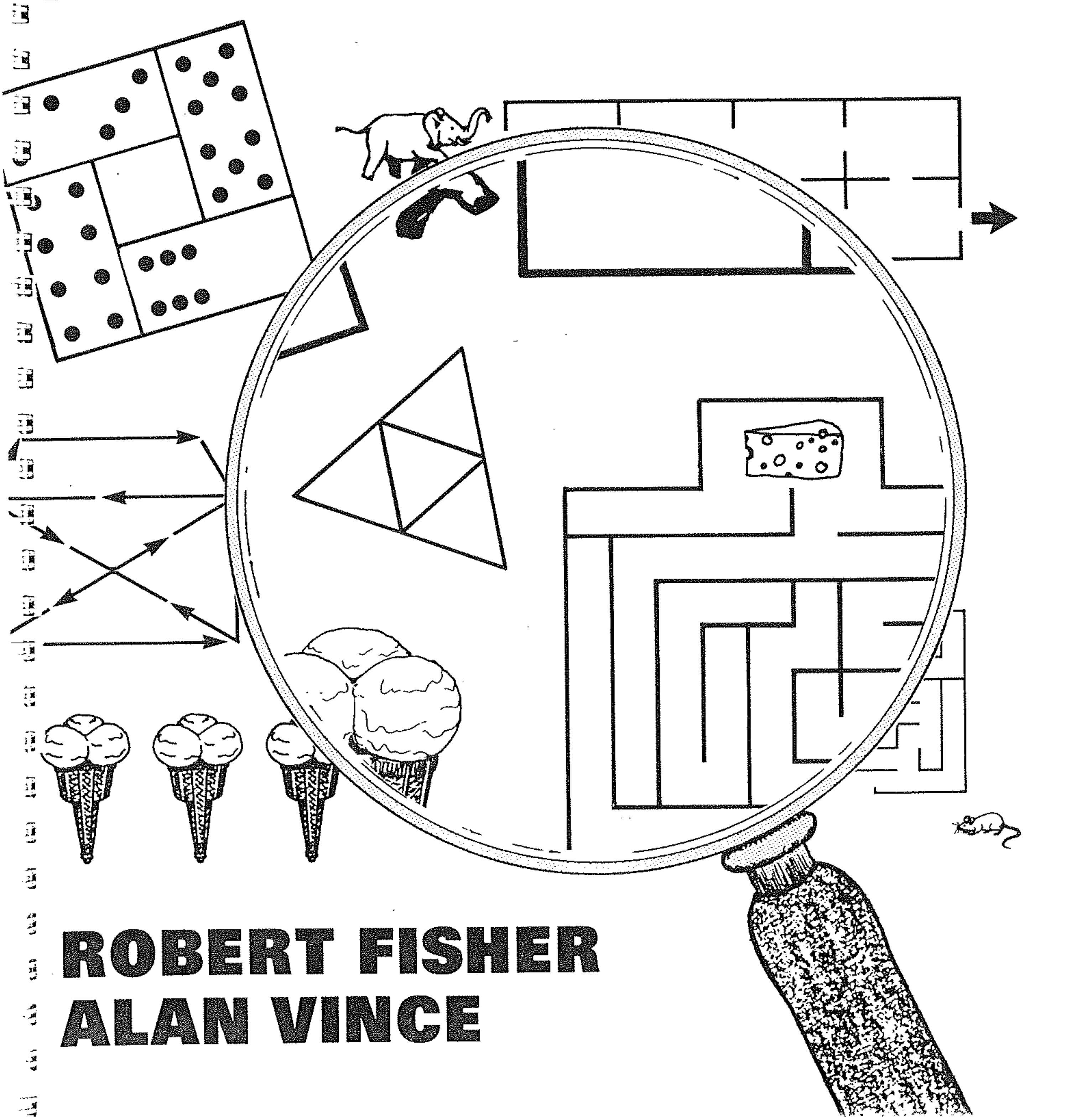
MATERIAL FOTOCOPIABLE

Investigando las Matemáticas

LIBRO 3

AKAL



ROBERT FISHER
ALAN VINCE

Investigando las Matemáticas

LIBRO 3

Robert Fisher
Alan Vince

TRADUCCIÓN
Montserrat Tiana Ferrer

AKAL

Título original: *Investigating Maths, book 3*

Los Berrocales del Jarama
Apdo. 400 - Torrejón de Ardoz
Teléfs.: (91) 656 56 11 - 656 49 11
Fax: 656 49 95
Madrid-ESPAÑA
ISBN: 84-7600-580-6
Depósito legal: M-13169-1990
Impreso en ORYMU, S. A. Pinto (Madrid)

Contenido

Introducción

Investigando las matemáticas consiste en una colección de actividades de investigación y resolución de problemas destinadas a los centros de educación básica.

- Los libros 1 y 2 están destinados a niños entre 6 y 10 años.
- Los libros 3 y 4 están destinados a niños entre 8 y 12 años.

Además, las actividades planteadas son adecuadas a niños de distintas edades y conocimientos.

La selección para cada libro se ha realizado basándose en: a) el plan cíclico en el que los mismos conceptos se van revisando en un grado mayor de abstracción cada vez; b) la necesidad de introducir, en los libros 1 y 2, tanto los conceptos como las técnicas de investigación y resolución de problemas necesarios para realizar las actividades de los libros 3 y 4.

En cada libro hay 20 unidades o temas, y cada unidad consta de dos páginas, una página de notas para el profesor y una hoja de trabajo para el alumno, que se puede fotocopiar. Cada unidad presenta una serie de retos sin límite preciso para que el niño los resuelva, y que son adecuados para el trabajo tanto individual como en grupo o de clase. Las unidades, cuidadosamente seleccionadas y previamente probadas en clase para enfrentar al alumno con una serie de desafíos matemáticos, introduciéndole a la vez una serie de conceptos que ampliarán su conocimiento. Al principio del libro se incluye una tabla que muestra cómo encajan las distintas unidades en el conocimiento matemático, y al final hay otra tabla en blanco para uso del profesor, así como una serie de hojas de trabajo que se pueden fotocopiar para uso de los alumnos.

El esquema de *Investigando las matemáticas* ha sido diseñado para complementar y enriquecer cualquier plan de estudio escolar, y las actividades que aquí se sugieren se pueden variar para adaptarlas tanto al estilo de cada profesor como a las necesidades de cada alumno. Así, la serie completa forma un plan flexible que:

- proporciona una gran fuente de estimulantes actividades matemáticas,
- permite que los alumnos realicen investigaciones por su cuenta,
- se puede adaptar al trabajo en grupo sobre un tema en particular,
- sugiere ideas y puntos de partida para preparar una clase y
- se puede adaptar a cualquier esquema general.

Además, cada unidad proporciona un estímulo para ampliar el estudio de las matemáticas. En las notas del profesor se describe el *equipo* que se debe utilizar, los *datos*, los *conocimientos requeridos* y los *conceptos* necesarios para cada unidad, los *puntos de enseñanza* para el profesor y distintas maneras de *ampliar la investigación*. Además, bajo el apartado de *unidades relacionadas* aparecen en cada unidad referencias a otras que pueden suponer un complemento, una continuidad o una ampliación de la unidad en cuestión. Por otra parte, las actividades se pueden desarrollar de diversas maneras para proporcionar experiencia matemática a distintos niveles.

Intención y objetivos de las actividades

Cada actividad de *Investigando las matemáticas* está especialmente pensada para ayudar al niño a desarrollar sus conocimientos prácticos, a comprender los distintos conceptos y a idear estrategias de investigación. Las notas del profesor dan detalles específicos de cómo conseguir esto en cada unidad, y también, bajo el encabezamiento de **Datos que ayudan a la investigación**, dan una lista de los conocimientos que debe poseer el niño para poder llevar a cabo la actividad en cuestión.

- Los **conocimientos requeridos** son las operaciones básicas y las rutinas que hay que ensayar y poner en práctica para cada investigación, como por ejemplo los procesos de cálculo, el uso de calculadoras, las mediciones y el conocimiento de las estrategias de investigación y resolución de problemas.
- Los **conceptos** son los principios que se ocultan bajo los datos y los conocimientos requeridos, y que muestran cómo se relacionan estos; por ejemplo, la equivalencia, la conservación, la abstracción de progresiones, la simbolización y la generalización.
- Las **estrategias** son los planes de aproximación a los problemas y las investigaciones; por ejemplo, el cálculo, los métodos de prueba y error, la simplificación de tareas difíciles, la búsqueda de un esquema, el razonamiento, la formulación de hipótesis y su comprobación.
- Las **cualidades personales** se van desarrollando por medio de este trabajo de investigación; por ejemplo, el carácter imaginativo, sistemático, independiente, cooperador, perseverante, juguetón o creativo; con él se demuestran también las actitudes positivas que ayudan al aprendizaje.

Las calculadoras

Las calculadoras son muchas veces necesarias para facilitar las estrategias de investigación. Por ejemplo, para predecir resultados, puede hacer falta extender progresiones de números, lo que requiere un cierto número de cálculos, cálculos que no son más que herramientas para ayudar a la investigación. Y el concentrarse en el método y la práctica del cálculo puede distraer la atención del desarrollo de la estrategia de resolución de un problema determinado. Por tanto, recomendamos el uso de calculadoras para ayudar a eliminar las posibles barreras que impidan el libre fluir de las ideas y la comprobación de las distintas estrategias. Con la calculadora más sencilla es más que suficiente, y para manejarla se necesitan unos conocimientos mínimos. Además, las calculadoras pueden proporcionar al niño un medio de explorar su propio pensamiento matemático, y precisamente algunas de las actividades se han diseñado teniendo esto en cuenta.

Los problemas y la investigación

Investigando las matemáticas contiene problemas y actividades de investigación. Pero los términos «investigación» y «problema» a veces se usan con mucha libertad. En este caso, los problemas suelen tener un objetivo concreto: hay un obstáculo, o una serie de obstáculos, que impiden que ese objetivo se alcance inmediatamente, y el niño, para resolver el problema, debe probar toda una gama de estrategias, muchas de las cuales implican una investigación. En efecto, la investigación es un proceso que incluye una serie de discusiones y trabajos prácticos, que se pueden utilizar para resolver problemas.

Muchas veces, las investigaciones no tienen un objetivo obvio ni inmediato, sino que se limitan a dar una serie de resultados que pueden variar según el camino que se haya tomado. Así, la investigación puede estar estrechamente ligada al concepto de «juego», y en cierto modo es similar, ya que también sigue una estructura delimitada por una serie de reglas y materiales. Muchas de las investigaciones no tienen un límite preciso, sino que están abiertas a toda una gama de interpretaciones creativas, mientras que otras, como los problemas, están «cerradas» en el sentido de que tienen una solución o un objetivo específico; sin embargo, el proceso seguido para llegar a ese objetivo puede ser abierto, y una vez que se llega a una solución se pueden seguir muchos otros caminos que la amplíen. El ampliar la investigación original puede llevar al planteamiento de nuevas cuestiones, nuevos problemas y nuevas vías de exploración.

El esquema que reproducimos a continuación ofrece una idea del proceso de aprendizaje, y en cada uno de sus pasos el alumno puede intervenir activamente.

estímulo → investigación → problemas → ampliación de la investigación
diversidad de conclusiones ← nuevos problemas ← nuevas investigaciones

El uso del libro

El libro se puede utilizar para trabajo individual, en grupo o de clase. Sin embargo, se use como se use, tiene que quedar bien claro que las hojas de trabajo para el alumno sólo son un punto de partida para la investigación matemática: cada actividad se puede desarrollar en distintas direcciones y a distintos niveles, y en las notas del profesor se indica la manera de conseguir este objetivo.

Por otra parte, las hojas de trabajo no marcan un esquema que haya que seguir al pie de la letra, sino que se limitan a ofrecer un estímulo al niño para que este desarrolle sus propias líneas de investigación con la ayuda, por supuesto, del profesor y del resto del grupo. Lo bueno de esta manera de trabajar es que se desafía al niño a desarrollar por sí mismo una serie de estrategias y procesos matemáticos.

Estos son los pasos que se deben seguir para llevar a cabo un trabajo de investigación.

- **Entrada:** el esfuerzo inicial para llevar a cabo la tarea, ya sea individualmente o en grupo. Hay algunos niños que necesitan ver a otros trabajando para ponerse ellos mismos. En este punto se pueden preguntar cosas como: «¿Qué estás investigando?», «¿Dime qué estás haciendo?», «¿Qué vas a hacer a continuación?» Y recuerde, el estar sentado pensando, dándole vueltas a las cosas, no es una pérdida de tiempo, sino que es algo vital para el proceso de aprendizaje.
- **Ataque:** abordar el problema, anotar las ideas, buscar esquemas y relaciones, aventurar qué sucederá a continuación, probar con diversos métodos utilizando aparatos, diagramas, dibujos y palabras. Las preguntas pueden ser: «¿Cómo vas a tomar nota de lo que descubras?», «¿Qué opinas de esto?», y «¿Por qué tienes esa opinión?».
- **Revisión:** comprobar la teoría, predecir el resultado y luego comprobarlo. Preguntas: «¿Sirve ese resultado?... ¿Por qué no?», «¿Qué crees que pasaría si...?», «¿Puedes explicarnos cómo lo has hecho?»
- **Ampliación:** desarrollo posterior de la investigación, exploración de otros problemas que puedan surgir, planteamiento de nuevos problemas. Preguntas: «¿Puedes probar con un sistema diferente?», «¿Qué podrías cambiar?», «¿Qué has descubierto?»

Ideas importantes a considerar

La investigación debería representar un papel primordial en el estudio de las matemáticas, pero su utilización depende mucho del estilo de cada profesor y de la capacidad de aprendizaje de cada niño. A continuación enumeramos unas cuantas cosas que, como profesores, debemos tener en cuenta al preparar una investigación.

La actitud del profesor

Aprender junto con el niño
Admitir que hay cosas que no sabemos/que podemos cometer errores
Dejar que los niños tomen sus propias decisiones
Intervenir sólo cuando sea necesario
Estimular la colaboración y la discusión
Aceptar una variedad de resultados
Dar tiempo para que «piensen las cosas»
Recompensar a los niños que corren riesgos

Organización del aula

El equipo básico debe estar fácilmente disponible
Hay que dejar que los niños cojan solos lo que necesiten
Distribuir los muebles para facilitar tanto los movimientos como el acceso
Enseñar a los niños a que vuelvan a guardar todo lo que usen
Estimular la discusión planificada
Explicarles cómo anotar los resultados
Que los alumnos sean siempre conscientes del papel del profesor

Cómo ayudar a los niños

Hay que estimular una aproximación sistemática:

- **Estrategias:** la búsqueda de esquemas, la comprobación de ideas, la simplificación de los problemas, el empleo de aparatos, diagramas dibujos, etc.
- **Organización:** hay que animarles a pensar, a colaborar con otros y a comunicarse.
- **Procedimientos de investigación:** hay que reforzar la necesidad de tener en cuenta todos los factores, de tomar nota de todos los resultados y de calcular, predecir y visualizar resultados.

Evaluación de resultados

Hay que establecer un sistema para que tanto el niño como el profesor tomen nota del trabajo realizado, por ejemplo, llevando un informe o un diario. La tabla que aparece al final del libro puede servir de ayuda para fijar los temas que se han estudiado.

En el trabajo de investigación, es inevitable que surjan problemas y decepciones, al igual que se alcanza el éxito y la satisfacción. Como decía Cockcroft: «En la capacidad de resolver problemas es donde reside el corazón de las matemáticas», y reconociendo este desafío y haciéndole frente es como el profesor y los alumnos trabajan juntos en *cooperación* y *apoyo mutuo*, dos de las muchas cualidades que esperamos que se fomenten con la utilización de este libro.

¿Por qué la investigación?

Últimamente en Inglaterra se han elaborado unos cuantos documentos oficiales que han reforzado la necesidad de la investigación en el estudio de las matemáticas. El informe Cockcroft, por ejemplo, decía que el trabajo de investigación tiene una importancia primordial en el desarrollo matemático del niño.

El fragmento más conocido de todo el informe (el párrafo 243) sugería que la enseñanza de las matemáticas a cualquier nivel debía incluir la posibilidad de realizar:

- exposiciones del profesor,
- discusiones de los alumnos tanto con el profesor como entre sí,
- trabajo práctico adecuado,
- consolidación y práctica de los conocimientos y las rutinas fundamentales,
- resolución de problemas, incluida la aplicación de las matemáticas a la vida cotidiana y
- trabajo de investigación.

En el párrafo 250 se discute con más profundidad la importancia del trabajo de investigación, y en el 252 se da uno de los mensajes más importantes:

> Es necesario darse cuenta de que se puede perder gran parte del valor de una investigación si no se someten a discusión sus resultados. Dicha discusión debe incluir la consideración no sólo del método utilizado y de los resultados obtenidos, sino también de las pistas falsas que se han seguido durante la investigación.

Además, la investigación proporciona al niño una serie de oportunidades para participar en discusiones empleando el lenguaje propio de las matemáticas, y esta charla puede ser muy valiosa en sus tres modalidades:

- la charla con uno mismo que procede del pensamiento en voz alta y del esfuerzo por resolver las cuestiones planteadas;
- la discusión con otros en un grupo, explorando ideas, compartiendo pensamientos y sugiriendo nuevas vías de investigación, y
- el diálogo entre el niño y el profesor que estimula el pensamiento, el desarrollo del razonamiento y el examen de las alternativas.

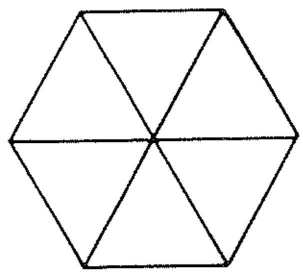
Según el Informe del HMI *Las Matemáticas entre los 5 y los 16:*

> En una aproximación a la investigación los alumnos se ven animados a pensar en estrategias alternativas, a considerar lo que sucedería si siguieran una línea de acción particular, o a ver si unos cambios determinados suponen alguna diferencia en el resultado. De hecho es precisamente por medio de la aproximación a la investigación como surgen las soluciones a los problemas. Por ejemplo, si el problema consiste en encontrar el sistema más económico para empaquetar barras de chocolate de una forma determinada, será necesario investigar distintas posibilidades antes de tomar una decisión.

Los temas propuestos en este libro proporcionan un foco de discusión matemática, a la vez que contribuyen a la formación de una serie de conocimientos y actitudes que se irán ampliando a medida que se avance. Precisamente, uno de los objetivos principales de estas actividades es el desarrollo de una actitud positiva. Hay que darles a los niños oportunidades para que desarrollen un pensamiento independiente y para que ganen confianza en sí mismos y en el trabajo que realizan. Es importante que desarrollen una actitud positiva hacia las matemáticas por medio de una serie de actividades divertidas que les hagan conseguir una serie de éxitos a su nivel. También hay que darles oportunidades para que desarrollen la concentración y la perseverancia a la vez que realizan experimentos y se divierten. En resumen, que los niños deben tener la sensación de que controlan su propio aprendizaje a un nivel adecuado para ellos.

El miedo que muchos niños y muchos adultos sienten hacia las matemáticas, deriva muy a menudo del énfasis que se da a la respuesta «correcta». En el trabajo de investigación se trata de estimular la actitud de «llegar a saber», de probar, experimentar y modificar esas cosas que estamos tratando de comprender y utilizar. El trabajo de investigación permite tanto el planteamiento de problemas como su resolución: «¿Qué dice realmente el problema?», «¿Qué pasa si miramos esto?» Y una vez que se resuelve un problema, surgen nuevas cuestiones: «¿Cuál es el resultado de mi solución?», «¿De qué otra manera puedo hacerlo?» En una situación donde se nos pide que investiguemos una serie de problemas, que planteemos unas cuestiones o que modifiquemos lo que nos han dado, nunca hay solamente una pregunta correcta que formular, sino que hay un número infinito de preguntas. Así, una investigación sin un final cerrado y que lleve consigo el planteamiento de nuevos problemas puede ser más difícil, pero más gratificante que el dar una única respuesta correcta a un problema.

Por ejemplo, mira esta figura:



¿Qué puedes preguntar acerca de ella?

¿Qué problemas puedes plantear o investigar?

(¿Se trata de seis triángulos equiláteros?, ¿de un hexágono?, ¿de una tienda vista desde arriba?, ¿qué dimensiones tiene?, ¿es un mosaico?, etc.) El trabajo de investigación se basa en la premisa de que las cosas las comprendemos mejor utilizándolas, jugando con ellas, explorándolas, variándolas... en resumen, haciéndolas nuestras.

El objetivo de *Investigando las matemáticas* consiste en proporcionar a los niños una experiencia rica y amena que incluya los conocimientos y los conceptos adecuados a su capacidad y a sus aptitudes. Las actividades proporcionan oportunidades para estimular tanto el estudio independiente, como la conciencia social del trabajo en colaboración con otros (no sólo con otros niños, sino también con los padres y los profesores). El trabajo de investigación también puede introducir un elemento estético en las matemáticas: la apreciación del orden, de la belleza, del esquema y del diseño de la forma y el número. Estos problemas permiten además la posibilidad de un estudio más profundo de las matemáticas a través de las actividades de ampliación sugeridas en cada unidad; y cada unidad a su vez plantea un desafío que proporciona a los niños el sentimiento de la meta lograda a la vez que amplía su desarrollo conceptual.

Conocimientos requeridos y conceptos																				
Cálculo		✓		✓	✓	✓		✓		✓	✓			✓		✓	✓	✓	✓	✓
Tablas y diagramas		✓		✓	✓										✓	✓				
Conmutación																		✓		
Conservación								✓		✓										
Contar				✓	✓			✓			✓					✓		✓	✓	
Describir								✓	✓			✓								
Dibujar/doblar	✓		✓						✓				✓		✓	✓				
Estimar				✓				✓												
Seguir las reglas		✓		✓			✓				✓	✓				✓	✓	✓	✓	
Comparación	✓	✓	✓											✓	✓		✓			
Medición									✓											
Notación/empleo de símbolos										✓				✓			✓			
Valor numérico				✓										✓						✓
Predicción/comprobación/generalización				✓	✓						✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Rotación	✓		✓		✓				✓						✓					
Orientación espacial	✓		✓		✓		✓		✓				✓		✓					
Simetría	✓		✓		✓		✓		✓				✓		✓					
Formación de mosaicos															✓					

Tabla de resumen Libro 3

Temas	Copos de nieve	Huevos en una cesta	¿Cuántos lados?	Dardos	Cuenta los cuadrados	Pésalo	Bombardeo	Prueba tu suerte	Diseños circulares	Puentes de dominó	De compras	Averigua el número	¿Dentro o fuera?	Números chinos	Cuartos curvados	El rosetón	Calculando fracciones	El tesoro de Jacko el Cruel	Calculando sucesiones numérica	El número mágico
Area							✓								✓			✓		
Peso						✓												✓		
Volumen						✓														
Longitud																		✓		
Dinero											✓									
Tiempo																				
Número		✓		✓	✓					✓	✓	✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓
esquemas		✓		✓	✓					✓	✓	✓				✓			✓	✓
fracciones										✓					✓		✓			
Formas planas	✓		✓		✓				✓	✓			✓		✓	✓				
Cuerpos sólidos																		✓		
Ángulos									✓											
Rutas													✓			✓				
Probabilidades							✓	✓												
Lógica		✓						✓												

Copos de nieve

Equipo Papel cuadriculado (Hoja de Trabajo 1), lápices de colores.

Datos que ayudan a la investigación Vocabulario: cuadrado, hexágono, centro de simetría, esquina.

Conocimientos requeridos Reflexión, rotación, transformación, conciencia espacial.

Conceptos Simetría reflexiva y rotacional.

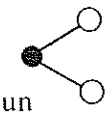
Puntos de enseñanza

Como los copos de nieve matemáticos se pueden extender hasta el infinito, lo mejor es empezar en el centro de un papel cuadriculado lo más grande posible. Quizá los niños quieran discutir: a) si los cuadrados deben tener un lado común— 

o b) si deben tener comunes solamente los vértices— 

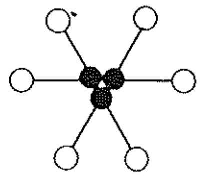
También pueden probar a hacerlo combinando las dos maneras.

Se pueden estudiar cristales de hielo reales a través de un microscopio, o bien fotografías ampliadas de copos de nieve. Discuta con los niños la relación entre la forma hexagonal y la composición química de los copos de nieve: el agua, y por tanto también el hielo, se compone de átomos de hidrógeno y oxígeno, y una molécula de hielo contiene dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno (H_2O):



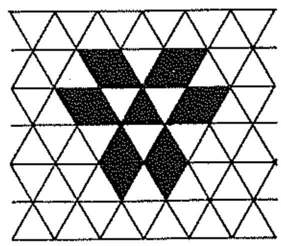
● oxígeno   ○ hidrógeno

Cuando estas moléculas se unen para formar la estructura tridimensional de un copo de nieve, el triple lazo crea un esquema hexagonal simétrico:



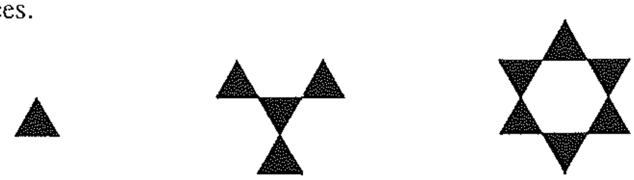
Además, la simetría rotacional se puede estudiar también en los pétalos de las flores y de las ruedas de bicicleta, e incluso doblando adecuadamente un papel y recortándolo para lograr la forma de un copo.

Actividades de ampliación

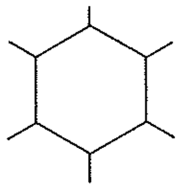


1 Utilice un papel de retícula triangular para investigar por qué los copos de nieve tienen seis brazos. Que empiecen coloreando sólo un triángulo y luego vayan ampliando el dibujo simétricamente por cada esquina.

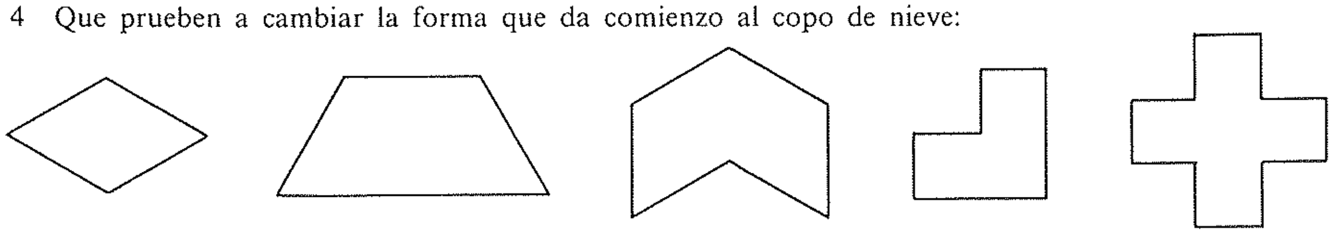
2 Varíe luego las reglas de unión haciendo que se toquen, por ejemplo, por los vértices.



3 Si se usan hexágonos se pueden obtener más variantes, porque tienen más lados y más vértices.



4 Que prueben a cambiar la forma que da comienzo al copo de nieve:



Unidades relacionadas "Cuadrados de colores" (Libro 4).

Nombre

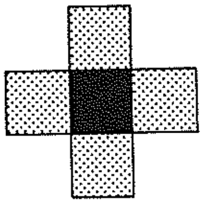
1 Copos de nieve

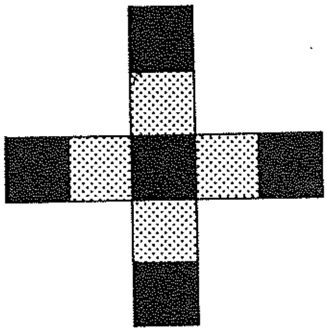
Qué necesitas: Papel cuadriculado, lápices de colores.

En cada nevada hay millones de copos de nieve, y aunque cada copo tiene una formación diferente, todas ellas son simétricas.
Ahora te vamos a enseñar a dibujar copos de nieve matemáticos Para ello necesitas papel cuadriculado y lápices o rotuladores de distintos colores.

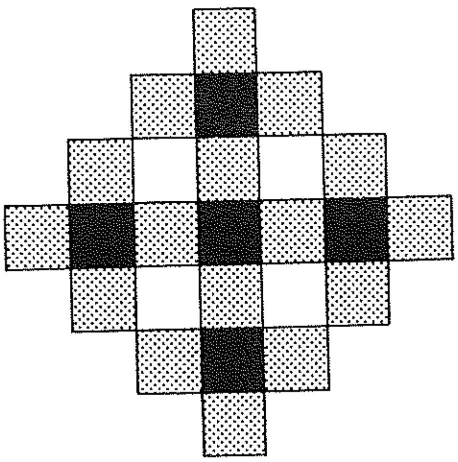
1 Colorea un cuadrado.
Este es el centro de tu copo de nieve.

2 Ahora usa otro color diferente para los cuatro cuadrados que tienen un lado común con él.





3 Añade todos los cuadrados de cada color antes de empezar con los de la tanda siguiente, y asegúrate de que estás haciendo un dibujo simétrico. ¡Fíjate cómo aumenta tu copo de nieve!



4 Cuenta el número de cuadrados que añades cada vez.
¿Siguen alguna secuencia?

Usa un papel grande y prueba a hacer distintas formas y secuencias.

Huevos en una cesta

Equipo Una huevera para seis huevos vacía, algo que represente a los huevos, papel y lápiz.

Datos que ayudan a la investigación Media docena = 6.

Conocimientos requeridos Resolución de problemas, cómo seguir una regla, calcular, tabulación de resultados.

Conceptos Esquemas numéricos, orden lógico.

Puntos de enseñanza

Se trata de una actividad ideal para que los niños trabajen en parejas. Permítales que sugieran sus propios sistemas de representar los resultados, y esté dispuesto a compartir con ellos su propio método para abordar el problema (en caso de que sea necesario). Fíjese en si los niños abordan el problema de una manera sistemática o al azar. Más tarde se pueden estudiar con toda la clase los distintos enfoques del problema, y entonces puede plantearles la siguiente pregunta:

«¿Qué manera de resolver el problema/anotar los resultados os parece que es la mejor?»

Si se encuentran todas las maneras posibles de colocar los huevos, entonces termina apareciendo la siguiente secuencia:

Huevos en la huevera	0	1	2	3	4	5	6
Posiciones posibles	1	6	15	20	15	6	1

Hágales notar la simetría de los resultados: esto es parte del esquema numérico conocido como triángulo de Pascal. Pregunte a los niños si se les ocurre alguna razón que explique esta simetría.

La solución de un huevo y cinco huevos es la misma, porque en el primer caso se tiene en cuenta el espacio ocupado y en el segundo se toma en cuenta el espacio vacío.

«¿Cuántas colocaciones diferentes hay en total para colocar huevos en una huevera de seis huecos?» (64.)

El objetivo de la investigación no consiste en dar con la «respuesta correcta», sino en estimular la investigación. Si al final se tienen una serie de resultados diferentes, se pueden aprovechar para discutir sobre ellos o compararlos.

Actividades de ampliación

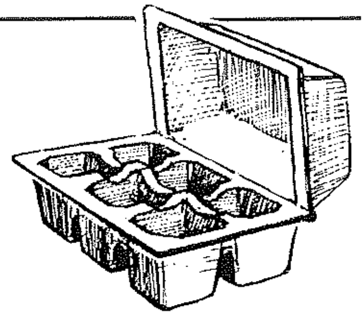
1 La actividad se puede llevar más allá estudiando la relación entre el problema de los «huevos» y el alfabeto Braille (ver Libro 4).
2 «*¿Y por qué sólo seis*?» Investigue las docenas y las medias docenas. ¿Qué significa la palabra «docena»? ¿Qué tiene de especial el número 12? ¿Por qué lo eligió Carlomagno para su unidad de moneda (12 peniques = 1 chelín)? (Porque se puede dividir en más números, divisores comunes, que otros números como, por ejemplo, el 10.)
3 Investigue las matemáticas de las hueveras. ¿Qué preguntas se les ocurren a los niños acerca de ellas? ¿Qué datos matemáticos pueden encontrar (precio, tamaño, forma, dimensiones, peso, fecha, sistemas de clasificación, estadísticas, etc.)?
4 Pídales a los niños que fabriquen sus propias hueveras con materiales de clase.

Unidades relacionadas «Tres en raya» (Libro 2), «Braille» (Libro 4).

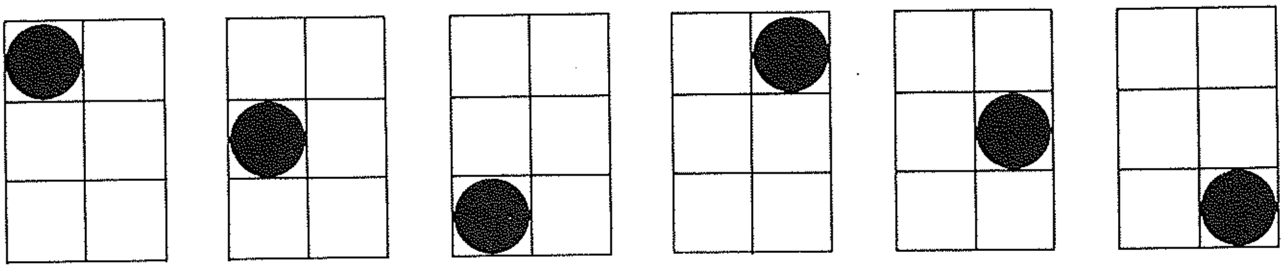
Nombre

2 Huevos en una cesta

Qué necesitas: Una huevera vacía, algo que haga de huevos, papel y lápiz.



1 Si tienes una huevera con sólo **un huevo** dentro, ¿de cuántas maneras diferentes lo puedes colocar?



2 ¿Y si tienes **dos huevos** en la huevera? ¿De cuántas maneras los puedes colocar?

3 ¿Y si tienes **tres huevos**? ¿De cuántas maneras los puedes colocar?

4 Averigua también de cuántas maneras puedes colocar cuatro, cinco y seis huevos.

Luego pon los resultados en esta tabla.

Huevos en la cesta	0	1	2	3	4	5	6
Posiciones posibles	1	6					

¿Siguen alguna secuencia los resultados?

¿Cuántos lados?

Notas del profesor

Equipo Lápices y papel de puntos (Hoja de Trabajo 2), o bien tableros de chinchetas y gomas elásticas.

Datos que ayudan a la investigación Vocabulario: polígono = figura de muchos lados, tablero, triángulo, cuadrilátero.

Conocimientos requeridos Conciencia espacial y de formas, capacidad para crear una variedad de polígonos.

Conceptos Simetría, equivalencia.

Puntos de enseñanza

Los niños pueden utilizar, o bien papel de puntos, o bien tableros de chinchetas y gomas elásticas para estudiar los polígonos.

1 Una vez que hayan realizado polígonos de tres, cuatro, cinco, seis y siete lados en un tablero de 3 × 3, se les puede preguntar lo siguiente:

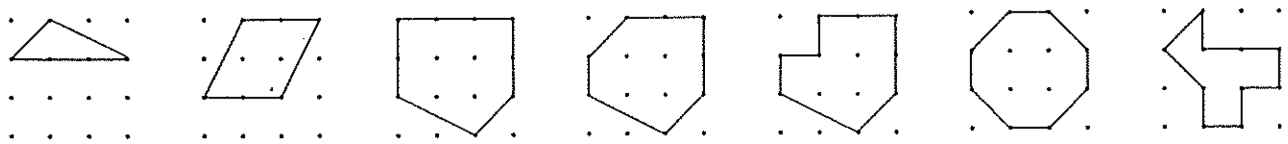
«¿Cuántos polígonos *diferentes* se pueden hacer con tres, cuatro, cinco, seis o siete lados?»

«¿Cuál es el nombre del polígono de tres lados?» (Triángulo.)

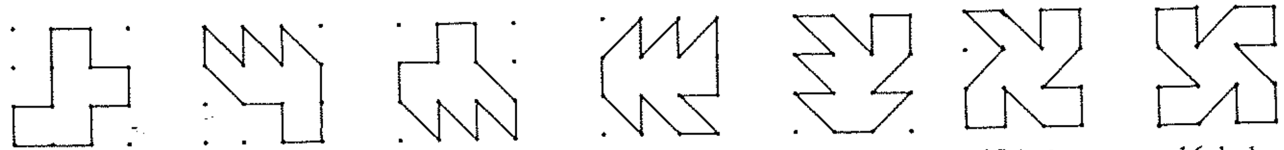
«¿Y el de cuatro lados?» (Cuadrilátero.)

«¿Es simétrica tu figura, ya sea por rotación o por reflexión?»

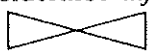
2 Las siguientes figuras son ejemplos de los polígonos que se pueden realizar en un tablero de 4 × 4.



3 lados 4 lados 5 lados 6 lados 7 lados 8 lados 9 lados



10 lados 11 lados 12 lados 13 lados 14 lados 15 lados 16 lados

Discuta con los niños qué triángulos deben considerarse *diferentes*. Por ejemplo, los triángulos reflejados o rotados como estos: 

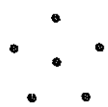
¿Son triángulos diferentes o son el mismo? Igual se puede hacer con los cuadriláteros.

El número máximo de lados que se puede obtener en un tablero de 4 × 4 es 16 (es decir, 4 × 4); en un tablero de 5 × 5 es 24 (5 × 5 - 1), y en uno de 6 × 6 es 36 (6 × 6). Los niños más inteligentes pueden darse cuenta de esto e investigar la secuencia numérica que se obtiene. Así, ¿cuál sería el número máximo de lados para un tablero de 7 × 7, y para otro de 8 × 8?

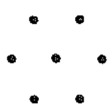
Actividades de ampliación

1 Usando tableros de distintos tamaños, investiga figuras que tengan simetría a) reflexiva y b) rotacional.

2 Prueba con a) un tablero pentagonal de seis puntos



y b) un tablero hexagonal de siete puntos.



Investiga qué polígonos se pueden obtener. ¿Qué figuras tienen ángulos iguales? ¿Cuáles tienen ángulos rectos? ¿Cuántas figuras de tres y cuatro lados se pueden formar? ¿Cuáles de ellas son simétricas?

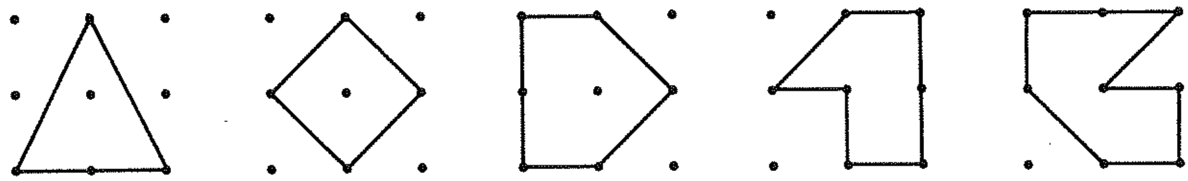
Unidades relacionadas «Diseños circulares» (Unidad 9), «¡Pártelo por la mitad!» (Libro 1), «El maravilloso polígono» (Libro 2).

Nombre ______________________

3 ¿Cuántos lados?

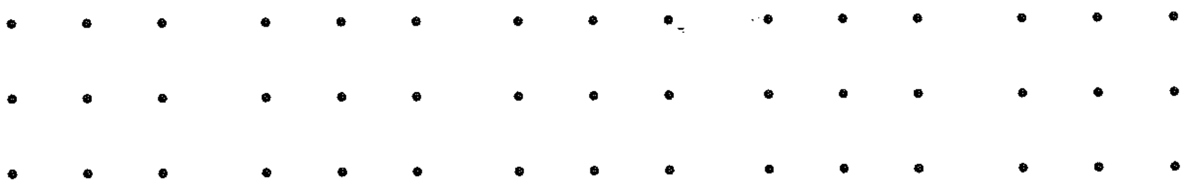
Qué necesitas: Lápiz, una hoja de 3 × 3 y otra de 4 × 4 puntos, o un tablero de chinchetas y gomas elásticas.

1 En un tablero de 3 × 3 se pueden formar polígonos de 3, 4, 5, 6 y 7 lados.
Aquí tienes unos cuantos ejemplos:



3 lados 4 lados 5 lados 6 lados 7 lados

Ahora haz tú tus propios polígonos de 3, 4, 5, 6 y 7 lados.



2 Ahora vas a investigar los polígonos en un tablero de 4 × 4. Trata de formar polígonos de 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y más lados.
¿Cuál es el número mayor de lados que se puede obtener en un polígono en un tablero de 4 × 4? ________ lados.

¿Cuántos polígonos diferentes de tres lados (triángulos) se pueden formar en un tablero de 4 × 4? ________ polígonos.

¿Y cuántos polígonos diferentes de cuatro lados (cuadriláteros) se pueden formar en un tablero de 4 × 4? ________ polígonos.

3 Investiga ahora los polígonos usando un tablero de 5 × 5.

4 ¿Cuál es el número máximo de lados que se puede obtener en un tablero de 6 × 6?

Equipo Papel y lápiz.

Datos que ayudan a la investigación Dardos, términos: doble, triple.

Conocimientos requeridos Lazos numéricos, suma, multiplicación (2 × y 3 ×), aritmética mental, diseño geométrico.

Conceptos Números, por ejemplo, doble, triple.

Puntos de enseñanza

Puntuaciones con un solo dardo Se puede estimular a los niños a realizar un trabajo sistemático haciéndoles confeccionar (o completar) la siguiente tabla de resultados con un solo dardo.

Puntos simples	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Puntos dobles	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Puntos triples	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36

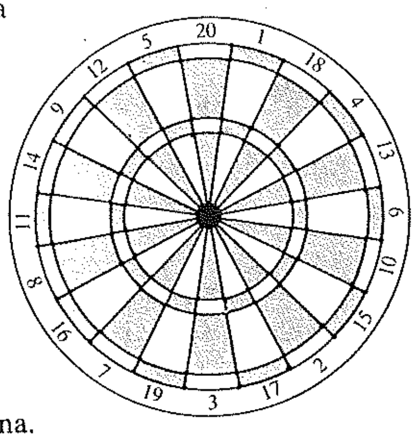
Luego pregúnteles:
«¿Qué puntos del 1 al 36 son imposibles de conseguir?» (Respuesta: 13, 17, 19, 23, 25, 26, 28, 29, 31, 32, 34, 35.)
«¿Qué puntos se pueden obtener de dos maneras diferentes?» (Respuesta: 2, 4, 8, 10, 18, 24.)
«¿Y cuáles se pueden obtener de tres maneras diferentes?» (Respuesta: 6, 12.)
Las puntuaciones con dos dardos se pueden poner en una tabla de suma:

	1	2	3	4	. . . . . .	36
1	2	3	4	5	. . . . . .	37
2	3	4	5	6	. . . . . .	38
3	4	5	6	7	. . . . . .	39
.	.	.	.	.	. . . . . .	.
36	37	38	39	.	. . . . . .	.

Otras preguntas que se pueden investigar:
«¿Qué puntuaciones se pueden obtener si los dos dardos obtienen puntos dobles/triples?»
«¿Y si se usan tres dardos con puntos simples/dobles/triples?»
En el diseño de la diana se puede incluir el valor del punto central, es decir, la puntuación que se consigue si se acierta al círculo del centro. Además, en el momento de puntuar se pueden tener en cuenta también los números negativos. Se puede jugar a los dardos vendando los ojos a uno de los niños y haciendo que «pinche» en el tablero (con un lápiz, por ejemplo), y también se puede utilizar una diana de verdad para estimular la discusión matemática. Por otra parte, los niños pueden exponer en clase sus propias dianas y establecer una discusión sobre ellas.

Actividades de ampliación

1 Que estudien una diana de verdad. ¿Qué puntos se pueden obtener en ella? ¿De cuántas maneras se puede llegar a 50? ¿Qué otras preguntas se les ocurren acerca de la manera de contar los puntos en este juego? ¿De cuántas maneras diferentes se pueden obtener 4 puntos? (Estimule a los niños para que hagan una tabla, ¡pero que tengan en cuenta que algunos dardos pueden no dar en el blanco!) Luego que prueben a conseguir 5 puntos, 6, 7, y así hasta 10. ¿Siguen alguna secuencia?

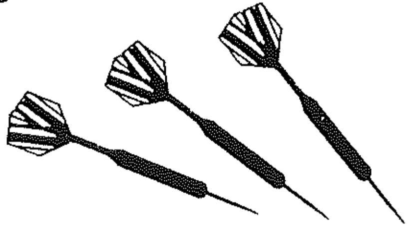


Puntos	Maneras		Núm. de maneras
0	0 + 0 + 0		→ 1
1	1 + 0 + 0		→ 1
2	2 + 0 + 0	1 + 1 + 0	→ 2
3	?	?	→ ?

2 Los niños pueden inventar también sus propios problemas con los dardos, como por ejemplo:
«¿Cómo puedes conseguir 50 puntos con tres dardos? ¿Y 68 puntos? ¿Y 100?»
Que usen números positivos y negativos al confeccionar su diana.
Que piensen en posibles problemas, los resuelvan y luego los expongan en clase.

Unidades relacionadas «De compras» (Unidad 11), «Ayudando en Correos» y «Márcalo» (Libro 1), «Sellos» (Libro 2), «Los rectángulos» (Libro 4).

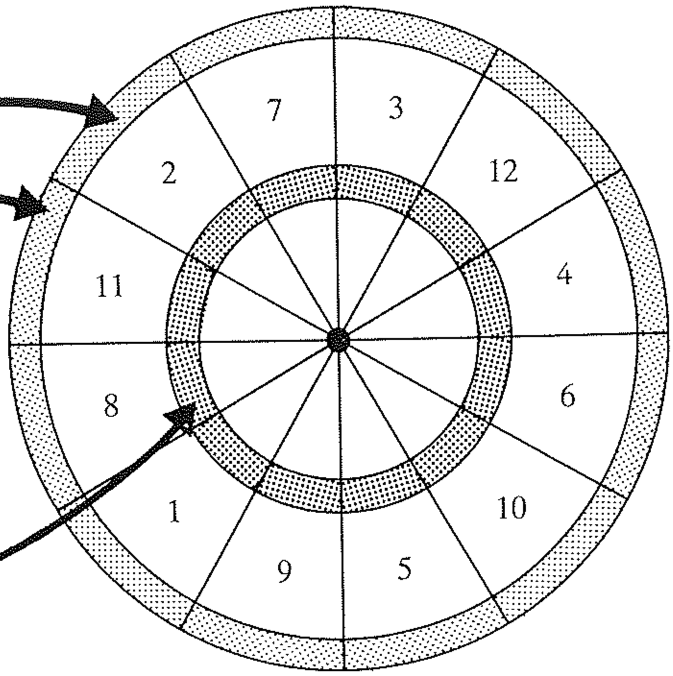
Nombre ______________________



4 Dardos

Qué necesitas: Papel y lápiz.

Aquí tienes una diana.



Anillo doble

Los dardos que den en este anillo tienen un punto doble.

Por ejemplo: $2 \times 2 = 4$

$2 \times 11 = 22$, etc.

Anillo triple

Los dardos que den en este anillo tienen un punto triple:

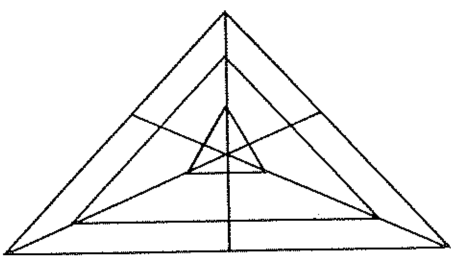
$$3 \times 8 = 24$$

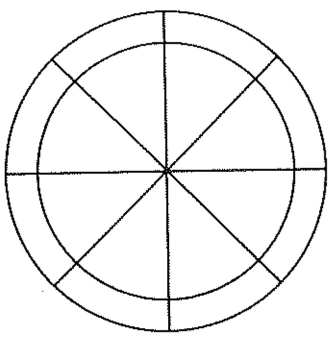
¿Qué puntos se pueden conseguir con un solo dardo?

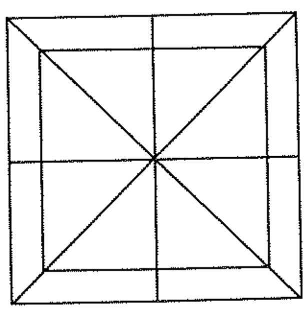
¿Y con dos dardos?

¿Y con tres?

Inventa ahora tu propia diana.







Pon números diferentes en ella e investiga los puntos que se pueden obtener.

Cuenta los cuadrados

Notas del profesor

Equipo Hoja de Trabajo 1, lápiz, calculadora.

Datos que ayudan a la investigación Término: distribución.

Conocimientos requeridos Métodos de contar, reconocimiento de las secuencias numéricas, predicción, comprobación, generalización.

Conceptos Cuadrados de un número.

Puntos de enseñanza

La hoja del alumno se ha diseñado para sugerir la estrategia de empezar contando los cuadrados más pequeños, luego los siguientes (los de 2 × 2), etc. No obstante, esta es una tarea bastante pesada para llevarla a cabo con diseños más grandes, como por ejemplo un tablero de *ajedrez*. Por lo que lo mejor es que los niños empiecen estudiando diseños pequeños, continuando luego a partir de los dos ejemplos de la hoja del alumno para seguir con otros de 4 × 4 y de 5 × 5.

Entre las preguntas que se pueden plantear en este punto podemos incluir:

«¿Cómo podemos estar seguros de que no nos hemos saltado ningún cuadrado, sin tener que volver a contar?» Esta pregunta pretende estimular un enfoque lógico, como el empezar siempre por la esquina superior izquierda y completar una hilera antes de empezar con la siguiente, etc.

«¿Debemos contar los cuadrados de cada tamaño por separado? Si lo hacemos, ¿cómo podemos tomar nota de los resultados?»

Los niños deberían discutir esta última cuestión y decidir cuál es el mejor método para tomar nota. Hay un método que ayuda mucho a destacar la secuencia numérica que se va creando, que es preparar una tabla:

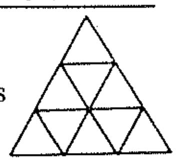
	Tamaño del cuadrado que se está contando						
Tamaño del tablero	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	Total
1×1	1						1
2×2	4	1					5
3×3	9	4	1				14
4×4	16	9	4	1			30
5×5							
6×6							

Aquí damos los resultados de los tres primeros. Una vez que los niños hayan llegado a este punto, pregúnteles qué ven en los números de la tabla, y haga que usen las secuencias que han descubierto para tratar de predecir los resultados del tablero de 5 × 5. Una vez hecho esto, pueden comprobar sus predicciones contando los cuadrados. Deberían darse cuenta de que el total se obtiene cada vez sumando los cuadrados de los números consecutivos, el mayor de los cuales es el de los cuadrados que forman la longitud del tablero.

Para calcular el número de cuadrados de un tablero de ajedrez, por ejemplo, pueden utilizar la calculadora, tanto para obtener el total como para obtener los cuadrados sucesivos, con lo cual se reforzará la idea de que el cuadrado se obtiene multiplicando un número por sí mismo, y no multiplicando por dos. También se puede enseñar a los niños cómo se anota un número al cuadrado. Así, el resultado de un tablero de ajedrez puede ser:

$8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204.$

Actividades de ampliación



1 ¿Obtendrías los mismos resultados si investigaras el número de triángulos equiláteros en un tablero triangular? ¿Cuántos triángulos equiláteros hay aquí?

2 Pida a los niños que averigüen las soluciones para cuadrados de números más altos, primero por estimación y luego hallando la raíz cuadrada de lo que hayan estimado. Por ejemplo, se toma el 15; el resultado se estima en 200; la raíz cuadrada de 200 = 14'142135; se revisa la estimación cambiándola a 215; la raíz cuadrada de 215 = etc.

Esto puede ayudar a desarrollar las técnicas de estimación a la vez que define el concepto de «raíz cuadrada».

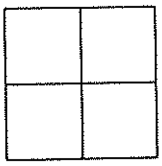
Unidades relacionadas «Averigua el número» (Unidad 12), «El juego de los cuadrados» (Libro 2), «Cuadrados de colores» (Libro 4).

Nombre

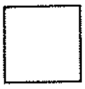
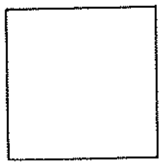
5 Cuenta los cuadrados

Qué necesitas: Papel cuadriculado, lápiz, calculadora.

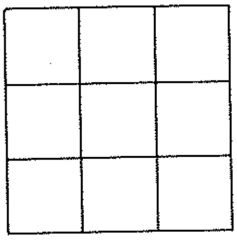
¿Cuántos cuadrados hay aquí?

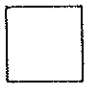


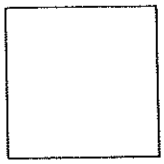
¡Hay cinco!

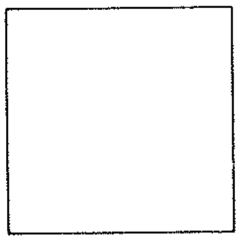
Cuatro de este tamaño:  y uno de este otro: 

¿Cuántos cuadrados hay aquí?



Hay ______________ cuadrados de este tamaño: 

______________ cuadrados de este otro: 

y ______________ cuadrados de este otro: 

Utiliza tu papel cuadriculado para ayudarte a responder a estas preguntas.

¿Cuántos cuadrados hay en un tablero de 4 × 4? ______________ cuadrados.

¿Y en un tablero de 5 × 5? ______________ cuadrados.

¿Y en uno de 10 × 10? ______________ cuadrados.

¿Y en un tablero de ajedrez? ______________ cuadrados.

Haz una tabla con tus resultados.

Equipo Arena, agua, arroz, arroz tostado, una balanza, pesas (desde 1 kg. a 10 g.), una medida de un litro, jarras, latas, o cualquier otro tipo de recipiente.

Datos que ayudan a la investigación El peso medido en gramos y kilogramos, el volumen en litros (mililitros).

Conocimientos requeridos Peso exacto, contar, medida del volumen.

Conceptos Peso y volumen; sus diferentes significados y maneras de medirlos.

Puntos de enseñanza

Las preguntas no tienen por qué seguir un orden determinado, y usted puede decidir concentrarse sólo en una o dos de ellas. Cada una de ellas está destinada a diferenciar el concepto de peso y volumen, y además todas ellas implican la elaboración de estrategias para abordar los problemas planteados. Por eso es por lo que lo ideal sería utilizar esta unidad como actividad de clase.

En la pregunta 1 se trabaja con la densidad, incluyendo la investigación de cuál de los productos da el peso máximo para un volumen determinado. A los niños les parecerá perfectamente razonable descartar el arroz tostado, pero hay que animarlos a que discutan el motivo de esta decisión: un volumen determinado de arroz tostado pesa menos que el mismo volumen de cualquier otro de los productos. A su vez, esta discusión puede ayudar a planear las actividades prácticas requeridas para responder la pregunta, es decir, el peso de volúmenes iguales de cada producto. Preguntas que se pueden plantear:

«¿Cuántos litros de cada producto debemos pesar?»

«¿Qué seguridad tendremos de conseguir un peso exacto con las pesas de que disponemos?»

También se puede discutir sobre las consecuencias prácticas de usar cada producto:

«¿Resulta sensato utilizar agua si lo que quieren es que el barco se mantenga estable?»

La pregunta 2 se refiere al litro como medida de volumen, y cómo un mismo volumen de productos diferentes da como resultado pesos diferentes. Preguntas que se pueden plantear:

«¿Pesa lo mismo un litro de arroz crudo que uno de arroz tostado?»

«¿Cómo puedes averiguarlo?»

«¿Cuál de los dos es más difícil de transportar?»

La pregunta 3 es lo contrario de la 2: un kilo de arroz crudo resulta bastante manejable, mientras que un kilo de arroz tostado supone un bulto muy grande, incómodo de llevar, ya que su volumen es mucho mayor. Pregunte a los niños:

«¿Qué tamaño tendrán que tener las cajas? ¿Cómo puedes averiguarlo?»

En cuanto a la pregunta 4, los niños necesitarán discutir sobre ello, partiendo quizá de ideas intuitivas, como el que un grano de arroz crudo es más pesado, aunque en realidad se estarán refiriendo a la densidad. Con los instrumentos de que disponen no pueden medir el peso de un grano de arroz tostado, pero eso les puede llevar al desarrollo de una estrategia, como el pesar 10 granos de cada. Si esto no funciona, entonces tendrán que adaptar su estrategia, que puede incluir distintas consideraciones sobre cómo averiguar el peso de un solo grano de cada clase (aunque en realidad no es necesario dar una respuesta concreta a esta pregunta).

Por su parte, la pregunta 5 se refiere a la relación entre un gramo y un kilogramo, incluyendo técnicas de cálculo bastante sofisticadas. Quizá los niños se den cuenta de que tienen que dividir por dos el número de gotas para la primera pregunta, pero, ¿qué pasa con la última? Pueden ayudarse con calculadoras para hallar la solución exacta una vez que hayan decidido cómo deben resolver las preguntas.

Actividades de ampliación

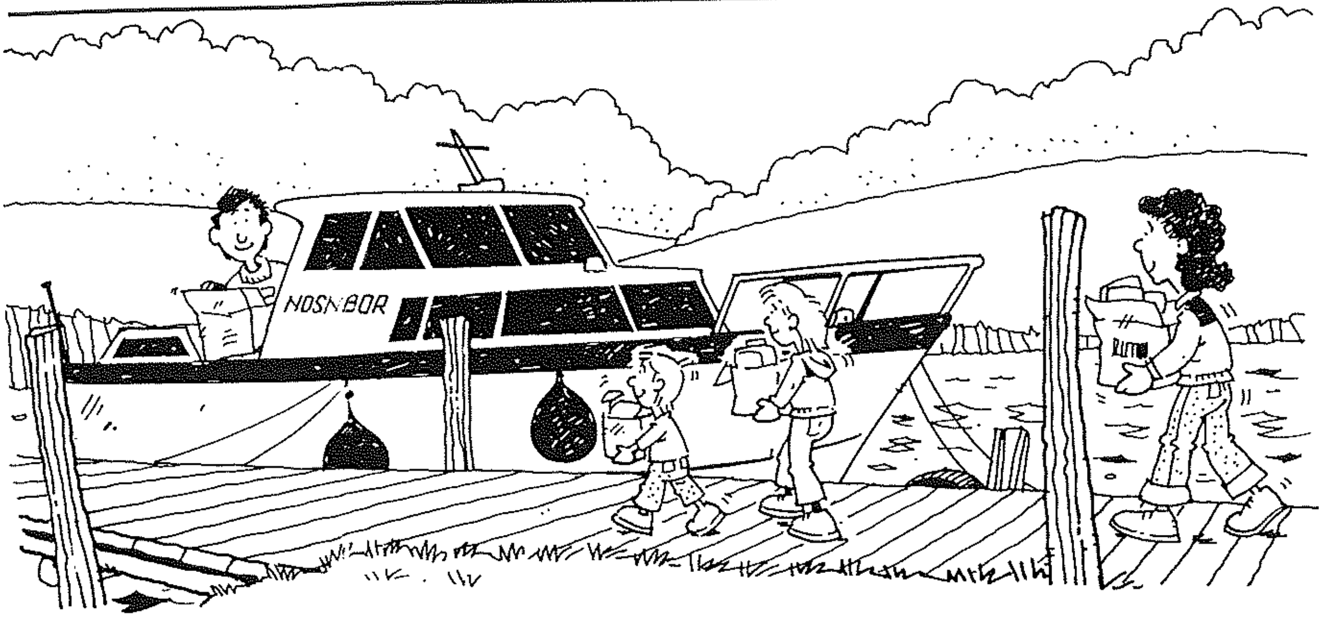
A partir de la discusión que se puede establecer, y de las actividades prácticas que pueden tener lugar, se puede deducir una serie de líneas de investigación. Por ejemplo, los niños pueden tomar un paquete de Krispies (arroz tostado) y preguntar: ¿por qué se mide el peso, no el volumen?, ¿qué significa el 600 g. que aparece en un costado del paquete, y cómo compara este peso con un kilogramo?, ¿cuántos Krispies hay en un litro?, ¿y en una tonelada?, etc.

Unidades relacionadas «Matemáticas corporales» (Libro 2).

 Nombre ______

6 Pésalo

Qué necesitas: Arena, agua, arroz, arroz tostado, una balanza, pesas, unas cuantas jarras, latas o cualquier otro recipiente, una medida de litro.



La familia Robinson son los orgullosos propietarios de un barco nuevo, llamado Nosnibor. Debes ayudarles a prepararse para su primera salida. Las provisiones que tienen que llevar son: agua (para beber y para lavar), arena, y arroz crudo y tostado para comer. El resto de las cosas las comprarán durante el viaje.

1 Tienen que poner algo que pese mucho en un hueco del fondo del barco para que este navegue mejor. Para eso llevan la arena, pero, ¿tú crees que sería mejor poner alguna de las otras provisiones?

2 Si fueras Carmen (6 años), ¿preferirías llevar un litro de arroz crudo o un litro de arroz tostado? ¿Por qué?

3 Si fueras Pedro (3 años), ¿preferirías llevar un kilo de arroz crudo o un kilo de arroz tostado? ¿Por qué?

4 ¿Qué pesa más, un grano de arroz crudo o un grano de arroz tostado?

5 Si en un kilogramo de agua hay 3.000 gotas, ¿cuántas habrá en 500 g? ______ gotas.
¿Y en 250 g? ______ gotas.
¿Y en 300 g? ______ gotas.

Bombardeo

Equipo Hoja de Trabajo 1, papel, lápiz.

Datos que ayudan a la investigación El área medida en unidades cuadradas.

Conocimientos requeridos Estimación de la mitad de un cuadrado, razonamiento lógico.

Conceptos Area, probabilidad, muestreo.

Puntos de enseñanza

Se trata de una aproximación a la medida de áreas, lo cual incluye el muestreo, en el que sólo se investigan 50 de las 100 coordenadas posibles. La exactitud mayor se logra cuando las coordenadas elegidas son las más representativas de todo el conjunto.

Entre las preguntas que pueden ayudar a la discusión tenemos:

«¿Importa si se dice dos veces el mismo par de coordenadas?» (Sí, de una manera marginal, ya que así reducimos el muestreo, y por tanto su efectividad. Llevándolo al extremo, ¿qué pasaría si repetimos el mismo par de coordenadas 50 veces?)

«¿Qué es mejor, ampliar la elección de pares de coordenadas, o limitarse a cubrir todo un sector del mapa?»

«¿El tamaño de la isla supone alguna diferencia en la exactitud de tu estimación?»

Estos y otros aspectos que se les ocurran a los niños, se pueden comprobar de manera práctica (ignorando la condición de tamaño en la hoja del alumno, que se ha incluido en ella para reducir el número de variables iniciales), y también se puede establecer una discusión en torno a estos puntos para ayudar a que los niños comprendan la idea de que el muestreo tiene que ser lo más amplio posible para que sea más representativo. Se puede hacer más difícil la tarea del oponente dibujando una isla con un contorno muy irregular, pero si éste lleva a cabo un muestreo bien planeado puede salvar la dificultad.

Quizá sea necesario discutir por qué hay que marcar los cuadrados en los que al menos la mitad es tierra, e ignorar los que tienen una fracción de tierra menor que la mitad (este es el método habitual cuando se cuentan cuadrados para medir un área irregular). ¿Bajo qué circunstancias es más exacto este sistema de «hallar la media»? (Cuando se miden áreas grandes en relación con el área del cuadrado unidad, pues así se obtiene una proporción mayor de cuadrados enteros.)

Actividades de ampliación

1 Los niños pueden sugerir lo siguiente: en vez de hacer una lista de los pares de coordenadas e ir poniendo las marcas al lado, se puede hacer un segundo tablero de 10×10 e ir rellenándolo con marcas en los cuadrados indicados. ¿Son luego los niños capaces de utilizar este esquema para deducir la forma probable de la isla? Más aún, ¿se atreven a tratar de dibujarla utilizando ese método? Esta actividad lleva consigo un componente de predicción lógica que puede resultar muy útil.

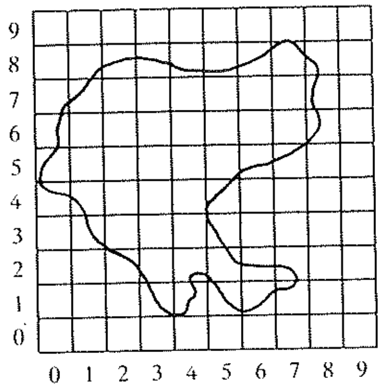
2 Repita la actividad con un muestreo menor. ¿Son capaces de seguir manteniendo un buen grado de exactitud utilizando, por ejemplo, sólo 25 pares de coordenadas? Discuta con ellos qué es un «buen grado de exactitud».

3 Que hagan ahora los pares de coordenadas tomando los dos últimos dígitos de 50 números de teléfono elegidos al azar en la guía. ¿Cómo es de exacto este método comparado con otros?

Unidades relacionadas «Prueba tu suerte» (Unidad 8), «La lectura de la mente» (Libro 1), «Puntos y líneas» y «Chinchetas y áreas» (Libro 2), «Figuras de áreas» (Libro 4).

7 Bombardeo

Qué necesitas: Papel cuadriculado, lápiz, papel.



Se trata de un juego para dos personas.
Tú eres un espía que tiene que averiguar el área de una isla de un país rival. Tienes una idea aproximada de dónde está: en algún punto de un cuadrado que mide 10 × 10 km, y también sabes que es bastante grande, que ocupa por lo menos la mitad del área del cuadrado. Tu compañero es un espía del país rival, y tiene que averiguar el área de otra isla que pertenece al tuyo.

1 Cada jugador numera un tablero de 10 × 10 en el papel cuadriculado, y dibuja en su interior una isla.

2 Por turnos, se van diciendo pares de coordenadas de un centímetro cuadrado (no lo olvides, siempre el eje horizontal primero). Ve tomando not de los pares que dices y ponles una marca si tu compañero te dice que al menos la mitad de ese cuadro es tierra de la isla. Si no lo es, entonces ponle una cruz.

3 Se sigue así hasta que cada jugador haya dicho 50 pares de coordenadas.

4 Si multiplicas por dos el número de marcas, hallarás el área aproximada de la isla de tu rival.

5 Comprueba la isla de tu compañero contando los cuadrados. Gana el que más se haya acercado al área correcta.

6 ¿Qué tal te ha salido?
¿De qué manera conseguirías un resultado más exacto, y cómo puedes dibujar la isla para que a tu compañero le resulte más difícil averiguar el área?

Prueba tu suerte

Equipo Una bolsa opaca, judías, cuentas o fichas de distintos colores.

Datos que ayudan a la investigación Vocabulario: muestra.

Conocimientos requeridos Cálculo, estimación, predicción.

Conceptos Probabilidad, muestreo, lógica.

Puntos de enseñanza

Las teorías matemáticas de la probabilidad empiezan con el arte de hacer buenas estimaciones. Esta unidad introduce la idea de la *muestra.* Estimula la utilización de distintas muestras (pregunte a los niños si eso les ayuda a hacer una predicción más fiable y exacta) y la anotación por escrito de los resultados.

He aquí unas cuantas maneras de poner los resultados por escrito:

1

Blancas	卌 IIII
Rojas	IIII

2

Número de fichas			
Muestra	Blancas	Rojas	Amarillas
1	5	6	2
2	3	7	1
3	4	5	6
4			

3 ¿Qué color salió el primero?

10			
9			
8		✓	
7		✓	
6		✓	
5	✓	✓	
4	✓	✓	✓
3	✓	✓	✓
2	✓	✓	✓
1	✓	✓	✓
Número	Blancas	Rojas	Amarillas

Así se puede seguir la estrategia de sacar sólo una ficha cada vez.

Quizá los niños quieran probar con más de una estrategia como: a) tomar una muestra completa y b) sacar una ficha cada vez. ¿Qué estrategia prefieren? ¿Por qué?

Preguntas que se pueden plantear:

«¿Es más fácil hacer una predicción cuando sólo hay dos colores, o cuando hay muchos?»

«¿Puedes estimar *cuántas* fichas de cada color hay en la bolsa?»

Pida a unos cuantos grupos de niños que preparen bolsas para que sus compañeros hagan un muestreo. Pida luego a la clase que prediga los números, y que comprueben los resultados.

Actividades de ampliación

1 Ponga cinco fichas amarillas y cinco rojas en una bolsa. ¿Qué probabilidades hay de sacar una ficha roja o una amarilla? Que predigan y hagan pruebas. También se puede investigar con cuatro rojas y seis amarillas, con tres y siete, dos y ocho, una y nueve, etc.

2 Use 100 fichas de dos colores para introducir el concepto de porcentaje. Que saquen 10. ¿Pueden predecir con ellas el porcentaje? Que prueben a sacar 20, 30, 40. ¿Se acercan así más a la predicción?

3 Que investiguen otras probabilidades, como por ejemplo:

- Si tiras al aire dos monedas, la probabilidad de que las dos sean cara (o cruz) es de 1 entre 4 ($^1/_4$). Haz una tabla con los resultados. ¿Qué aparece en ella?
- «*Probabilidades alfabéticas*». La letra que más se usa en español es la E, seguida por la A, la O y la I. Las menos frecuentes son la Ñ, la K y la W. Haz tu propia cuenta de frecuencia de uso y ponla luego en una tabla.
- «*Fiestas de cumpleaños*». Dicen los matemáticos que en un grupo de 30 personas, la probabilidad de que dos de ellas cumplan años el mismo día es mayor de un 50 por 100. Investiga las fechas de cumpleaños de tus compañeros de clase y haz una lista. ¿Cuántos cumplen años el mismo día? ¿En qué mes hay más cumpleaños? (Haz un muestreo en clase, luego haz una predicción y después investiga, si puedes, las fechas de todo el colegio.)

Unidades relacionadas «Carreras de caballos» (Libro 1), «El juego de los dados» (Libro 2).

Nombre

8 Prueba tu suerte

Qué necesitas: Una bolsa opaca (opaca significa que no se puede ver a través de ella), judías, cuentas o fichas de colores, papel y lápiz.

1 Haz un montón de fichas de un color y otro montón de fichas de otro color.

2 Pídele a un amigo que coja un puñado de fichas de cada color y las meta en una bolsa sin que tú las veas. Tiene que haber un mínimo de 20 fichas en la bolsa, pero tú no puedes saber cuántas hay de cada color.

3 Sin mirar, saca diez fichas de la bolsa; cuenta a ver cuántas hay de cada color y luego vuelve a echarlas a la bolsa.

Ahora arriésgate. ¿Eres capaz de predecir de qué color hay más fichas en la bolsa?

4 Ahora haz otro muestreo. Remueve bien las fichas de la bolsa, saca otras diez y cuenta cuántas hay de cada color. Puedes hacerlo todas las veces que quieras, y debes ir poniendo por escrito los resultados de cada vez. Una vez hecho, estima de qué color hay más fichas.

5 Comprueba tus respuestas contando todas las fichas de la bolsa.

¿Qué probabilidades hay?
Prueba con fichas de tres o más colores. Toma muestras y mira a ver si eres capaz de estimar de qué color hay más.

¿Qué *tamaño* debe tener la muestra para que puedas lograr una respuesta aproximada?
¿*Cuántos* muestreos debes realizar?

Equipo Hoja de Trabajo 3, regla y lápiz.

Datos que ayudan a la investigación Círculos, diseños, reglas.

Conocimientos requeridos Conciencia espacial, análisis de formas, seguimiento de una secuencia, dibujo de líneas rectas.

Conceptos Semejanzas y diferencias, clasificación por formas, simetría.

Puntos de enseñanza

Para no tener que medir la distancia de los puntos alrededor del círculo, estos se pueden marcar utilizando los vértices de un hexágono.

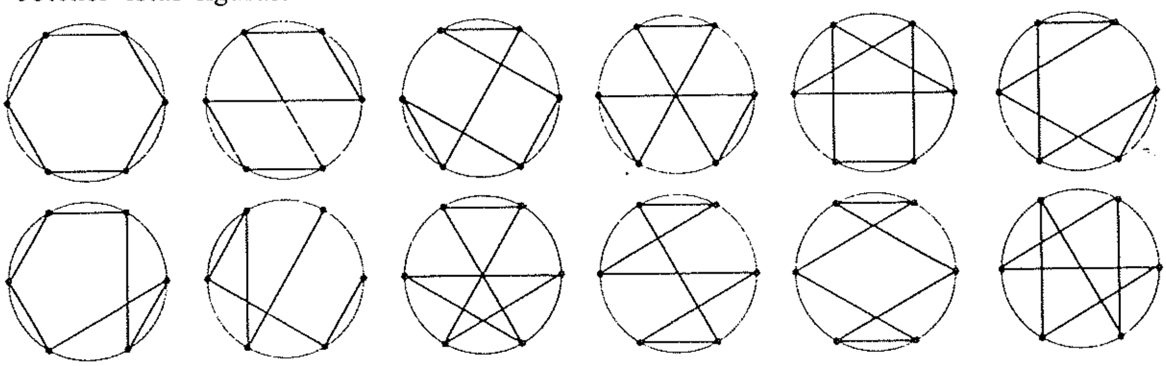
Creación de diseños Antes de empezar con los diseños hay que dejar claras las condiciones, como por ejemplo:

- el diseño si/no debe ser simétrico
- si/no se pueden añadir líneas extras dentro del diseño
- hay que utilizar un número determinado de líneas, por ejemplo nueve
- el diseño se puede salir fuera del círculo

Preguntas que se pueden plantear:
«¿Qué figuras aparecen en tu diseño?»
«¿Es simétrico?... ¿Por qué?»
«¿En cuántas regiones has dividido el círculo?»
«¿Con qué diseño se forman más regiones?»

En la discusión se pueden incluir términos como cuerda, curva, arco, diámetro, radio, segmento, etc. Estimule a los niños a que describan sus diseños y hablen sobre ellos.

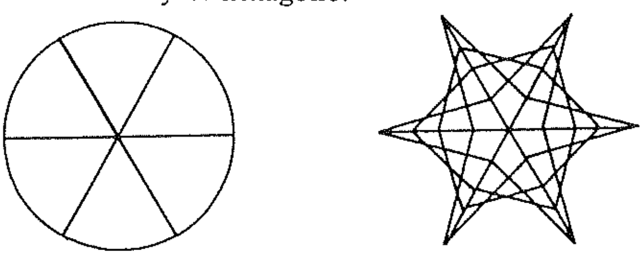
Siguiendo las reglas que se dan en la hoja del alumno, con seis puntos se pueden obtener estas figuras:



Actividades de ampliación

1 Que investiguen qué polígonos se pueden dibujar utilizando seis puntos. De ellos, ¿cuántos tipos de triángulos, de cuadriláteros, de pentágonos y de hexágonos? Que exploren los ángulos de los pentágonos: tamaño y semejanza. Varíe el número de puntos: se pueden usar cinco, siete, ocho (ver Hojas de Trabajo 5 y 6).

2 Que investiguen las divisiones del círculo o el dibujo de esquemas basados en el círculo y el hexágono.

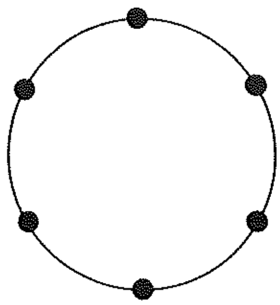


Unidades relacionadas «Copos de nieve» (Unidad 1), «¿Cuántos lados?» (Unidad 3), «El rosetón» (Unidad 16), «Cortar el pastel» (Libro 1), «El maravilloso polígono» (Libro 2).

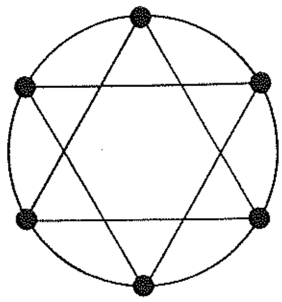
9 Diseños circulares

Qué necesitas: Figuras circulares, regla y lápiz.

En este círculo hay seis puntos equidistantes.



1 Usando la regla y el lápiz, une los puntos creando distintos diseños. Aquí tienes uno, por ejemplo:

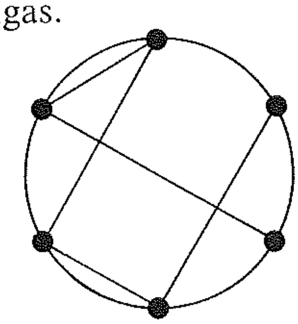


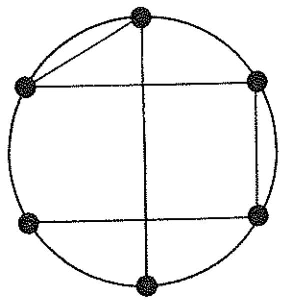
2 Averigua de cuántas maneras diferentes se pueden unir los seis puntos siguiendo estas reglas:

- Únelos utilizando solamente líneas rectas.
- No levantes el lápiz del papel.
- Las líneas sólo deben pasar **una vez** por cada punto.

Cada una de las figuras debe ser diferente de las demás la pongas en la posición que la pongas.

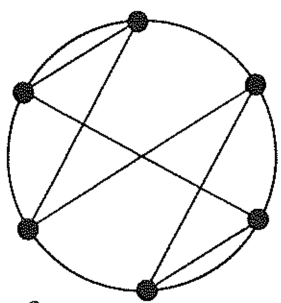
¿Son diferentes estas dos figuras?

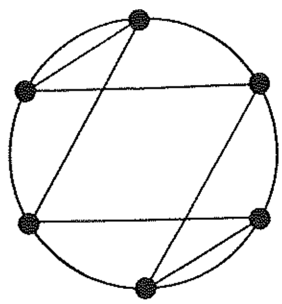




No; son la misma, vista desde distinto lado.

Estas figuras sí que son diferentes.





¿Cuántas más eres capaz de encontrar?

Equipo Un juego de fichas de dominó.

Datos que ayudan a la investigación Fracciones simples, por ejemplo, $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}$, etc.

Conocimientos requeridos Seguimiento de reglas, cálculo, abstracción y simbolización.

Conceptos Secuencias numéricas, fracciones, proporciones.

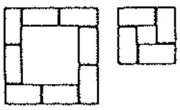
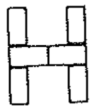
Puntos de enseñanza

El objetivo de esta investigación consiste en estimular a los niños: a) a descubrir que construir puentes de dominó es una actividad gobernada por una regla y b) a generar sus propias reglas para construir los puentes y plantear sus propios problemas.

En el ejemplo que se da, la arcada del puente (la hilera superior de puntos de las fichas de dominó), es igual al número de puntos de los soportes, lo que nos da para la arcada una proporción de 1:2 o una fracción de 1/2 del total de puntos.

Anímelos a mostrar los resultados de una manera verbal o pictórica; también pueden grabar en una cinta magnetofónica las instrucciones para que otros las sigan. Preguntas que se pueden plantear:

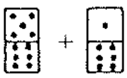
«¿Cuál es la regla para construir el puente?»
«¿Puedes hacerlo de otra manera?»
«¿Se te ocurre alguna forma de cambiar la regla?»

Una vez que hayan experimentado con los puentes pueden explorar otras formas, como cajas cuadradas , rectangulares , o figuras de letras 

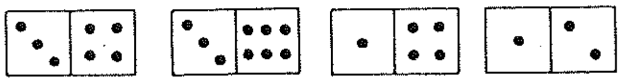
¿Qué secuencias de números y figuras encuentran en sus fichas de dominó?

Actividades de ampliación

1 *«Fracciones de dominó»* Este par de fichas de dominó se puede considerar como un par de fracciones.

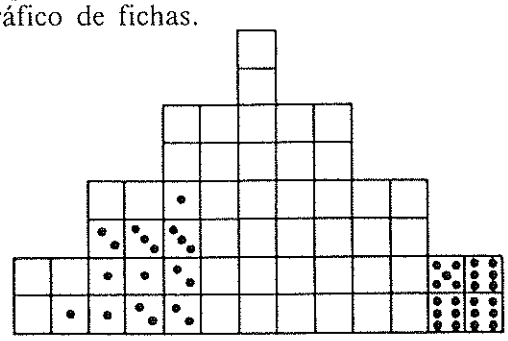
 $= \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$

¿Se te ocurre alguna otra pareja que sume 1?
¿Puedes hacer que estas cuatro fichas sumen 2?

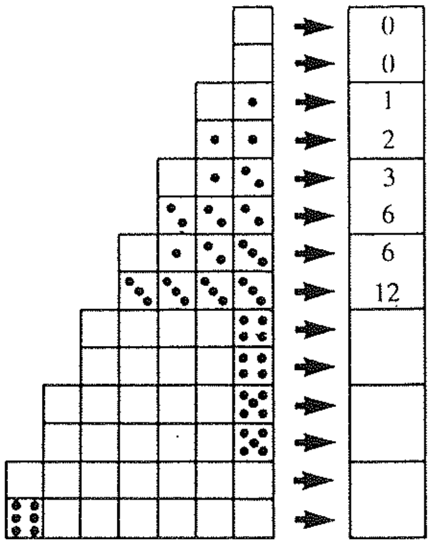


¿Y puedes hacer que sumen otro número?

2 Uno de los rasgos matemáticos más importantes del dominó es que sus fichas se agrupan en conjuntos. Los niños pueden explorar este rasgo completando este gráfico de fichas.



0 1 2 3.........................11 12



Agrupar las fichas por conjuntos puede dar lugar a una serie de progresiones matemáticas muy interesantes.

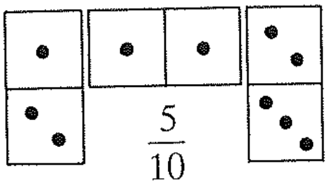
Unidades relacionadas «Calculando fracciones» (Unidad 17) «Cuadrados de dominó» (Libro 1).

Nombre

10 Puentes de dominó

Qué necesitas: Un juego de fichas de dominó.

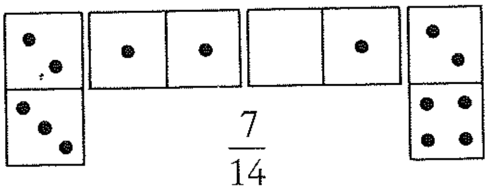
Mira este puente.

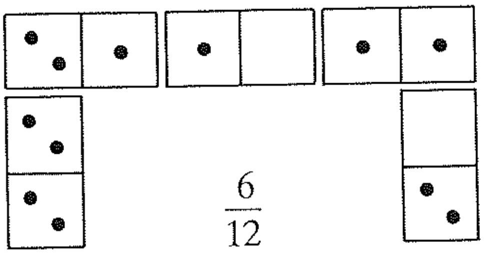


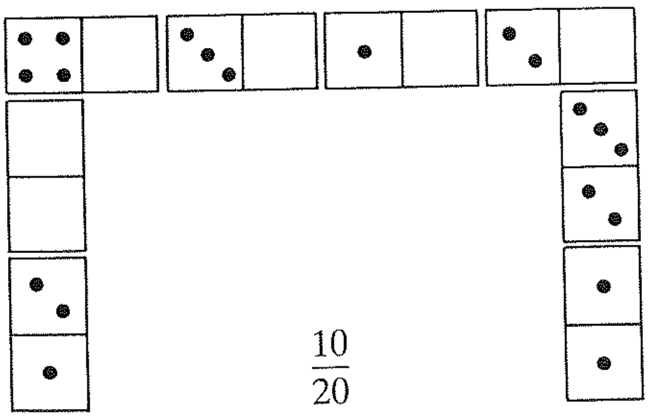
El número de puntos que forman la arcada es 5.

El total de puntos del puente es 10.

Ahora prueba a hacerlo tú.







Mira estos puentes.

Prueba a hacerlos.

Averigua las reglas que hay que seguir para construirlos.

Luego prueba a construir otros puentes siguiendo las mismas reglas.

¿Cuál es el que más fichas tiene?

Ahora decide tus propias reglas para construir un puente.

Investiga varios puentes diferentes utilizando la regla que has decidido.

Equipo Calculadora, papel, lápiz.
Datos que ayudan a la investigación Lazos numéricos.
Conocimientos requeridos Uso de la calculadora, búsqueda de secuencias numéricas, predicción, comprobación y generalización.
Conceptos Secuencias numéricas (sucesión de Fibonacci).

Puntos de enseñanza

Este es uno de los sistemas más sencillos para llegar a la sucesión de Fibonacci (a los niños les puede servir de ayuda el tener monedas de 1 pta. y de 2 ptas.). La tabla completa (hasta 5 ptas.) es la siguiente:

Precio	Diferentes maneras de pagar	Número de maneras de pagar
0 ptas.	0 ptas.	1
1 pta.	1 pta.	1
2 ptas.	2, 1+1	2
3 ptas.	1+2, 2+1, 1+1+1	3
4 ptas.	2+2, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2, 1+1+1+1	5
5 ptas.	2+2+1, 2+1+2, 1+2+2, 2+1+1+1, 1+2+1+1, 1+1+2+1, 1+1+1+2, 1+1+1+1+1	8

Si a usted o a los niños no les gusta la idea de pagar por un objeto que no cuesta nada, entonces se puede ignorar la primera línea de la tabla. No obstante, es posible que se demuestre la necesidad del primer 1 una vez que los niños descubran cómo se forma la sucesión.

En este punto, los niños deberían tener información suficiente para ser capaces de descubrir la secuencia: cada número se obtiene sumando los dos anteriores. Cada vez que uno de ellos haga una sugerencia, sea correcta o no, hágales predecir el número siguiente según la regla sugerida, y que lo comprueben luego de la misma manera que se han comprobado los seis primeros números de la secuencia. Anímeles también a que sigan un orden lógico en su procedimiento: la tabla sigue un orden que nos permite asegurarnos de que no nos hemos saltado ninguna posibilidad, ni tampoco hemos repetido ninguna.

Una vez que se haya asegurado que los niños comprenden que la sucesión empieza con dos 1 sucesivos, pueden tratar de descubrir el truco del final de la página.

Pídales que amplíen la sucesión con una calculadora, y que pongan los resultados por escrito. (Hay campo suficiente para ilustrar la economía que supone en este caso el uso de la calculadora.)

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 89, 144, 233 377, 610, 987, 1597, 2584...

Si usan la calculadora para averiguar los distintos totales hasta diversos puntos de la secuencia, quizá sean capaces de deducir que estos mismos se pueden obtener avanzando dos números más allá y restando 1. Por ejemplo, el total desde 1, 1, 2, 3... hasta 144 es 377 — 1 = 376. Una vez visto esto, pida de nuevo a los niños que comprueben sus sugerencias con otros ejemplos.
niños que comprueben sus sugerencias con otros ejemplos.

Actividades de ampliación

En la sucesión de Fibonacci hay campo suficiente para llevar a cabo una investigación amplísima (se pueden obtener más ideas en la unidad «Los rectángulos áureos», del libro 4).

Otra actividad que se puede realizar en este punto es: tomar dos números de la sucesión (no tienen por qué ser sucesivos) y sumarlos. Luego se suma la respuesta al número inmediatamente anterior. Se sigue este procedimiento hasta obtener una columna de 10 números, por ejemplo:

1
3
4
7
11
18
29
47
76
123

La suma de todos ellos se obtiene multiplicando el séptimo número por 11, es decir, 29 × 11 = 319.

Unidades relacionadas «Ayudando en Correos» (Libro 1), «Los rectángulos áureos» (Libro 4).

Nombre

11 De compras

Qué necesitas: Calculadora, papel y lápiz.

Si fueras de compras con monedas de sólo 1 y 2 ptas., podrías pagar algo que costara 3 ptas. de tres maneras distintas:

pagando 1 pta. y luego 2 ptas.
o pagando 2 ptas. y luego 1 pta.
o pagando primero 1 pta., luego 1 pta. y luego 1 pta.

Se puede poner por escrito así:

Precio	Diferentes maneras de pagar	Número de maneras de pagar
0 ptas.		
1 pta.		
2 ptas.		
3 ptas.	1 + 2, 2 + 1, 1 + 1 + 1	3
4 ptas.		
5 ptas.		
6 ptas.		
7 ptas.		
8 ptas.		
9 ptas.		

Trata de rellenar el resto de la tabla, y continúa hasta 18 ptas. Una vez que hayas averiguado todas las respuestas hasta 5 ptas., no trates de rellenar ya la columna del centro... ¡no te cabría todo! En vez de eso, tendrás que encontrar unas cuantas claves que te ayuden a rellenar las demás columnas hasta el final.
¡También es posible que te haga falta una calculadora!
Compara tus respuestas con las de tus amigos para ver si estáis todos de acuerdo, y luego comprobadlas con el profesor para ver si son correctas.

Aquí te damos un truco para que puedas asombrar a tus amigos: ¡puedes sumar todos los números de la última columna hasta el que ellos elijan, en un instante!
Por ejemplo, si tus amigos escogen el número 144, puedes hacer la suma en un momento: 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 89 + 144.
Suma todos estos números con la calculadora y mira a ver si puedes descubrir cómo hacerlo.
Prueba a sumar distintos números de la columna, pon las respuestas por escrito, y a ver si puedes descubrir el secreto.

Averigua el número

Equipo Lápiz.

Datos que ayudan a la investigación Términos: par, impar, cuadrado de un número, dígito, divisor, primo, múltiplo, mayor, menor.

Conocimientos requeridos Identificación de elementos comunes de distintos conjuntos de números.

Conceptos Conjuntos numéricos, intersección de conjuntos.

Puntos de enseñanza

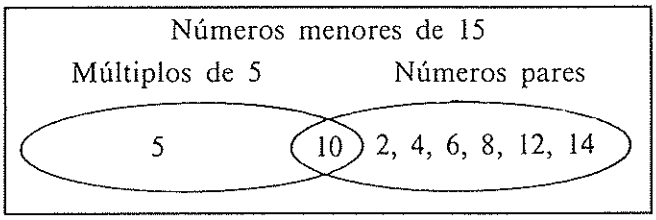
Aunque en la hoja del alumno se sugiere que el hacer una lista de los miembros de cada conjunto pertinente (números impares, múltiplos de 5, etc.) resulta una estrategia útil, esta actividad puede ser también un buen ejercicio mental. En principio, como actividad de grupo, se pueden dar unos cuantos ejemplos, con los que los niños pueden hacer listas como la de la hoja del alumno para que les quede bien clara la estructura de cada conjunto.

Esta investigación requiere un cierto conocimiento de los diversos conjuntos de números, y a la vez sirve para reforzar dicho conocimiento.

Hay que hacer énfasis en la economía en el momento de definir los números. Por ejemplo, se puede explicar a un niño que si se describe un número como múltiplo de 4 y como número par, una de las dos descripciones resulta superflua. ¿Cuál de las dos resulta más útil en un caso concreto?

Además, la discusión sobre estos puntos ayuda a reforzar las relaciones entre los diversos conjuntos de números. Y quizá usted prefiera limitar las descripciones que se pueden utilizar: por ejemplo, si sólo permite decir a los niños que los números en cuestión son «múltiplos de», puede ayudarles a descubrir que todos los números que son múltiplos de 2 y de 3 lo son también de 6.

Por otra parte, la relación de los conjuntos se puede mostrar utilizando los diagramas de Venn, en vez de las listas de los miembros de cada conjunto. Así, el primer ejemplo de la hoja del alumno se podría explicar así:



Actividades de ampliación

La página del alumno es sólo un punto de partida para una actividad que se puede utilizar con gran flexibilidad.

1 Añada otros posibles conjuntos de números como la sucesión de Fibonacci (ver unidad 11), o las fracciones y los decimales (he aquí una buena oportunidad para investigar la equivalencia.)

2 ¿En qué circunstancias es posible prescindir del «menor que» y el «mayor que» (como en el segundo ejemplo de la hoja del alumno)?

3 Que usen una calculadora para hacer una lista de los elementos de conjunto determinado (ver «Calculando sucesiones numéricas», Unidad 19).

Unidades relacionadas «De compras» (Unidad 11), «El rosetón» (Unidad 16), «Calculando sucesiones numéricas» (Unidad 19), «Dibujos de chinchetas» y «Factores» (Libro 1), «Semáforos» y «Rutas» (Libro 2).

 Nombre

12 Averigua el número

Qué necesitas: Lápiz.

Estoy buscando un número.
Es un múltiplo de 5.
Es menor de 15.
Es un número par.

¿Qué número es?

Múltiplos de 5	Números pares
5 10	2 4 6 8 10 12 14

El número es el 10, porque es el único que aparece en las dos columnas.

Ahora, prueba con esto:

Mi número es divisor de 32.
Es el cuadrado de un número.
Es un número de dos dígitos.

¿Qué número es?

Factores de 32	Números cuadrados	Números de dos dígitos
1 2 4 8 16 32	1 4 9 16 25 36	10 11 12 13 14 16 18 etc.

El número es el 16.

Prueba a averiguar más números siguiendo este mismo sistema, y escríbelos aquí.

Puedes utilizar estas palabras: par, impar, cuadrado, triangular, dígito, divisor, primo, múltiplo, menor que, mayor que.
(No utilices a la vez «menor que» y «mayor que»... ¡resultaría demasiado fácil!).
Prueba a hacerlo con tus amigos, dándoles pistas.
¿Son suficientes tus pistas para identificar el número?
¿Les has dado más pistas de las que necesitaban?
¿Han averiguado el número?

¿Dentro o fuera?

Equipo Papel y lápiz.

Datos que ayudan a la investigación Familiaridad con las figuras curvas.

Conocimientos requeridos Dibujo, orientación espacial y topológica.

Conceptos Superficies curvas, reglas, rutas, regiones, dentro y fuera.

Puntos de enseñanza

Se trata de un problema topológico. La topología es el estudio de las superficies; la mejor manera de iniciarla es investigando redes, trazados, mapas y laberintos. El objetivo de esta unidad es deducir una regla para decidir si un punto está dentro de una curva cerrada o fuera de la misma, utilizando para ello las claves que se dan. La regla dice que si se traza una línea desde un punto en el interior de una curva cerrada hasta otro en el exterior, el número de líneas que cruza es impar. Una vez que los niños hayan descubierto la regla, asegúrese de que saben aplicarla al revés: si el número de líneas que cruza es par, quiere decir que el punto está fuera de la curva cerrada. Compruebe que lo han comprendido preguntándoles:

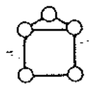
«Desde un punto interior hasta otro interior, ¿el número de líneas que se cruzan es par o impar?» (Respuesta: ¡par!).

¿Puede usted (o los niños) encontrar algún otro diseño curvo y cerrado que resulte interesante para comprobar la regla (contornos de mapas, islas, diagramas de intestinos, dibujos islámicos, laberintos)?

Actividades de ampliación

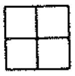
1 Se pueden usar *mapas* que muestren planos simplificados de las rutas de tren, de autobús o de otros transportes (el plano del Metro supone una fuente muy interesante para los estudios topológicos).

2 Un *vértice* es el punto en el que se encuentran o terminan dos líneas. He aquí un ejemplo:

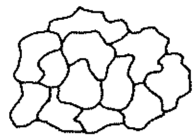


Dibuja redes en las que puedas trazar una línea continua de un vértice a otro (es decir, que se pueda **atravesar**) sin tener que saltar ninguna línea.

3 Investiga las posibles rutas a través de un museo de cuatro salas, de nueve salas, de 16 salas y de 25 salas (pon las entradas y las salidas en los lugares más convenientes).



4 Investiga el número mínimo de colores que hacen falta para colorear una bandera como la de Inglaterra de manera que no queden juntos dos colores iguales. Dibuja figuras o mapas imaginarios complicados, y coloréalos con el mínimo de colores posibles.



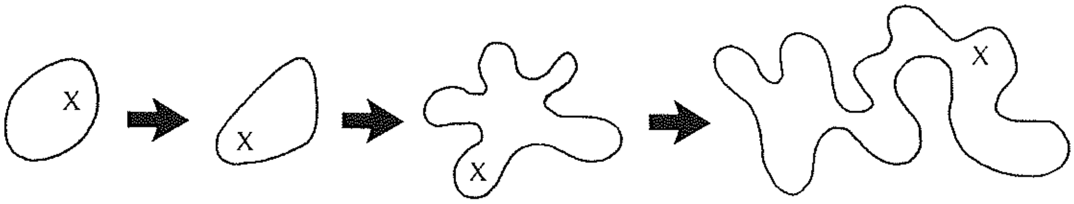
5 Dibuja un *laberinto* del que sea posible (o imposible) salir. ¿Cómo puedes saber si es posible o no?

Unidades relacionadas «Laberintos», «Jumbo y los bollos» y «Rompecabezas de trazado» (Libro 1), «Las franjas de Möbius» (Libro 4).

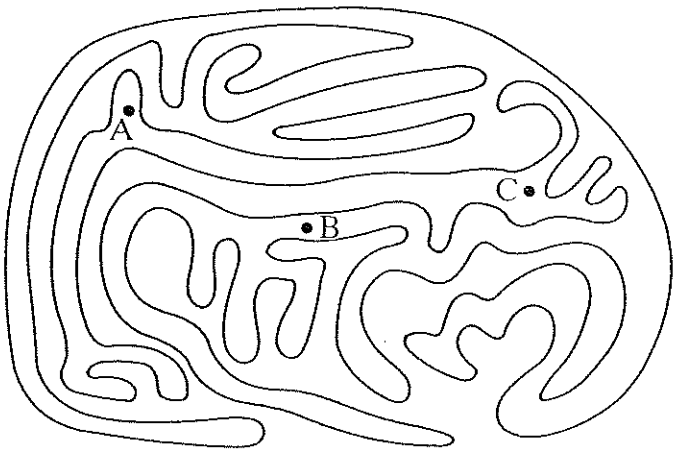
13 ¿Dentro o fuera?

Qué necesitas: Papel y lápiz.

Estas figuras son **curvas cerradas simples**: sólo tienen un interior y un exterior.



En todos estos casos resulta fácil darse cuenta de que el punto marcado con la X está dentro de la figura.
La figura inferior también es una curva cerrada simple.
En ella hay tres puntos misteriosos: ¿se encuentran dentro o fuera de la curva?



Un francés llamado Jordan descubrió una manera muy sencilla de averiguarlo: dibujó una línea recta desde el punto hasta el exterior de la curva, y entonces contó si esa línea cruzaba las de la curva un número par o impar de veces.

¿Puedes tú descubrir la regla?
¿El número de veces que se cruza desde un punto interior hasta otro exterior es siempre par o siempre impar?
¿Tiene que ser recta la línea que traces?

Dibuja tu propia curva cerrada y comprueba si realmente funciona esta regla.

Números chinos

Equipo Lápiz.

Datos que ayudan a la investigación Conocimiento de las tablas cuadradas de números.

Conocimientos requeridos Técnicas de deducción.

Conceptos Valor según la colocación, otros sistemas numéricos, secuencias de números.

Puntos de enseñanza

El valor según la colocación es un concepto fundamental en la mayoría de los sistemas numéricos, y muchos de ellos (entre otros el nuestro) se basan en la cuenta por decenas. En el cuadrado de números chinos esto se ve tan claramente como en el nuestro. Quizá los niños prefieran confeccionar un cuadro de números convencionales antes de empezar con la investigación.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

En el cuadrado chino, los números van de arriba abajo, no de izquierda a derecha, pero aparte de eso la construcción es la misma. Aunque tienen un símbolo especial para el 10, el 20 (二十), por ejemplo, se representa con dos lotes de 10, mientras que, aparentemente, no hay ningún símbolo que represente el cero. Si se compara el símbolo del 20 con el del 12 (十二), se verá que si el 2 aparece debajo del 10, los dos números se suman, y si aparece encima, se multiplican.

Hay que animar a los niños a que planteen sus propias preguntas y traten de responderlas, y lo mejor es que trabajen en parejas o en grupos.

Actividades de ampliación

Se pueden investigar otros cuadrados de números de diferentes culturas: los cuadrados punjabíes, los urdúes, los hindúes, los gujaratíes o los bengalíes pueden servir perfectamente para este tipo de actividad.

También resultan interesantes los sistemas numéricos de las culturas antiguas; en algunos de ellos se ve claramente el distinto valor según la colocación, aunque no todos ellos son de base 10. El sistema babilónico, por ejemplo, funcionaba en base 60, y hay otros en los que resulta muy difícil apreciar el distinto valor según la colocación: en el egipcio, por ejemplo, parece no aplicarse ningún componente de este tipo.

Unidades relacionadas «Braille» (Libro 4).

Nombre ______________________

14 Números chinos

Qué necesitas: Un lápiz.

Un explorador descubrió un cuadrado chino que tenía este aspecto:

一	十一	二十一	三十一	四十一	五十一	六十一	七十一		九十一
二	十二	二十二	三十二	四十二	五十二	六十二	七十二	八十二	九十二
三		二十三	三十三	四十三	五十三	六十三	七十三	八十三	九十三
四	十四	二十四	三十四	四十四	五十四	六十四	七十四	八十四	九十四
五	十五	二十五	三十五	四十五	五十五	六十五	七十五	八十五	九十五
六	十六		三十六	四十六	五十六	六十六	七十六	八十六	九十六
七	十七	二十七	三十七	四十七	五十七	六十七	七十七	八十七	九十七
八	十八	二十八	三十八	四十八	五十八	六十八	七十八	八十八	九十八
九	十九	二十九	三十九	四十九	五十九	六十九	七十九	八十九	
十	二十	三十		五十	六十	七十	八十	九十	百

En seguida se dio cuenta de que se trataba de un cuadrado de números al que le faltaban unos cuantos.

Mira a ver si puedes responder alguna de estas preguntas:

1 ¿Cuál es el símbolo chino que representa el 10? Dibújalo aquí ______

¿Y cuál es el símbolo del 5? Dibújalo aquí. ______

¿Cuál crees que será el símbolo del 15?
Dibújalo y luego comprueba si es correcto. ______

¿Y el 35? ______

2 ¿Eres capaz de rellenar los números que faltan en el cuadrado?

3 ¿Sabrías dibujar el número que representa el 130?

Cuartos curvados

Equipo Hoja de Trabajo 4, tijeras, regla, lápiz.

Datos que ayudan a la investigación División de una figura en cuartos: cuatro partes de áreas iguales.

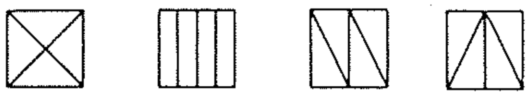
Conocimientos requeridos Exactitud de dibujo y de medida, razonamiento lógico, conciencia espacial.

Conceptos Fracciones, equivalencia, área.

Puntos de enseñanza

La mayor parte de los niños aceptarán sin problemas que el ejemplo A de la hoja del alumno representa cuatro cuartos; sin embargo, el ejemplo B puede suscitar una discusión: el razonar por qué cada una de esas partes es un cuarto ayuda a introducir el concepto de área, a la vez que llega consigo una técnica de deducción lógica. Puede servir de ayuda hacer que los niños recorten cada una de las figuras en sus cuatro partes: las partes de la figura A se pueden apilar en un montón para demostrar que tienen la misma área, pero para las de la figura B será necesario llevar a cabo más cortes y superposiciones para conseguirlo.

Aquí hay otros ejemplos que se pueden estudiar:

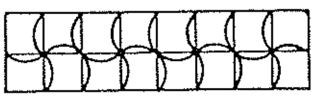


Por otra parte, el sistema de recortar puede servir también para demostrar que esta figura, por ejemplo, no está dividida en cuartos.

La razón de que los cuartos curvados sigan siendo cuartos, es que de cada cuarto «recto» original se quita una parte que a su vez es reemplazada por otra parte igual. De nuevo, recortar los cuartos puede servir de ayuda en la discusión, aunque los niños tendrán que basarse en su propio razonamiento para estudiar casos como el que aparece aquí abajo, y que es un ejemplo de cuartos curvados basado en la figura B.

Actividades de ampliación

1 Se puede utilizar todo un tablero de cuadrados para hacer cuartos curvados, que luego se pueden colorear para obtener atractivos diseños.



2 La idea de quitar una parte de la figura para añadirla en otro sitio puede dar lugar a mosaicos muy interesantes.

3 En el ejemplo A encontramos simetría rotacional, y cuatro ejes de simetría. ¿En qué cambia esto al hacer los cuartos curvados? Investígalo en otras figuras.

4 Prueba a usar otras fracciones y otras figuras: por ejemplo, un triángulo equilátero dividido en cuartos o novenos.

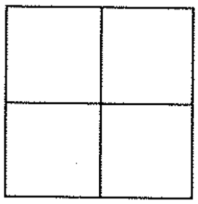
Unidades relacionadas «¡Pártelo por la mitad!» (Libro 1), «Los tres cuadrados» (Libro 2).

 Nombre

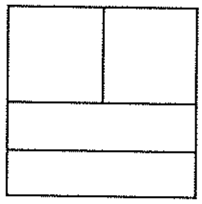
15 Cuartos curvados

Qué necesitas: Papel cuadriculado de cuadros grandes, tijeras, regla, lápiz.

1 Divide todos los cuadrados que puedas en cuartos dibujando líneas rectas, de manera que cada uno de ellos esté dividido de una manera distinta.
Aquí tienes dos para empezar:



A

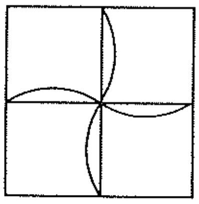


B

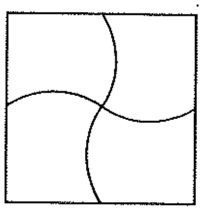
¿Cómo puedes estar seguro de que estas dos figuras están divididas en cuartos exactos?

2 También es posible dividir un cuadrado en cuartos dibujando líneas curvadas.

Con un lápiz, dibuja la figura A en una hoja y luego píntale líneas curvas, así:



Luego, si borras las líneas rectas, obtendrás esto:



¿Sigue estando la figura dividida en cuartos?
¿Cómo puedes comprobarlo?

2 Ahora, utilizando los cuadrados que has dibujado, prueba a dividir otros en «cuartos curvados», y luego pídeles a tus amigos que comprueben si realmente los has dividido en cuartos exactos.

El rosetón

Notas del profesor

Equipo Hojas de Trabajo 5 y 6, lápices de colores.

Datos que ayudan a la investigación Conocimiento de los números triangulares.

Conocimientos requeridos Técnicas de dibujo, uso de la regla, reconocimiento de secuencias numéricas, predicción, comprobación, generalización.

Conceptos Secuencias numéricas (álgebra básica).

Puntos de enseñanza

Es importante que los niños discutan cómo se hace un rosetón, y que se den cuenta de que se forma uniendo cada uno de los puntos que rodean una circunferencia con todos los demás, y que aunque el número de puntos puede variar, siempre tienen que ser equidistantes.

Contar una por una todas las líneas es prácticamente imposible en un rosetón complejo, y por eso habrá que animar a los niños a que estudien primero ejemplos sencillos, de los que puedan extraer una regla general. Por ejemplo, dígales:

«Es fácil contar las líneas de un rosetón de tres puntos, o de uno de cuatro pero, ¿cómo podemos utilizar lo descubierto en ellos para que nos sirva de ayuda para uno más complicado?»

Pueden empezar por dibujar ellos mismos un rosetón de tres puntos, utilizando un color diferente para las líneas que parten de cada uno de ellos, y luego hacer uno de cuatro y otro de cinco, confeccionando una tabla con los resultados. La razón para plantear así el trabajo, es que de esta manera se darán cuenta de que el número de líneas de cada color es siempre uno menos que las del color anterior: por ejemplo, en el rosetón de cuatro puntos, habrá tres líneas que salgan del primer punto, dos del segundo y una del tercero.

Es posible que, partiendo de esto, puedan predecir que el número de líneas de un rosetón de cinco puntos será $4 + 3 + 2 + 1 = 10$, aunque quizá prefieran dejar la predicción hasta haber visto más ejemplos. Una vez que hayan hecho la predicción, pídales que la comprueben contando las líneas del rosetón. Después de esto, deberían ser capaces de averiguar la respuesta para rosetones más complicados, cuya fórmula es $(n - 1) + (n - 2) + \ldots 1$, siendo n el número de puntos.

Y a su vez, esta fórmula acabará llevándonos una vez más a los números triangulares, pues los resultados de unos rosetones de dos, tres, cuatro, cinco y seis puntos son 1, 3, 6, 10 y 15, respectivamente. Un rosetón de 12 puntos tendrá 66 líneas, y uno de 20 puntos 190.

Actividades de ampliación

1 Algunos niños pueden descubrir esta relación:

$$\text{número de líneas} = \frac{\text{número de puntos} \times \text{número de puntos menos 1}}{2}$$

Normalmente, a los niños les fascina el ir descubriendo por qué funciona esto así.

Para diez puntos, el total de líneas es $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

9
9
9
9

Agrupando los números así, obtenemos $5 \times 9 = 45$, lo cual coincide con la fórmula.

Para once puntos, un número impar, el resultado sería:

$10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

11
11
11
11
11

Aquí el sistema de agrupación es diferente, aunque nos da $5 \times 11 = 55$, que también coincide con la fórmula.

2 ¿Qué rosetones tienen líneas que se cruzan en el centro, y cuáles tienen espacios en el centro? ¿Qué forma tienen esos espacios?

3 Los diseños de los rosetones pueden llegar a ser muy bonitos. Los niños pueden fabricar sus propias vidrieras basándose en sus rosetones.

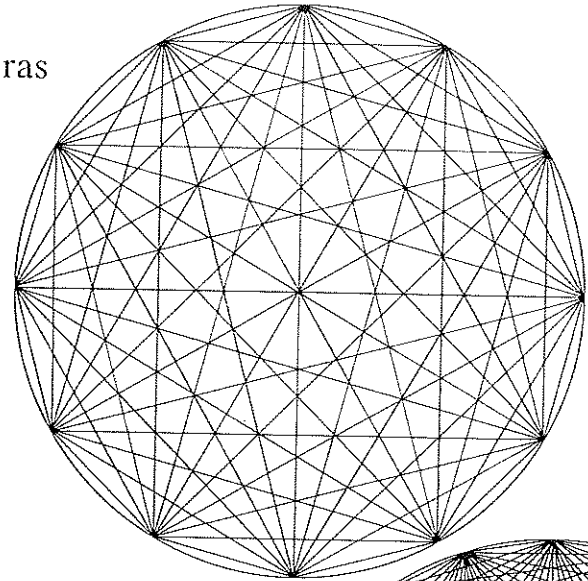
Unidades relacionadas «Dibujos de chinchetas» (Libro 1), «Rutas» y «Semáforos» (Libro 2), «Mirando hacia adelante» (Libro 4).

 Nombre

16 El rosetón

Qué necesitas: Hojas de Trabajo 5 y 6, lápices de colores.

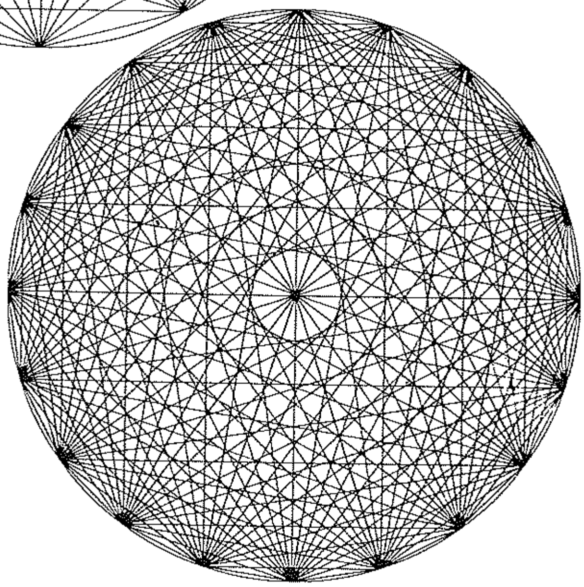
En muchas catedrales encontrarás hermosas vidrieras redondas con extraños dibujos de líneas entrecruzadas. Estas vidrieras se llaman **rosetones**.



Este es un rosetón.

¿Puedes ver cómo se ha dibujado?

Aquí tienes otro.



¿Cuántas líneas se han tenido que dibujar para hacer este rosetón?

Prueba a dibujar unos cuantos rosetones sencillos, utilizando las Hojas de Trabajo. Usa un color diferente para las líneas que salen de cada punto. Luego pon los resultados en esta tabla:

Número de puntos	Número de líneas

¿Se te ocurre alguna manera de averiguar el número de líneas que puede tener un rosetón con cualquier número de puntos?

Calculando fracciones

Equipo Calculadora, papel.

Datos que ayudan a la investigación Notación ordinaria de fracciones, notación decimal de fracciones.

Conocimientos requeridos Uso de la calculadora, estimación.

Conceptos Equivalencia de las fracciones ordinarias, equivalentes decimales, secuencias numéricas, valor según la colocación (valor relativo).

Puntos de enseñanza

Esta actividad combina los que probablemente son los dos conceptos más importantes respecto a las fracciones: la equivalencia y los equivalentes decimales de las fracciones ordinarias. Las calculadoras no sólo han restado importancia al cálculo con fracciones ordinarias, sino que ahora nos permiten investigar las fracciones de una manera más sencilla.

Invierta algún tiempo en la primera parte de la actividad, pidiendo a los niños que averigüen distintas maneras de obtener otras fracciones decimales como 0'25, 0'8 o 0'125. También les puede ayudar a comprender la importancia del valor relativo discutiendo con ellos el hecho de que 0'25 = 25/100, que 0'8 = 8/10, o que 0'125 = 125/1000, dándoles así un punto de partida para descubrir otras equivalencias. Por otra parte, la estimación y la comprobación les pueden ayudar a darse cuenta de que se pueden obtener otros equivalentes multiplicando o dividiendo los números de arriba y de abajo por la misma cantidad. La detección de la «fracción no equivalente» y de las secuencias, sirven para reforzar estas ideas.

Hágales notar que en la calculadora siempre aparece el 0 en la columna de las unidades cuando se trata de fracciones menores que 1, y anímelos a hacer ellos lo mismo.

Actividades de ampliación

Incluya números mayores de 1, como por ejemplo 2'5 = 25/10, 5/2 ... o números mixtos como 2 5/10, 2 1/2, etc.

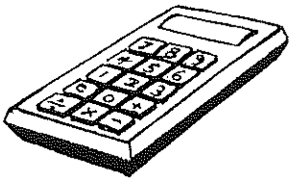
Si invierten las fracciones equivalentes, cambiando entre sí el numerador y el denominador, ¿siguen siendo equivalentes?

La secuencia de la hoja del alumno da como resultado el decimal periódico 0'3333. ¿Qué otros decimales periódicos pueden hallar los niños?

Unidades relacionadas «Puentes de dominó» (Unidad 10), «Calculando sucesiones numéricas» (Unidad 19).

Nombre

17 Calculando fracciones



Qué necesitas: Calculadora, papel.

Hay números que son iguales pero parecen diferentes.

¿Qué tienen en común todas estas fracciones?

$$\frac{6}{8}, \quad \frac{21}{28}, \quad \frac{12}{16}, \quad \frac{9}{12}, \quad \frac{15}{20}, \quad \frac{150}{200}, \quad \frac{300}{400}, \quad \frac{3}{4}, \quad 0'75$$

La respuesta es que ¡todas son la misma!

¿Y cómo lo sabemos?

La clave nos la da la última fracción de la lista, la que parece distinta de las demás: es una **fracción decimal**.

Las fracciones decimales son las que aparecen en las calculadoras.

Para obtener 0'75 en una calculadora, aprieta estas teclas:

$$\boxed{3} \quad \boxed{\div} \quad \boxed{4} \quad \boxed{=}$$

O estas otras:

$$\boxed{6} \quad \boxed{\div} \quad \boxed{8} \quad \boxed{=}$$

Ahora prueba con las demás fracciones de la lista: divide cada vez el número de arriba por el de abajo.

¿Cuál de estas fracciones no es equivalente a las demás?

$$\frac{5}{10}, \quad \frac{9}{18}, \quad \frac{221}{442}, \quad \frac{20}{40}, \quad \frac{23}{46}, \quad \frac{3}{7}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{17}{34}$$

¿Qué fracciones vienen a continuación en esta secuencia?

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{6}, \quad \frac{3}{9}, \quad \frac{4}{12}, \quad \frac{5}{15}, \quad ?, \quad ?$$

Plantea tú otras preguntas que se te ocurran, utilizando la calculadora para ayudarte.

Haz listas de fracciones en las que haya una no equivalente, luego haz una secuencia a la que le falte alguna fracción, y después dale estos problemas a algún amigo tuyo a ver si los sabe resolver, ¡pero déjale usar la calculadora!

El tesoro de Jacko el Cruel

Equipo Cubos adosables.

Datos que ayudan a la investigación Términos: cuadrado, cubo, capas.

Conocimientos requeridos Cuenta de los números de cubos de un paralelepípedo, empleando métodos diversos.

Conceptos Área y volumen, maneras de medir estas, la idea de límite.

Puntos de enseñanza

Se trata de una buena introducción a la unidad «La caja» del libro 4, y se debe realizar antes que esta. Las dos tratan de introducir, pulir o reforzar los conceptos de área y volumen y las maneras en que se pueden medir ambos.

Los niños pueden hacer un cuadrado de 7 × 7 e investigar cuántos cubos lo forman. Si quieren, pueden empezar contando cada cubo individual, aunque en seguida se darán cuenta de que existen otros sistemas más sencillos: siete hileras de siete, o 7 × 7. En este momento, aún están estudiando el área de un cuadrado, pero durante el resto de la investigación estudiarán el volumen de un paralelepípedo, con lo que descubrirán que el área de esta figura se obtiene multiplicando el área de la base por su altura. Pueden usar calculadoras, pero quizá usted prefiera que busquen la manera más sencilla de llevar a cabo cada cálculo que necesiten.

Por ejemplo, una de las medidas de la figura, 6 × 6 × 2, puede considerarse como (6 × 6) × 2 o como 6 × (6 × 2), según resulte más sencillo trabajar con una o con otra. Al abordar el problema de esta manera, se está reforzando además la idea de la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Con los resultados se puede hacer una tabla como esta:

	Longitud	Anchura	Profundidad	Volumen
Primer agujero	7	7	1	49
Segundo agujero	6	6	2	72
Tercer agujero	5	5	3	75
Cuarto agujero	4	4	4	64
Quinto agujero	3	3	5	45
Sexto agujero	2	2	6	24
Séptimo agujero	1	1	7	7

Actividades de ampliación

1 El primer hoyo también puede ser un rectángulo que mida, por ejemplo, 8 × 6 cofres. ¿Sería mejor empezar así?

2 Investiga distintas maneras para encajar exactamente 80 cofres en un hoyo.

3 Con los resultados se puede hacer un gráfico de barras, que servirá para ilustrar la subida hasta el límite en cada caso, y la caída posterior.

Unidades relacionadas «Estructuras de cubos» (Libro 1), «La caja» (Libro 4).

 Nombre ______

18 El tesoro de Jacko el Cruel

Qué necesitas: Unos cuantos cubos adosables.

¡El pirata Jacko el Cruel y el resto de su tripulación tenían que trabajar a toda prisa! Habían atacado un barco del rey, el *Furia,* y habían robado nada menos que 80 cofres en forma de cubo. Ahora, tenían que enterrarlos para que nadie los encontrara, hasta que pudieran sacarlos y repartir el botín tranquilamente. Pero tenían un problema: la Isla del Tesoro estaba llena de palmeras, y era muy difícil encontrar un sitio donde enterrarlos todos juntos. Por fin encontraron un claro.

Excavaron un cuadrado en el que cabían 7 cofres de largo por 7 de ancho. ¿Cuántos cofres podrían meter en ese hoyo?

(Haz un cuadrado de 7 cubos de largo por 7 de ancho: eso te servirá de ayuda.) ______ cofres.

Pero el hoyo no era lo bastante grande, así que excavaron más hondo, para que cupieran en él 2 capas de cofres.

«¡Magnífico!» dijo Jacko el Cruel, ¡pero en ese momento la arena de los lados se derrumbó! Ahora en el hoyo sólo cabían 6 cofres de ancho por 6 de largo, y 2 de profundidad.

¿Cuántos cofres podían meter ahora en el hoyo? ______ cofres.

Así fueron excavando cada vez más hondo, pero cada vez que excavaban lo suficiente para poner una capa más, la arena se les derrumbaba, y cada vez que se les derrumbaba la arena, en el hoyo cabía un cofre menos de ancho y otro de largo.

¿Podrán tener alguna vez un hoyo lo suficientemente profundo como para meter dentro los 80 cofres?

¿Cuál es el máximo de cofres que podrán meter?

Calculando sucesiones numéricas

Equipo Una calculadora para cada niño, papel para trabajar en él.

Conocimientos requeridos Uso de la calculadora, en particular de la función reiterativa, confección de secuencias numéricas.

Conceptos Multiplicación como suma repetida, potencias de números a través de la multiplicación repetida, noción de secuencia.

Puntos de enseñanza

Esta actividad está pensada para desarrollar la conciencia del niño respecto a las secuencias, para que se dé cuenta de que la multiplicación es un tipo de secuencia que se obtiene repitiendo una suma, y para darle una práctica general en el uso de la calculadora. Normalmente no se aprecia la función reiterativa de una calculadora simple, y sin embargo se trata de un mecanismo sumamente útil, sobre todo cuando se utiliza para hallar potencias de números. Pero que no usen una calculadora científica, porque no funcionan de la misma manera.

Merece la pena perder un poco de tiempo en el ejercicio inicial, estudiando cómo construir otras tablas. Una de las maneras de ayudar al niño a hacerlo, consiste en hacerle predecir el siguiente número de la secuencia, y comprobarlo después con la técnica explicada.

Estudiando otras secuencias, los niños podrán darse cuenta de que cuando hay una diferencia fija entre los números sucesivos, la secuencia se obtiene por medio de una suma repetida. Así, en el ejemplo 2, 7, 12 el procedimiento más sencillo es:

$\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$
$\boxed{=}$
etc. $\boxed{=}$

Si la diferencia aumenta cada vez, entonces, por lo general, la secuencia se obtiene por medio de una multiplicación repetida. Así, el ejemplo 2, 4, 8 se podría intentar obtener de la siguiente manera:

$\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$
$\boxed{=}$
etc.

Hágales notar que el método anterior no sirve porque en la multiplicación el operador es el primer número, no el segundo. Se puede animar a los niños a que discutan sobre esto mientras lo investigan:

$\boxed{1}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$
$\boxed{=}$
etc.

Actividades de ampliación

1 ¿Cómo podemos obtener esta secuencia: 25, 20, 15, 10, y cómo continúa? ¿Se detiene en 0 o podemos continuar? (Este es un sistema bastante útil para introducir los números negativos.)
¿Y esta otra: 28, 23, 18...? ¿Qué números negativos obtendremos si la continuamos? Discuta con ellos la secuencia siguiendo una línea numérica que se extienda hasta los números negativos.

2 ¿Y esta otra: 81, 27, 9, 3...? ¿Cómo continúa? Aquí se introducen los decimales periódicos. ¿Cuáles son sus equivalentes fraccionales?
(Por ejemplo, 0'333 = 1/3, etc.).

Unidades relacionadas «Averigua el número» (Unidad 12), «Márcalo» (Libro 1).

Nombre

19 Calculando sucesiones numéricas

Qué necesitas: Una calculadora y una hoja de papel.

Con una calculadora puedes formar la tabla del 3 apretando estas teclas por orden:

[1] [×] [3] [=]

[2] [×] [3] [=]

[3] [×] [3] [=] etc.

Pero también la puedes formar con un sistema mucho más fácil, como este:

[0] [+] [3] [=]

[+] [3] [=]

[+] [3] [=] etc.

Prueba a ver si funciona.

¡Y hay otro sistema aún más sencillo!

[0] [+] [3] [=]

[=]

[=] etc.

Pruébalo también, y prueba a hacer más tablas con este mismo sistema.

¿Cuál es la manera más sencilla de hacer estas secuencias numéricas?

2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42

y

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128

¿Qué número viene a continuación?

Prueba a hacer más secuencias con el sistema más fácil posible.

El número mágico

Equipo Papel, lápiz, calculadora.

Datos que ayudan a la investigación Suma y resta de números de tres dígitos, números reversos (escritos en orden contrario).

Conocimientos requeridos Cálculo (suma/resta), seguimiento de reglas.

Conceptos Valor según la colocación, secuencias numéricas.

Puntos de enseñanza

El resultado 1089 se puede garantizar si los tres dígitos escogidos son números diferentes. Los niños se encontrarán con que algunos números, como el 546, les dan una diferencia de 99, es decir:

$$\begin{array}{r} 645 \\ -546 \\ \hline 99 \end{array}$$

Si se mira este número como si fuera de tres dígitos (es decir, 099), y si se le da la vuelta y se suma al primer número, entonces aparece el número mágico:

$$\begin{array}{r} 099 \\ 990 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Los niños descubrirán también que cuando se da la vuelta y se resta a los números de dígitos idénticos (por ejemplo, 222) o a los números capicúas (como 343 o 595) el resultado es cero. En cuanto a los números de cuatro cifras y distintos dígitos, el resultado será 10890.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 5423 \\ 3245 \\ \hline 2178 \\ 8712 \\ \hline 10890 \end{array}$$

Los números de cinco cifras dan el 108900, y así sucesivamente.

Anime a los niños a que predigan, discutan y comprueben.

Hágales notar esto: $1089 \times 9 = 9801$ (es decir, los dígitos al revés). ¿Sucede lo mismo con 10989×9, 109989×9, etc.?

Aparte de éste, el único número de cuatro dígitos o menos cuyo reverso es un múltiplo de sí mismo es el 2178, que es igual a 2×1089.

Actividades de ampliación

1 A los niños les fascinan los conjuntos de instrucciones tales como:

Piensa un número	(el 12) Esto les puede llevar al álgebra elemental:	n
Súmale 10	(22)	$n + 10$
Réstale 6	(16)	$n + 10 - 6 = n + 4$
Multiplícalo por 2	(32)	$2n + 8$
Réstale 4	(28)	$2n + 8 - 4 = 2n + 4$
Divídelo por 2	(14)	$(2n + 4)/2 = n + 2$
Réstale 2	(12)	$n + 2 - 2 = n$

Esta secuencia vuelve siempre al número original.

O «Piensa un número» (por ejemplo, el 8). «Multiplícalo por 2» (16). «Réstale 8» (28). «Divídelo por 2» (14). «Réstale el número original» (8). Esta secuencia siempre da como resultado el 6.

2 Que recojan, investiguen e inventen conjuntos de instrucciones que empiecen con «Piensa un número».

3 Que investiguen las *constantes de Kaprekar* tal como sigue:

Elige cualquier número de cuatro dígitos, por ejemplo	4281
Ordénalos de mayor a menor	8421
Dale la vuelta	1248
Réstalo	7173

Hazlo otra vez $\begin{array}{r} 7731 \\ 1377 \\ \hline 6354 \end{array}$ y otra $\begin{array}{r} 6543 \\ 3456 \\ \hline 3087 \end{array}$ y otra $\begin{array}{r} 8730 \\ 0378 \\ \hline 8352 \end{array}$ y otra $\begin{array}{r} 8532 \\ 2358 \\ \hline 6174 \end{array}$ y otra $\begin{array}{r} 7641 \\ 1467 \\ \hline 6174 \end{array}$

¡Siempre termina dando 6174! Este número es la constante de Kaprekar. ¿Terminan todos los números de cuatro dígitos en 6174? ¿Y los de tres dígitos?

Unidades relacionadas «Tríos» (Libro 2), «Palíndromos» (Libro 4).

Nombre

20 El número mágico

Qué necesitas: Papel, lápiz y calculadora.

Para encontrar el número mágico debes seguir estas reglas:

1 Piensa un número de tres cifras.

2 Dale la vuelta y resta el menor del mayor.

3 Dale la vuelta a la solución, y súmala al número de la solución anterior.

4 Escribe la solución final.

Por ejemplo, si escogemos el 426, su reverso es	624
si restamos	426
	198
Se da la vuelta y se suma	891
Solución final	?

Prueba con otros números. Escribe lo que has descubierto.

¿Sigue el número 546 la misma regla?

¿Puedes descubrir algún número de tres dígitos que no dé la solución esperada?

Prueba ahora con números de cuatro cifras. ¿Qué números de partida dan qué soluciones?

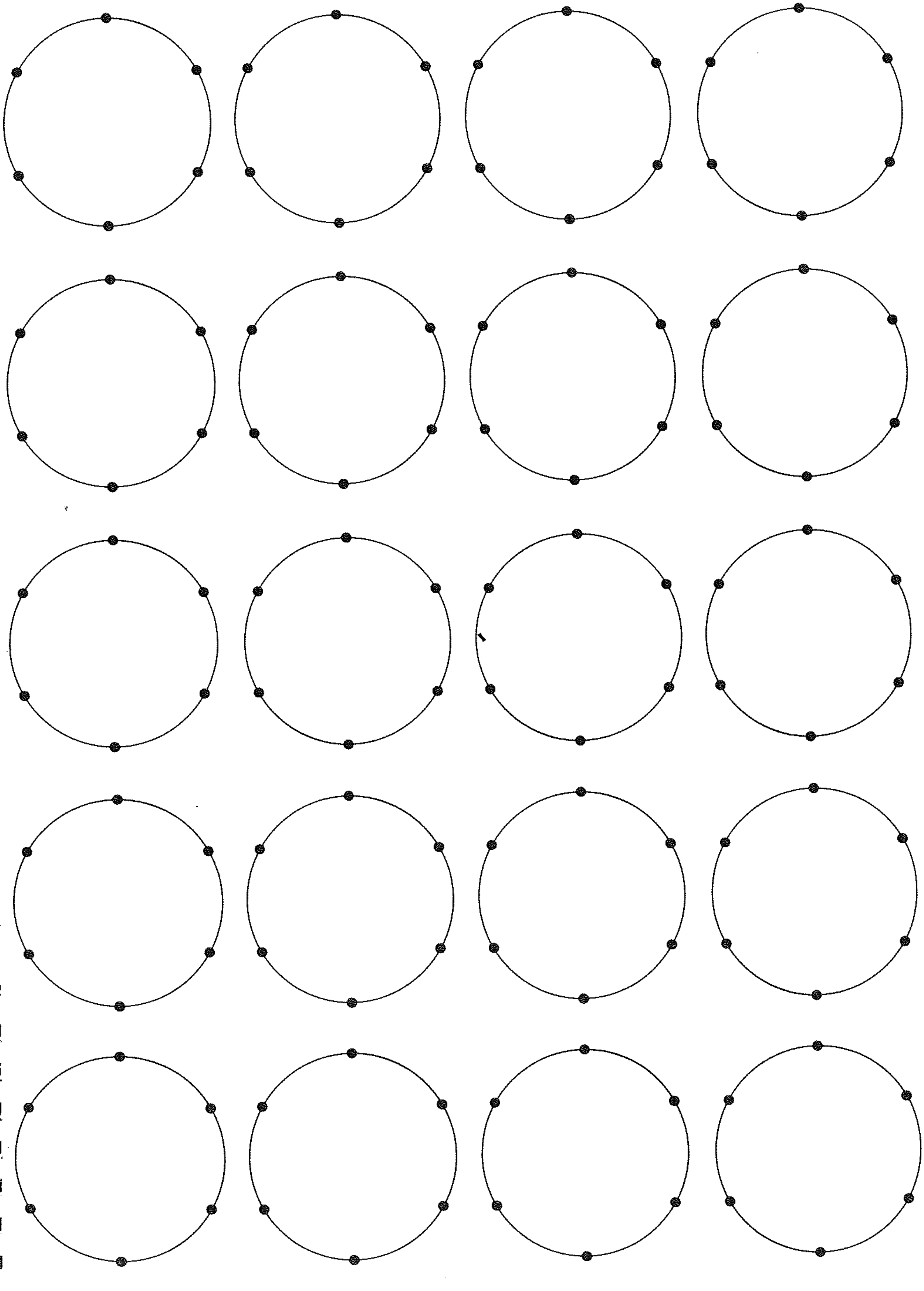
Tabla de notas

Esta tabla se puede utilizar para ir anotando la fecha en que cada alumno termina cada actividad

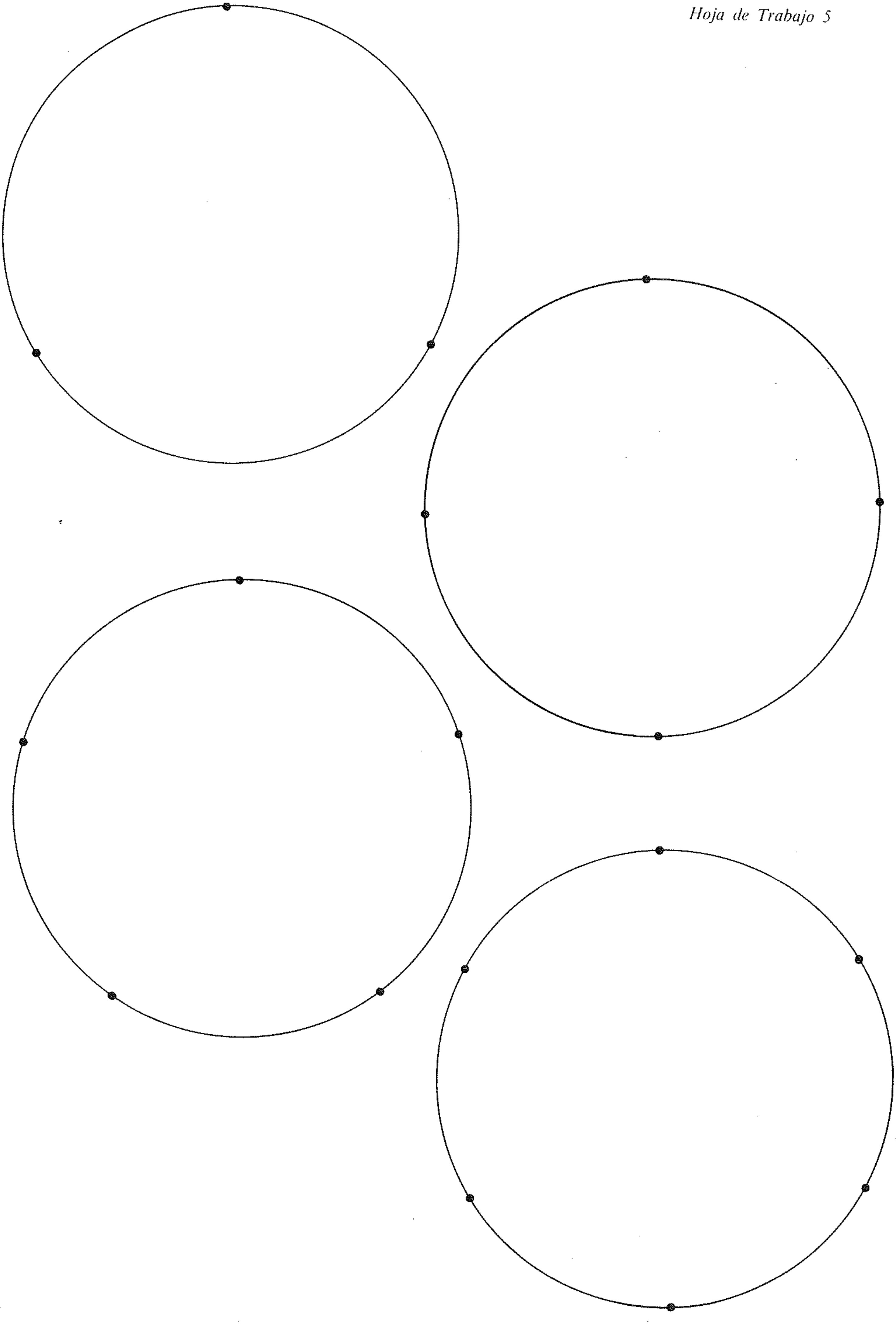
Nombre del alumno																	
1 Copos de nieve																	
2 Huevos en una cesta																	
3 ¿Cuántos lados?																	
4 Dardos																	
5 Cuenta los cuadrados																	
6 Pésalo																	
7 Bombardeo																	
8 Prueba tu suerte																	
9 Diseños circulares																	
10 Puentes de dominó																	
11 De compras																	
12 Averigua el número																	
13 ¿Dentro o fuera?																	
14 Números chinos																	
15 Cuartos curvados																	
16 El rosetón																	
17 Calculando fracciones																	
18 El tesoro de Jacko el Cruel																	
19 Calculando sucesiones numéricas																	
20 El número mágico																	

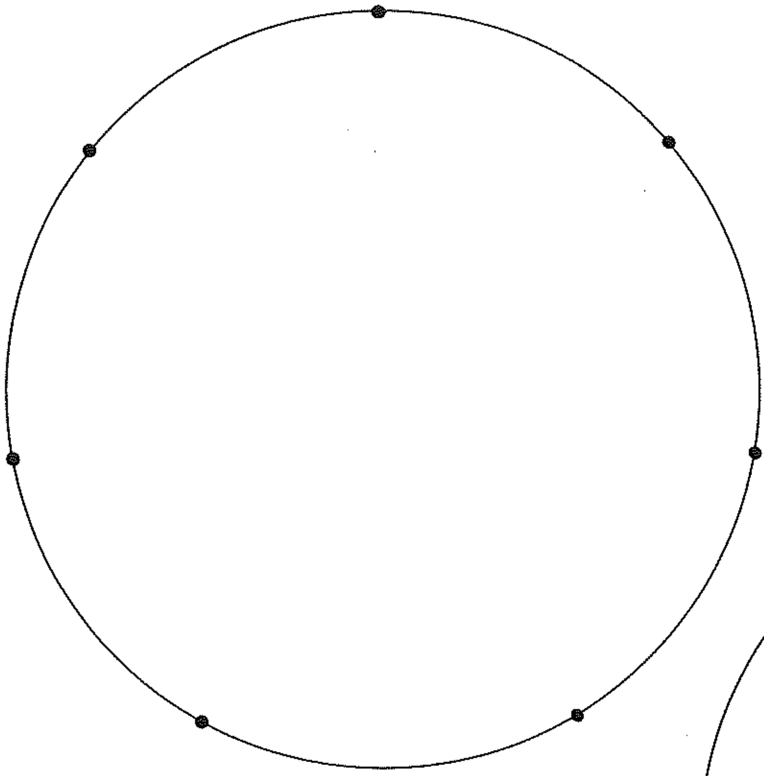
Hoja de Trabajo 2

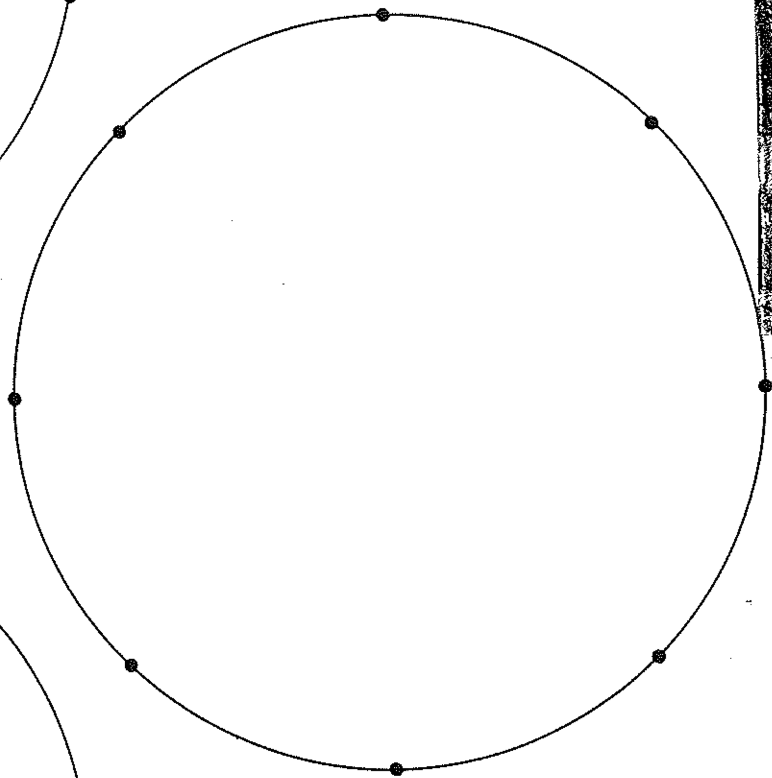
Hoja de Trabajo 3

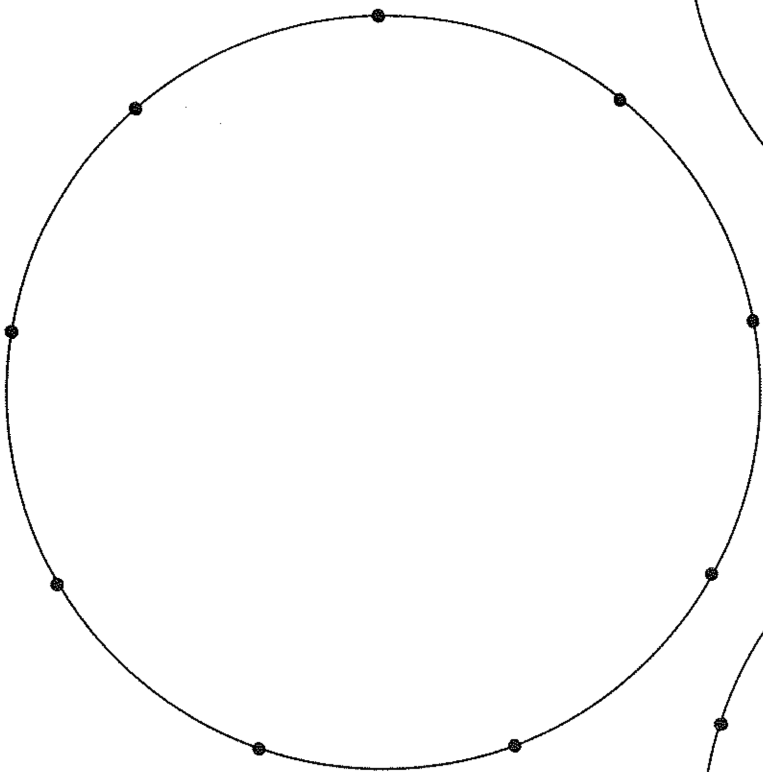


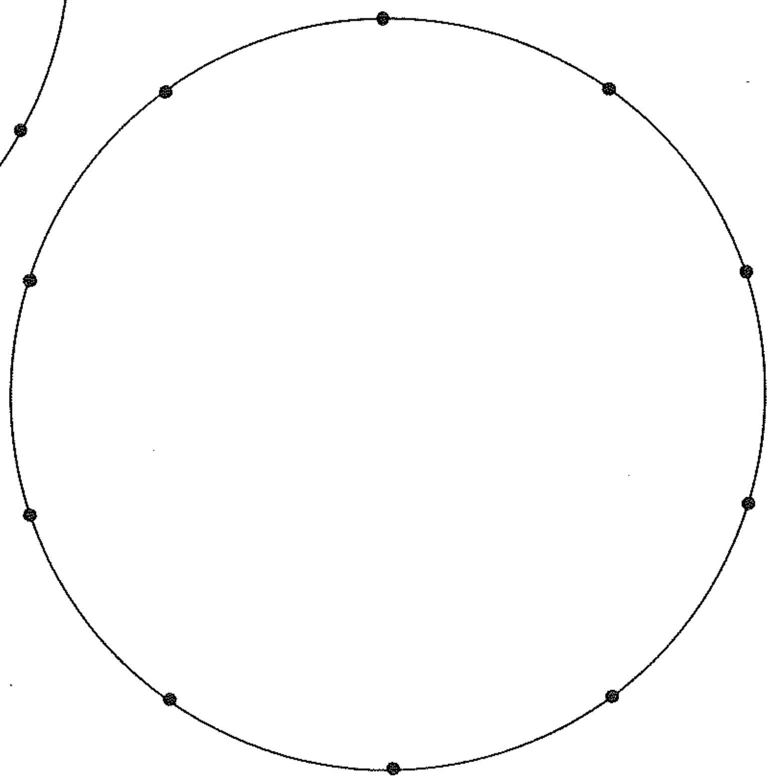
Hoja de Trabajo 4











MATERIAL FOTOCOPIABLE

Investigando las Matemáticas

LIBRO 3

Investigando las matemáticas es una recopilación de estimulantes desafíos en dicha ciencia. La serie utiliza interesantes juegos y problemas para introducir conceptos y técnicas de resolución que se pueden ir ampliando progresivamente para llevar al niño a unos niveles de abstracción cada vez mayores. Cada actividad se presenta con un formato bien estudiado, con las notas para el profesor junto a las hojas del alumno, y todas se pueden fotocopiar para su uso, bien de manera individual, bien en grupo o en clase. **Investigando las matemáticas** propone unos trabajos flexibles que incluyen una tabla resumen donde se muestra cómo encaja cada unidad en la estructura general del conocimiento matemático.

ISBN 84-7600-580-6

9 788476 005804