sqrt{x+1}\right)'\right] =$

$= \frac{1}{2\sqrt{x\sqrt{x+1}}}\cdot\left[1\cdot\sqrt{x+1}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot(x+1)'\right] = \frac{1}{2\sqrt{x\sqrt{x+1}}}\cdot\left[\sqrt{x+1}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}\cdot 1\right]$

7.4 Estudio de la derivabilidad de una función definida "a trozos"

Sea una función $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \leq x_0 \\ f_2(x) & x > x_0 \end{cases}$ en la que $f_1(x)$ es derivable en (a, x_0) y $f_2(x)$ es derivable en (x_0, b)

Para estudiar si $f(x)$ es derivable en x_0, daremos los pasos siguientes:

1º Vemos si f es continua en x_0: es decir, ¿ $\lim_{x\to x_0^-} f_1(x) = \lim_{x\to x_0^+} f_2(x) = f(x_0)$?

2º Si f es continua en x_0, entonces calculamos $f'(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} f_1'(x)$ y $f'(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} f_2'(x)$

Si $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$ diremos que $f(x)$ es derivable en x_0 y $f'(x_0)$ es ese valor común.

EJEMPLO RESUELTO 1

Estudiar la derivabilidad en x_0=2 de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x < 2 \\ 3x-2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

Para ello, primero vamos a derivar "a trozos" en intervalos abiertos (es decir, menos en x=2)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x < 2 \\ 3x-2 & si\ x \geq 2 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & si\ x < 2 \\ 3 & si\ x > 2 \end{cases}$$

2º Paso: estudiamos la continuidad en x=2

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x^2 = 4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (3x-2) = 4 \\ f(2) = 3\cdot 2-2 = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 4 \rightarrow f \text{ es continua en } x = 2$$

Por ser continua f en x=2, puede ser derivable en x=2, veámoslo:

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} 2x = 4 = f'(2^-)\\ \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} 3 = 3 = f'(2^+)\end{array}\right\} \to \text{las derivadas laterales no coinciden, por tanto, } \nexists \lim_{x\to 2} f'(x)$$

f no es derivable en x=2

EJEMPLO RESUELTO 2

Calcular m y n para que $f(x)$ sea derivable en x_0=1.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & si\ x \leq 1 \\ -x^2 + nx & si\ x > 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{primero calculamos la derivada de la función salvo en x=1}} f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & si\ x < 1 \\ -2x + n & si\ x > 1 \end{cases}$$

2º Paso: Imponemos que sea continua en x=1, es decir, los límites laterales deben ser iguales

$$\lim_{x\to 1^-}(x^2 - 5x + m) = \lim_{x\to 1^+}(-x^2 + nx)$$

$$1^2 - 5\cdot 1 + m = -(1^2) + n\cdot 1$$

$$-4 + m = -1 + n \to m - n = 3$$

$m - n = 3$ 1ª ecuación

3º Paso: f será derivable en x_0=1 si los límites laterales de $f'(x)$ en x=1 coinciden. Por tanto, imponemos que sean iguales:

$$\lim_{x\to 1^-}(2x - 5) = \lim_{x\to 1^+}(-2x + n)$$

$$2\cdot 1 - 5 = -2\cdot 1 + n$$

$$-3 = -2 + n \ \to\ n = -1$$

$n = -1$ 2ª ecuación

La función será derivable si se cumplen las dos condiciones $\left.\begin{array}{r} m - n = 3 \\ n = -1 \end{array}\right\} \to m - (-1) = 3 \to m = 2$

Luego para $m = 2$ y $n = -1$, f es derivable en x=1 y $f'(1) = 3$

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

7.5 RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UNO DE SUS PUNTOS

Si $f(x)$ es derivable en x_0, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y=f(x)$ en x_0 es:

$$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

EJERCICIO RESUELTO 7.5.1

Halla la ecuación de la recta tangente a $y=\frac{x^2-2x}{x+3}$ en $x_0=3$

SOLUCIÓN

Para resolver este ejercicio hay que conocer los 3 números de la ecuación de la recta, es decir $x_0,\ f(x_0),\ f'(x_0)$

- $x_0 \rightarrow Nos\ lo\ da\ el\ enunciado\ \ x_0=3$
- $f(x_0)\rightarrow\ Se\ sustituye\ x_0=3\ en\ y=\frac{x^2-2x}{x+3}\rightarrow f(3)=\frac{3^2-2\cdot 3}{3+3}=\frac{1}{2}$
- $f'(x_0)\rightarrow Primero\ \ calculamos\ f'(x)\ y\ después\ sustituimos\ \ x\ \ por\ \ x_0=3$

$$f'(x)=\frac{(x^2-2x)'\cdot(x+3)-(x^2-2x)\cdot(x+3)'}{(x+3)^2}=\frac{(2x-2)\cdot(x+3)-(x^2-2x)\cdot 1}{(x+3)^2}=\frac{2x^2+4x-6-x^2+2x}{(x+3)^2}=$$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{x^2+6x-6}{(x+3)^2}\rightarrow f'(3)=\frac{3^2+6\cdot 3-6}{(3+3)^2}=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$$

Solo nos queda sustituir en $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)\rightarrow y=f'(3)\cdot(x-3)+f(3)\rightarrow y=\frac{7}{12}\cdot(x-3)+\frac{1}{2}$

EJERCICIO RESUELTO 7.5.2

Halla la ecuación de la recta tangente a $y=x^3+x^2+2$, que es paralela a la bisectriz del 1er y3er cuadrante

SOLUCIÓN

La bisectriz del 1er y 3er cuadrante es la recta $y=x$

La pendiente de una recta es el coeficiente que acompaña a la x cuando la y está despejada, es decir, si la recta es

$y=ax+b\rightarrow a$ es la pendiente.

Por tanto, en la recta $y=x$, la pendiente=1

<u>TODAS LAS RECTAS PARALELAS TIENEN LA MISMA PENDIENTE</u>

La ecuación de la recta tangente a una curva (o función) $f(x)$ en el punto de abscisa $x=x_0$ es

$$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

Por tanto, tenemos que calcular los tres números siguientes: $x_0, f(x_0)$ y $f'(x_0)$

Como $f'(x_0) = 1$, por ser paralela la recta que buscamos a la recta $y = x$, vamos a calcular $f'(x) = 1$ y despejamos x

$f'(x) = 3x^2 + 2x$

$$3x^2 + 2x = 1 \rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \begin{cases} x = \dfrac{-2+4}{6} = \dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{-2-4}{6} = -1 \end{cases}$$

Ecuación de la recta tangente para $x = \frac{1}{3}$

$x_0 = \frac{1}{3}$

$f(x_0) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 = \frac{58}{27}$

$f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{3}\right) = 1$

Sustituyendo en

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Obtenemos $y = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{58}{27} \rightarrow \boxed{y = x + \frac{49}{27}}$

Ecuación de la recta tangente para $x = -1$

$x_0 = -1$

$f(x_0) = f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 2 = 2$

$f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{3}\right) = 1$

Sustituyendo en

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Obtenemos $y = 1 \cdot (x - (-1)) + 2 \rightarrow \boxed{y = x + 3}$

7.6 INFORMACIÓN EXTRAÍDA DE LA PRIMERA DERIVADA

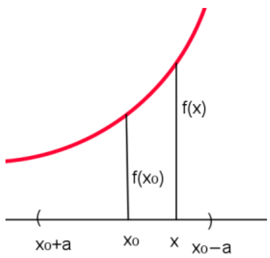
7.6.1 MONOTONÍA DE UN FUNCIÓN: CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

DEFINICIÓNES

f creciente en $x_0 \Longleftrightarrow$ Existe un entorno del punto x_0, es decir, $(x_0 - a, x_0 + a)$ tal que

- Si $x_0 - a < x < x_0 \rightarrow f(x) < f(x_0)$
- Si $x_0 < x < x_0 + a \rightarrow f(x) > f(x_0)$

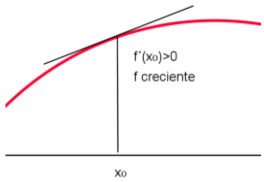
Es decir, $signo(x - x_0) = signo(f(x) - f(x_0))$

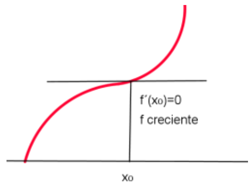


Análogamente, se define f decreciente en x_0 si , $signo(x - x_0) \neq signo(f(x) - f(x_0))$

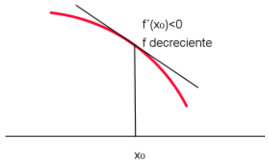
7.6.2 Relación del crecimiento de una función con el valor de su derivada

Si $f\ es\ derivable\ y\ creciente\ en\ x_0 \rightarrow f'(x_0) \geq 0$





Si $f\ es\ derivable\ y\ decreciente\ en\ x_0 \rightarrow f'(x_0) \leq 0$



7.6.3 Criterio para identificar tramos crecientes o decrecientes a partir del signo de la derivada

Si $f'(x_0) > 0 \rightarrow f\ creciente\ en\ x_0$

Si $f'(x_0) < 0 \rightarrow f\ \ decreciente\ en\ x_0$

EJERCICIO RESUELTO 7.6.1

Estudiar la monotonía de la función $y = x^3 - 6x^2 + 5$

SOLUCIÓN

$y = x^3 - 6x^2 + 5 \rightarrow y' = 3x^2 - 12x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12x = 0 \rightarrow 3x(x-4) = 0$

$3x = 0 \rightarrow x = 0$

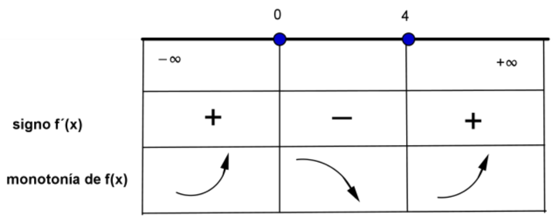
$(x-4) = 0 \rightarrow x = 4$

Vamos a estudiar el $signo\ f'(x)\ en\ \ (-\infty, 0),\ \ (0,4)\ y\ \ (4, +\infty)$

$x = -1\epsilon(-\infty, 0) \rightarrow f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) = 15 = +$

$x = 1\epsilon(0,4) \rightarrow f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 = -9 = -$

$x = 5\epsilon(4, +\infty) \rightarrow f'(5) = 3 \cdot 5^2 - 12 \cdot 5 = 15 = +$



Luego, f creciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y f decreciente en (0, 4)

7.6.3 MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS. DEFINICIONES

f tiene un **máximo relativo** en x_0 $\leftrightarrow$ $si\, f(x) < f(x_0)\ \ para\ \ x\epsilon\ (x_0 - a, x_0 + a)$

Análogamente, se define mínimo relativo en x_0

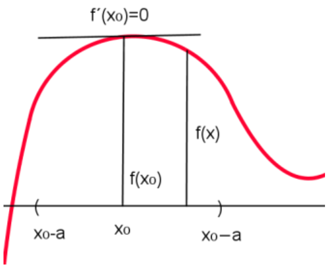
f tiene un **mínimo relativo** en x_0 $\leftrightarrow si\, f(x) > f(x_0)\ \ para\ \ x\epsilon\ (x_0 - a, x_0 + a)$

7.6.4 Condición necesaria de máximo o mínimo en funciones derivables.

Si $f(x)$ es derivable en x_0 y tiene un máximo o mínimo en él, entonces

$f´(x) = 0$

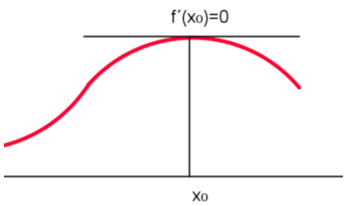
$f(x)\ máximo\ o\ mínimo\ en\ x_0 \rightarrow f´(x_0) = 0$



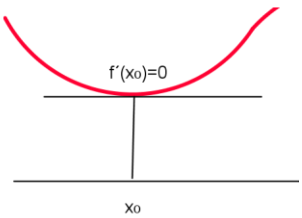
Los puntos donde $f´(x) = 0$ se llaman PUNTOS SINGULARES o PUNTOS CRÍTICOS

Un PUNTO SINGULAR puede ser un máximo, un mínimo o un punto de inflexión

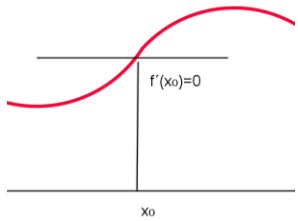
La condición es necesaria pero no suficiente, es decir, puede ocurrir que $f´(x) = 0$ y que no haya máximo o mínimo



Máximo relativo



Mínimo relativo



Punto de Inflexión

EJERCICIO RESUELTO 7.6.2

$y = x^2 + 3 \rightarrow y´ = 2x \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$

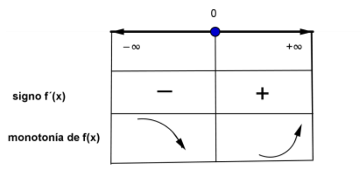
Estudiamos $signo(f´\ )\ \ en\ \ (-\infty, 0) y\ (0, +\infty)$

$f´(-1) = 2 \cdot (-1) = -2 = -$

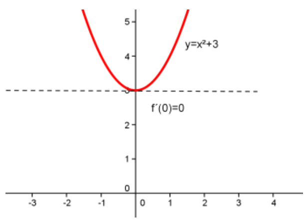
$f´(1) = 2 \cdot 1 = 2 = +$

Luego, en $x_0 = 0$ se alcanza el MÍNIMO RELATIVO

$f(0) = 0^2 + 3 = 3\ \rightarrow (0,3) es\ MÍNIMO\ RELATIVO$



Luego, f decreciente en $(-\infty, 0)$ y f creciente en $(0, +\infty)$



EJERCICIO RESUELTO 7.6.3

$y = -x^2 + 2 \ \rightarrow y' = -2x \ \rightarrow -2x = 0 \ \rightarrow x = 0$

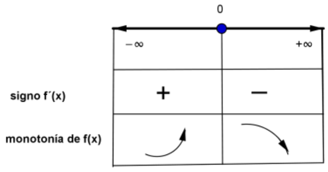
Estudiamos $signo(f')\ en\ (-\infty, 0) y\ (0, +\infty)$

$f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2 = +$

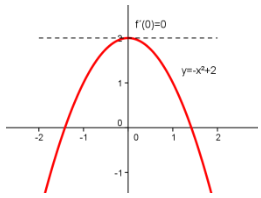
$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 = +$

Luego $x_0 = 0$ se alcanza un MÁXIMO RELATIVO

$f(0) = -0^2 + 2 = 2 \ \rightarrow (0,2) es\ MÁXIMO\ RELATIVO$



Luego, f creciente en $(-\infty, 0)$ y f decreciente en $(0, +\infty)$



EJERCICIO RESUELTO 7.6.4

$y = x^3 + 1 \ \rightarrow y' = 3x^2 \ \rightarrow 3x^2 = 0 \ \rightarrow x = 0$

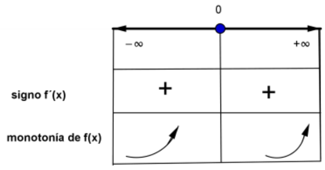
Estudiamos $signo(f')\ en\ (-\infty, 0) y\ (0, +\infty)$

$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3 = +$

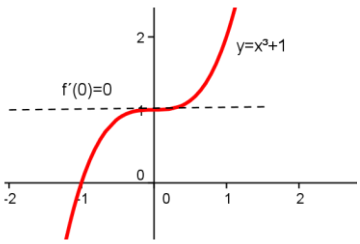
$f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3 = +$

Luego $x_0 = 0$ hay un PUNTO de INFLEXIÓN

$f(0) = 0^3 + 1 = 1 \ \rightarrow (0,1) es\ PUNTO\ de\ INFLEXIÓN$



Luego, f creciente en $(-\infty, 0)$ y f creciente en $(0, +\infty)$



7.6.5 Regla para identificar extremos relativos

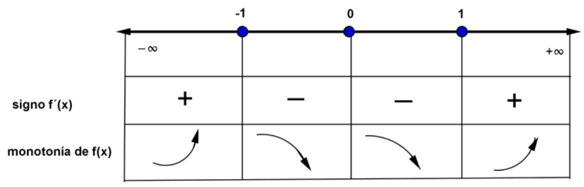
Para saber si un punto singular es máximo relativo, mínimo relativo o punto de inflexión, estudiamos el signo el signo de la derivada en los alrededores de los puntos que la hacen cero. Es decir, las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$

MÁXIMO	$f'(x) > 0\ a\ su\ izquierda$	$f'(x) < 0\ a\ su\ derecha$
MÍNIMO	$f'(x) < 0\ a\ su\ izquierda$	$f'(x) > 0\ a\ su\ derecha$
P. INFLEXIÓN	$f'(x) tiene\ el\ mismo\ signo\ a\ ambos\ lados\ del\ punto$	

EJERCICIO RESUELTO 7.6.5

$f(x) = 3x^5 - 5x^3 \ \rightarrow f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2 \cdot (x^2 - 1) \rightarrow$
$\begin{cases} 15x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

$x = -2 \rightarrow f'(-2) = 180 = +$



Luego, f creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y f decreciente en $(-1, 1)$

$x = -0{,}5 \to f'(-0{,}5) = -3{,}7 \ldots = -$

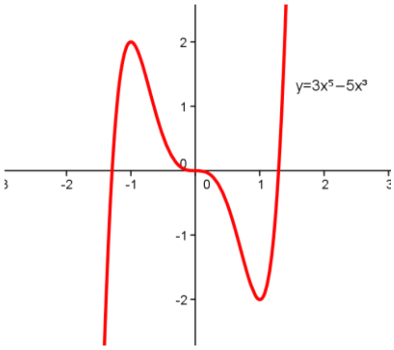
$x = 0{,}5 \to f'(0{,}5) = -3{,}7 \ldots = -$

$x = 2 \to f'(2) = 180 = +$

$En\ x = -1\ hay\ un\ \ máximo\ relativo \to f(-1) = 2 \to (-1, 2)\ es\ MÁXIMO\ RELATIVO$

$En\ x = 0\ hay\ un\ \ punto\ de\ inflexión \to f(0) = 0 \to (0, 0)\ es\ PUNTO\ de\ INFLEXIÓN$

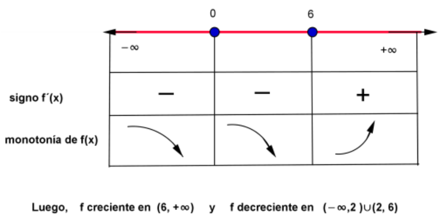
$En\ x = 1\ hay\ un\ \ mínimo\ relativo \to f(1) = -2 \to (1, -2)\ es\ MÍNIMO\ RELATIVO$



EJERCICIO RESUELTO 7.6.6

$$y = \frac{x^3}{(x-2)^2} \to y' = \frac{(x^3)'\cdot(x-2)^2 - x^3\cdot((x-2)^2)'}{((x-2)^2)^2} = \frac{3x^2\cdot(x-2)^2 - x^3\cdot 2\cdot(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)\cdot[3x^2\cdot(x-2) - 2\cdot x^3]}{(x-2)\cdot(x-2)^3} = \frac{3x^3-6x^2-2x^3}{(x-2)^3} = \frac{x^3-6x^2}{(x-2)^3}$$

$$y' = 0 \to \frac{x^3-6x^2}{(x-2)^3} = 0 \to x^3 - 6x^2 = 0 \to x^2\cdot(x-6) = 0 \to \begin{cases} x^2 = 0 \to x = 0 \\ (x-6) = 0 \to x = 6 \end{cases}$$

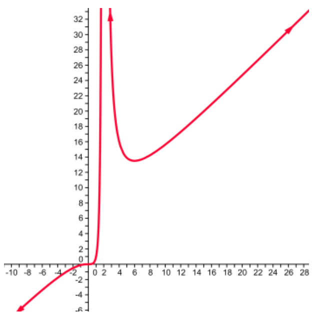


$En\ x = 0\ hay\ un\ \ Punto\ de\ Inflexión \to (0, 0) es\ P. Inflexión$

$En\ x = 6\ hay\ un\ Mínimo\ Relativo \to (\ 6; 13{,}5) es\ Mínimo\ R.$

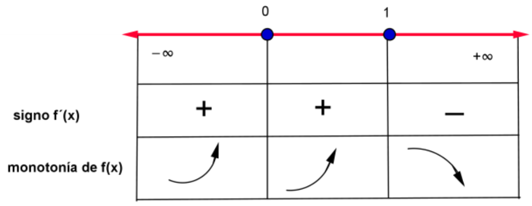
$$x = 2\ Asíntota\ Vertical \to Posición\ de\ la\ curva\ respecto\ de\ la\ Asíntota \to \lim_{x\to 2}\frac{x^3}{(x-2)^2} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$$Ramas\ Parabólicas \to \begin{cases} \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{(x-2)^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{(x-2)^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$$



EJERCICIO RESUELTO 7.6.7

$$y=-3x^4+4x^3 \to y'=-12x^3+12x^2=12x^2(-x+1) \to y'=0 \to 12x^2(-x+1)=0 \to \begin{cases} 12x^2=0 \to x=0 \\ (-x+1)=0 \to x=1 \end{cases}$$



$En\ x=0\ hay\ un\ \ Punto\ de\ Inflexión \to (0,0) es\ P. Inflexión$

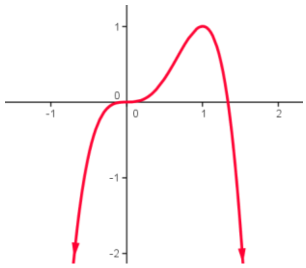
$En\ x=1\ hay\ un\ Máximo\ Relativo \to (\ 1;1) es\ Máximo\ R.$

Luego, f creciente en $(-\infty,1)$ y f decreciente en $(1,+\infty)$

$$Ramas\ Parabólicas \to \begin{cases} \lim_{x\to-\infty}(-3x^4+4x^3)=\lim_{x\to-\infty}(-3x^4)=-\infty \\ \lim_{x\to+\infty}(-3x^4+4x^3)=\lim_{x\to+\infty}(-3x^4)=-\infty \end{cases}$$

$Corte\ con\ los\ Ejes \to$

$$\begin{cases} Eje\ X \to y=0 \to -3x^4+4x^3=x^3\cdot(-3x+4) \to \begin{cases} x^3=0 \to x=0 \to (0,0) \\ -3x+4=0 \to x=\frac{4}{3} \to \left(\frac{4}{3},0\right) \end{cases} \\ Eje\ Y \to x=0 \to y=0 \to (0,0) \end{cases}$$



EJERCICIO RESUELTO 7.6.8

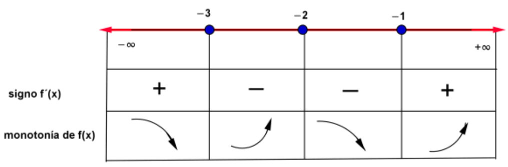
$$y=x^4+8x^3+22x^2+24x+9 \to y'=4x^3+24x^2+44x+24=4\cdot(x^3+6x^2+11x+6) \to y'=0 \to Ruffini$$

	1	6	11	6
-1		-1	-5	-6
	1	5	6	$\boxed{0}$

Como todos los coeficientes son positivos, solo puede tener soluciones negativas

Divisores de 6 de signo negativo: $-1,-2,-3\ y-6$

$$x^2+5x+6=0 \to x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{-5\pm1}{2}=\begin{cases} x=\frac{-5+1}{2}=-3 \\ x=\frac{-5-1}{2}=-2 \end{cases}$$

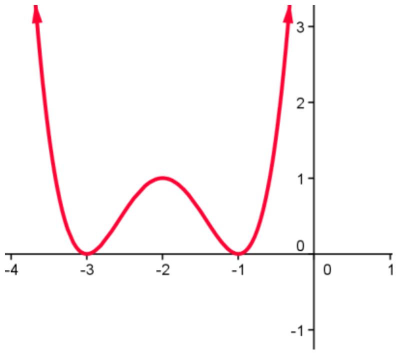


Luego, f creciente en $(-3,-2)\cup(-1,+\infty)$ y f decreciente en $(-\infty,-3)\cup(-2,-1)$

$En\ x=-3\ hay\ un\ Mínimo\ R. \to f(-3)=0 \to (-3,0) es\ un\ Mínimo\ R.$

$En\ x=-2\ hay\ un\ Máximo\ R. \to f(-2)=1 \to (-2,1) es\ un\ Máximo\ R.$

$En\ x=-1\ hay\ un\ Mínimo\ R. \to f(-1)=0 \to (-1,0) es\ un\ Mínimo\ R.$

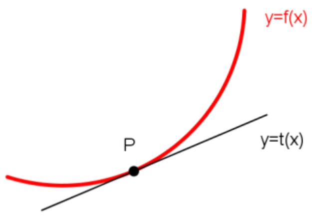


7.7 INFORMACIÓN EXTRAÍDA DE LA SEGUNDA DERIVADA

7.7.1 CURVATURA DE UNA FUNCIÓN: CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. PUNTOS DE INFLEXIÓN.

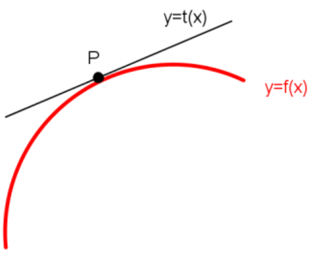
Tenemos una curva $y = f(x)$. Trazamos la recta tangente a ella en un punto P, cuya ecuación es $y = f\,'(x_0) \cdot x + b = t(x)$

Si en las cercanías de P es $f(x) > t(x)$, la curva es CONVEXA en P



$f(x) > t(x) \rightarrow f es$ CONVEXA

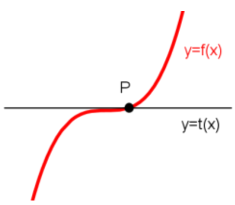
Si en las cercanías de P es $f(x) < t(x)$, la curva es CÓNCAVA en P

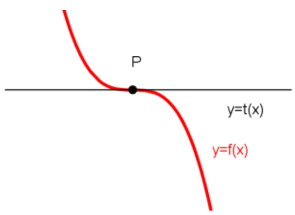


$f(x) < t(x) \rightarrow f es$ CÓNCAVA

Si la tangente atraviesa la curva en P, es decir, si a la izquierda es CÓNCAVA y a la derecha CONVEXA, o viceversa,

P es un PUNTO DE INFLEXIÓN





7.7.2 RELACIÓN DE LA CURVATURA CON LA SEGUNDA DERIVADA.

Si f tiene segunda derivada en x_0, es decir, $\exists f''(x_0)$, se cumple:

$f\ CONVEXA\ en\ x_0 \to f'\ es\ creciente\ en\ x_0 \to f''(x_0) \geq 0$

f CÓNCAVA $en\ x_0 \to f'\ es\ decreciente\ en\ x_0 \to f''(x_0) \leq 0$

$f\ tiene\ un\ \ PUNTO\ DE\ INFLEXIÓN\ en\ x_0 \to f''(x_0) = 0$

7.7.3 CRITERIO PARA DETECTAR EL TIPO DE CURVATURA.

$f''(x_0) > 0 \to f\ es\ CONVEXA\ en\ x_0$

$f''(x_0) < 0 \to f\ es\ CÓNCAVA\ en\ x_0$

$f''(x_0) = 0\ y\ f'''(x_0) \neq 0 \to f tiene\ un\ PUNTO\ de\ INFLEXIÓN\ en\ x_0$

7.7.4 APLICACIÓN A LA DEFINICIÓN DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

$Si\ f'(x_0) = 0\ y\ \exists f''(x_0), entonces$:

$$Si\ f''(x_0) > 0 \to f\ tiene\ un\ MÍNIMO\ R.en\ x_0$$

$$Si\ f''(x_0) < 0 \to f\ tiene\ un\ MÁXIMO\ R.en\ x_0$$

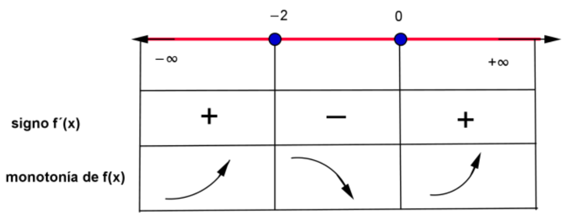
EJERCICIO RESUELTO 7.7.1

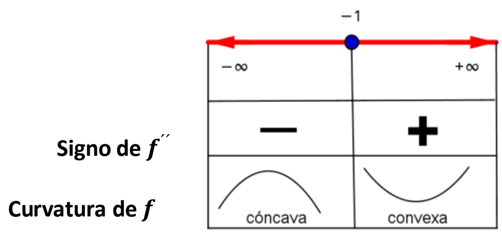
Estudiar la monotonía y curvatura de $f(x) = x^3 + 3x^2$

$f(x) = x^3 + 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 + 6x \to 3x^2 + 6x = 0 \to 3x \cdot (x+2) = 0 \to \begin{cases} 3x = 0 \to x = 0 \\ (x+2) = 0 \to x = -2 \end{cases}$

$f''(x) = 6x + 6 \to 6x + 6 = 0 \to x = -1$





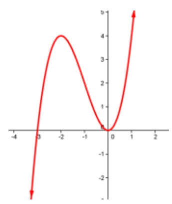
Luego, f decreciente en $(-2, 0)$ y f creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Luego, $f\ es\ cóncava\ en\ (-\infty, -1)\ y\ convexa\ en\ (-1, +\infty)$

$En\ x = -2\ hay\ un\ máximo\ r. \to f(-2) = 4 \to (-2, 4) es\ máximo\ r.$

$En\ x = 0\ hay\ un\ mínimo\ r. \to f(0) = 0 \to (0,0) es\ mínimo\ r.$

$En\ x = -1\ hay\ un\ punto\ de\ inflexión \to f(-1) = 2 \to (-1, 2) es\ un\ punto\ de\ inflexión$



$Puntos\ de\ corte\ con\ los\ Ejes$: $\begin{cases} Eje\ X \to x^3 + 3x^2 = 0 \to x^2 \cdot (x+3) = 0 \to \begin{cases} x^2 = 0 \to x = 0 \to (0,0) \\ (x+3) = 0 \to x = -3 \to (-3, 0) \end{cases} \\ Eje\ Y \to x = 0 \to y = 0^2 + 3 \cdot 0^2 = 0 \to (0,0) \end{cases}$

FIN TEMA 7