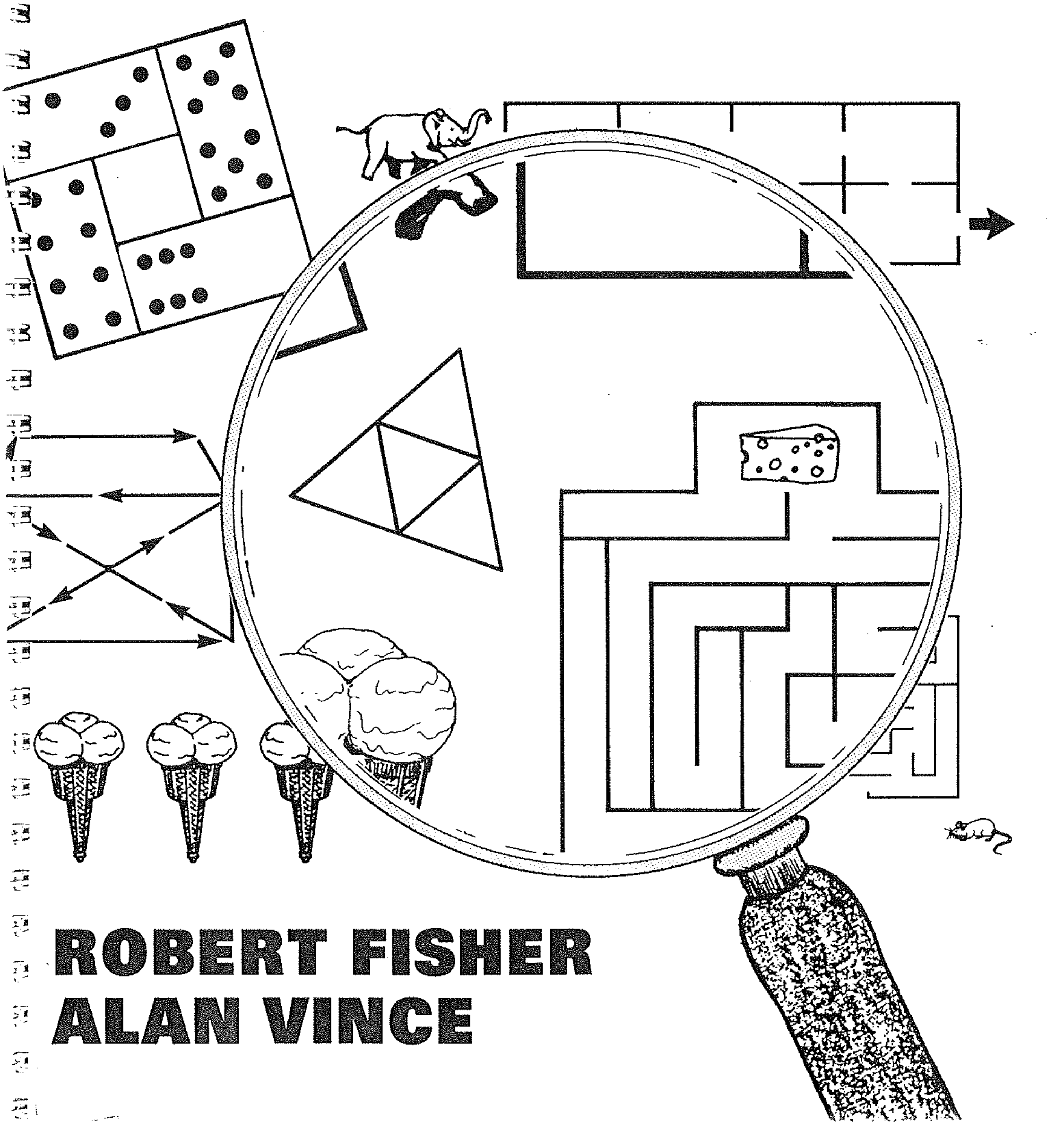
MATERIAL FOTOCOPIABLE

Investigando las Matemáticas

LIBRO 4

AKAL



ROBERT FISHER
ALAN VINCE

75

Investigando las Matemáticas

LIBRO 4

Robert Fisher
Alan Vince

TRADUCCIÓN
Montserrat Tiana Ferrer

AKAL

Título original: *Investigating Maths, book 4*

Los Berrocales del Jarama
Apdo. 400 - Torrejón de Ardoz
Teléfs.: (91) 656 56 11 - 656 49 11
Fax: 656 49 95
Madrid-ESPAÑA
ISBN: 84-7600-577-6
Depósito legal: M-13168-1990
Impreso en ORYMU, S. A. Pinto (Madrid)

Contenido

Introducción

Investigando las matemáticas consiste en una colección de actividades de investigación y resolución de problemas destinadas a los centros de educación básica.

- Los libros 1 y 2 están destinados a niños entre 6 y 10 años.
- Los libros 3 y 4 están destinados a niños entre 8 y 12 años.

Además, las actividades planteadas son adecuadas a niños de distintas edades y conocimientos.

La selección para cada libro se ha realizado basándose en: a) el plan cíclico en el que los mismos conceptos se van revisando en un grado mayor de abstracción cada vez; b) la necesidad de introducir, en los libros 1 y 2, tanto los conceptos como las técnicas de investigación y resolución de problemas necesarios para realizar las actividades de los libros 3 y 4.

En cada libro hay 20 unidades o temas, y cada unidad consta de dos páginas, una página de notas para el profesor y una hoja de trabajo para el alumno, que se puede fotocopiar. Cada unidad presenta una serie de retos sin límite preciso para que el niño los resuelva, y que son adecuados para el trabajo tanto individual como en grupo o de clase. Las unidades, cuidadosamente seleccionadas y previamente probadas en clase para enfrentar al alumno con una serie de desafíos matemáticos, introduciéndole a la vez una serie de conceptos que ampliarán su conocimiento. Al principio del libro se incluye una tabla que muestra cómo encajan las distintas unidades en el conocimiento matemático, y al final hay otra tabla en blanco para uso del profesor, así como una serie de hojas de trabajo que se pueden fotocopiar para uso de los alumnos.

El esquema de *Investigando las matemáticas* ha sido diseñado para complementar y enriquecer cualquier plan de estudio escolar, y las actividades que aquí se sugieren se pueden variar para adaptarlas tanto al estilo de cada profesor como a las necesidades de cada alumno. Así, la serie completa forma un plan flexible que:

- proporciona una gran fuente de estimulantes actividades matemáticas,
- permite que los alumnos realicen investigaciones por su cuenta,
- se puede adaptar al trabajo en grupo sobre un tema en particular,
- sugiere ideas y puntos de partida para preparar una clase y
- se puede adaptar a cualquier esquema general.

Además, cada unidad proporciona un estímulo para ampliar el estudio de las matemáticas. En las notas del profesor se describe el *equipo* que se debe utilizar, los *datos*, los *conocimientos requeridos* y los *conceptos* necesarios para cada unidad, los *puntos de enseñanza* para el profesor y distintas maneras de *ampliar la investigación*. Además, bajo el apartado de *unidades relacionadas* aparecen en cada unidad referencias a otras que pueden suponer un complemento, una continuidad o una ampliación de la unidad en cuestión. Por otra parte, las actividades se pueden desarrollar de diversas maneras para proporcionar experiencia matemática a distintos niveles.

Intención y objetivos de las actividades

Cada actividad de *Investigando las matemáticas* está especialmente pensada para ayudar al niño a desarrollar sus conocimientos prácticos, a comprender los distintos conceptos y a idear estrategias de investigación. Las notas del profesor dan detalles específicos de cómo conseguir esto en cada unidad, y también, bajo el encabezamiento de **Datos que ayudan a la investigación**, dan una lista de los conocimientos que debe poseer el niño para poder llevar a cabo la actividad en cuestión.

- Los **conocimientos requeridos** son las operaciones básicas y las rutinas que hay que ensayar y poner en práctica para cada investigación, como por ejemplo los procesos de cálculo, el uso de calculadoras, las mediciones y el conocimiento de las estrategias de investigación y resolución de problemas.
- Los **conceptos** son los principios que se ocultan bajo los datos y los conocimientos requeridos, y que muestran cómo se relacionan estos; por ejemplo, la equivalencia, la conservación, la abstracción de progresiones, la simbolización y la generalización.
- Las **estrategias** son los planes de aproximación a los problemas y las investigaciones; por ejemplo, el cálculo, los métodos de prueba y error, la simplificación de tareas difíciles, la búsqueda de un esquema, el razonamiento, la formulación de hipótesis y su comprobación.
- Las **cualidades personales** se van desarrollando por medio de este trabajo de investigación; por ejemplo, el carácter imaginativo, sistemático, independiente, cooperador, perseverante, juguetón o creativo; con él se demuestran también las actitudes positivas que ayudan al aprendizaje.

Las calculadoras

Las calculadoras son muchas veces necesarias para facilitar las estrategias de investigación. Por ejemplo, para predecir resultados, puede hacer falta extender progresiones de números, lo que requiere un cierto número de cálculos, cálculos que no son más que herramientas para ayudar a la investigación. Y el concentrarse en el método y la práctica del cálculo puede distraer la atención del desarrollo de la estrategia de resolución de un problema determinado. Por tanto, recomendamos el uso de calculadoras para ayudar a eliminar las posibles barreras que impidan el libre fluir de las ideas y la comprobación de las distintas estrategias. Con la calculadora más sencilla es más que suficiente, y para manejarla se necesitan unos conocimientos mínimos. Además, las calculadoras pueden proporcionar al niño un medio de explorar su propio pensamiento matemático, y precisamente algunas de las actividades se han diseñado teniendo esto en cuenta.

Los problemas y la investigación

Investigando las matemáticas contiene problemas y actividades de investigación. Pero los términos «investigación» y «problema» a veces se usan con mucha libertad. En este caso, los problemas suelen tener un objetivo concreto: hay un obstáculo, o una serie de obstáculos, que impiden que ese objetivo se alcance inmediatamente, y el niño, para resolver el problema, debe probar toda una gama de estrategias, muchas de las cuales implican una investigación. En efecto, la investigación es un proceso que incluye una serie de discusiones y trabajos prácticos, que se pueden utilizar para resolver problemas.

Muchas veces, las investigaciones no tienen un objetivo obvio ni inmediato, sino que se limitan a dar una serie de resultados que pueden variar según el camino que se haya tomado. Así, la investigación puede estar estrechamente ligada al concepto de «juego», y en cierto modo es similar, ya que también sigue una estructura delimitada por una serie de reglas y materiales. Muchas de las investigaciones no tienen un límite preciso, sino que están abiertas a toda una gama de interpretaciones creativas, mientras que otras, como los problemas, están «cerradas» en el sentido de que tienen una solución o un objetivo específico; sin embargo, el proceso seguido para llegar a ese objetivo puede ser abierto, y una vez que se llega a una solución se pueden seguir muchos otros caminos que la amplíen. El ampliar la investigación original puede llevar al planteamiento de nuevas cuestiones, nuevos problemas y nuevas vías de exploración.

El esquema que reproducimos a continuación ofrece una idea del proceso de aprendizaje, y en cada uno de sus pasos el alumno puede intervenir activamente.

estímulo → investigación → problemas → ampliación de la investigación
diversidad de conclusiones ← nuevos problemas ← nuevas investigaciones

El uso del libro

El libro se puede utilizar para trabajo individual, en grupo o de clase. Sin embargo, se use como se use, tiene que quedar bien claro que las hojas de trabajo para el alumno sólo son un punto de partida para la investigación matemática: cada actividad se puede desarrollar en distintas direcciones y a distintos niveles, y en las notas del profesor se indica la manera de conseguir este objetivo.

Por otra parte, las hojas de trabajo no marcan un esquema que haya que seguir al pie de la letra, sino que se limitan a ofrecer un estímulo al niño para que este desarrolle sus propias líneas de investigación con la ayuda, por supuesto, del profesor y del resto del grupo. Lo bueno de esta manera de trabajar es que se desafía al niño a desarrollar por sí mismo una serie de estrategias y procesos matemáticos.

Estos son los pasos que se deben seguir para llevar a cabo un trabajo de investigación.

- **Entrada:** el esfuerzo inicial para llevar a cabo la tarea, ya sea individualmente o en grupo. Hay algunos niños que necesitan ver a otros trabajando para ponerse ellos mismos. En este punto se pueden preguntar cosas como: «¿Qué estás investigando?», «¿Dime qué estás haciendo?», «¿Qué vas a hacer a continuación?» Y recuerde, el estar sentado pensando, dándole vueltas a las cosas, no es una pérdida de tiempo, sino que es algo vital para el proceso de aprendizaje.
- **Ataque:** abordar el problema, anotar las ideas, buscar esquemas y relaciones, aventurar qué sucederá a continuación, probar con diversos métodos utilizando aparatos, diagramas, dibujos y palabras. Las preguntas pueden ser: «¿Cómo vas a tomar nota de lo que descubras?», «¿Qué opinas de esto?», y «¿Por qué tienes esa opinión?».
- **Revisión:** comprobar la teoría, predecir el resultado y luego comprobarlo. Preguntas: «¿Sirve ese resultado?... ¿Por qué no?», «¿Qué crees que pasaría si...?», «¿Puedes explicarnos cómo lo has hecho?»
- **Ampliación:** desarrollo posterior de la investigación, exploración de otros problemas que puedan surgir, planteamiento de nuevos problemas. Preguntas: «¿Puedes probar con un sistema diferente?», «¿Qué podrías cambiar?», «¿Qué has descubierto?»

Ideas importantes a considerar

La investigación debería representar un papel primordial en el estudio de las matemáticas, pero su utilización depende mucho del estilo de cada profesor y de la capacidad de aprendizaje de cada niño. A continuación enumeramos unas cuantas cosas que, como profesores, debemos tener en cuenta al preparar una investigación.

La actitud del profesor

Aprender junto con el niño
Admitir que hay cosas que no sabemos/que podemos cometer errores
Dejar que los niños tomen sus propias decisiones
Intervenir sólo cuando sea necesario
Estimular la colaboración y la discusión
Aceptar una variedad de resultados
Dar tiempo para que «piensen las cosas»
Recompensar a los niños que corren riesgos

Organización del aula

El equipo básico debe estar fácilmente disponible
Hay que dejar que los niños cojan solos lo que necesiten
Distribuir los muebles para facilitar tanto los movimientos como el acceso
Enseñar a los niños a que vuelvan a guardar todo lo que usen
Estimular la discusión planificada
Explicarles cómo anotar los resultados
Que los alumnos sean siempre conscientes del papel del profesor

Cómo ayudar a los niños

Hay que estimular una aproximación sistemática:

- **Estrategias:** la búsqueda de esquemas, la comprobación de ideas, la simplificación de los problemas, el empleo de aparatos, diagramas dibujos, etc.
- **Organización:** hay que animarles a pensar, a colaborar con otros y a comunicarse.
- **Procedimientos de investigación:** hay que reforzar la necesidad de tener en cuenta todos los factores, de tomar nota de todos los resultados y de calcular, predecir y visualizar resultados.

Evaluación de resultados

Hay que establecer un sistema para que tanto el niño como el profesor tomen nota del trabajo realizado, por ejemplo, llevando un informe o un diario. La tabla que aparece al final del libro puede servir de ayuda para fijar los temas que se han estudiado.

En el trabajo de investigación, es inevitable que surjan problemas y decepciones, al igual que se alcanza el éxito y la satisfacción. Como decía Cockcroft: «En la capacidad de resolver problemas es donde reside el corazón de las matemáticas», y reconociendo este desafío y haciéndole frente es como el profesor y los alumnos trabajan juntos en *cooperación* y *apoyo mutuo*, dos de las muchas cualidades que esperamos que se fomenten con la utilización de este libro.

¿Por qué la investigación?

Últimamente en Inglaterra se han elaborado unos cuantos documentos oficiales que han reforzado la necesidad de la investigación en el estudio de las matemáticas. El informe Cockcroft, por ejemplo, decía que el trabajo de investigación tiene una importancia primordial en el desarrollo matemático del niño.

El fragmento más conocido de todo el informe (el párrafo 243) sugería que la enseñanza de las matemáticas a cualquier nivel debía incluir la posibilidad de realizar:

- exposiciones del profesor,
- discusiones de los alumnos tanto con el profesor como entre sí,
- trabajo práctico adecuado,
- consolidación y práctica de los conocimientos y las rutinas fundamentales,
- resolución de problemas, incluida la aplicación de las matemáticas a la vida cotidiana y
- trabajo de investigación.

En el párrafo 250 se discute con más profundidad la importancia del trabajo de investigación, y en el 252 se da uno de los mensajes más importantes:

> Es necesario darse cuenta de que se puede perder gran parte del valor de una investigación si no se someten a discusión sus resultados. Dicha discusión debe incluir la consideración no sólo del método utilizado y de los resultados obtenidos, sino también de las pistas falsas que se han seguido durante la investigación.

Además, la investigación proporciona al niño una serie de oportunidades para participar en discusiones empleando el lenguaje propio de las matemáticas, y esta charla puede ser muy valiosa en sus tres modalidades:

- la charla con uno mismo que procede del pensamiento en voz alta y del esfuerzo por resolver las cuestiones planteadas;
- la discusión con otros en un grupo, explorando ideas, compartiendo pensamientos y sugiriendo nuevas vías de investigación, y
- el diálogo entre el niño y el profesor que estimula el pensamiento, el desarrollo del razonamiento y el examen de las alternativas.

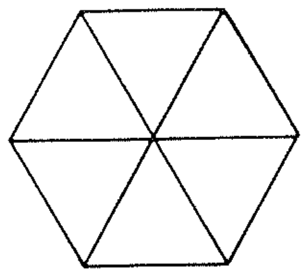
Según el Informe del HMI *Las Matemáticas entre los 5 y los 16:*

> En una aproximación a la investigación los alumnos se ven animados a pensar en estrategias alternativas, a considerar lo que sucedería si siguieran una línea de acción particular, o a ver si unos cambios determinados suponen alguna diferencia en el resultado. De hecho es precisamente por medio de la aproximación a la investigación como surgen las soluciones a los problemas. Por ejemplo, si el problema consiste en encontrar el sistema más económico para empaquetar barras de chocolate de una forma determinada, será necesario investigar distintas posibilidades antes de tomar una decisión.

Los temas propuestos en este libro proporcionan un foco de discusión matemática, a la vez que contribuyen a la formación de una serie de conocimientos y actitudes que se irán ampliando a medida que se avance. Precisamente, uno de los objetivos principales de estas actividades es el desarrollo de una actitud positiva. Hay que darles a los niños oportunidades para que desarrollen un pensamiento independiente y para que ganen confianza en sí mismos y en el trabajo que realizan. Es importante que desarrollen una actitud positiva hacia las matemáticas por medio de una serie de actividades divertidas que les hagan conseguir una serie de éxitos a su nivel. También hay que darles oportunidades para que desarrollen la concentración y la perseverancia a la vez que realizan experimentos y se divierten. En resumen, que los niños deben tener la sensación de que controlan su propio aprendizaje a un nivel adecuado para ellos.

El miedo que muchos niños y muchos adultos sienten hacia las matemáticas, deriva muy a menudo del énfasis que se da a la respuesta «correcta». En el trabajo de investigación se trata de estimular la actitud de «llegar a saber», de probar, experimentar y modificar esas cosas que estamos tratando de comprender y utilizar. El trabajo de investigación permite tanto el planteamiento de problemas como su resolución: «¿Qué dice realmente el problema?», «¿Qué pasa si miramos esto?» Y una vez que se resuelve un problema, surgen nuevas cuestiones: «¿Cuál es el resultado de mi solución?», «¿De qué otra manera puedo hacerlo?» En una situación donde se nos pide que investiguemos una serie de problemas, que planteemos unas cuestiones o que modifiquemos lo que nos han dado, nunca hay solamente una pregunta correcta que formular, sino que hay un número infinito de preguntas. Así, una investigación sin un final cerrado y que lleve consigo el planteamiento de nuevos problemas puede ser más difícil, pero más gratificante que el dar una única respuesta correcta a un problema.

Por ejemplo, mira esta figura:



¿Qué puedes preguntar acerca de ella?
¿Qué problemas puedes plantear o investigar?
(¿Se trata de seis triángulos equiláteros?, ¿de un hexágono?, ¿de una tienda vista desde arriba?, ¿qué dimensiones tiene?, ¿es un mosaico?, etc.) El trabajo de investigación se basa en la premisa de que las cosas las comprendemos mejor utilizándolas, jugando con ellas, explorándolas, variándolas... en resumen, haciéndolas nuestras.

El objetivo de *Investigando las matemáticas* consiste en proporcionar a los niños una experiencia rica y amena que incluya los conocimientos y los conceptos adecuados a su capacidad y a sus aptitudes. Las actividades proporcionan oportunidades para estimular tanto el estudio independiente, como la conciencia social del trabajo en colaboración con otros (no sólo con otros niños, sino también con los padres y los profesores). El trabajo de investigación también puede introducir un elemento estético en las matemáticas: la apreciación del orden, de la belleza, del esquema y del diseño de la forma y el número. Estos problemas permiten además la posibilidad de un estudio más profundo de las matemáticas a través de las actividades de ampliación sugeridas en cada unidad; y cada unidad a su vez plantea un desafío que proporciona a los niños el sentimiento de la meta lograda a la vez que amplía su desarrollo conceptual.

Conocimientos requeridos y conceptos																				
Cálculo	✓	✓		✓		✓	✓	✓			✓				✓		✓	✓		
Tablas y diagramas		✓					✓	✓	✓						✓	✓	✓		✓	
Conmutación								✓												
Conservación	✓																			
Contar	✓			✓			✓	✓	✓		✓				✓			✓		
Describir										✓										
Dibujar/doblar							✓	✓	✓	✓				✓			✓	✓	✓	
Estimar	✓	✓				✓	✓						✓							
Seguir las reglas	✓	✓		✓	✓		✓	✓			✓			✓	✓		✓			
Comparación			✓		✓							✓	✓							
Medición		✓				✓							✓							
Notación/empleo de símbolos	✓	✓																		
Valor numérico	✓										✓									
Predicción/comprobación/generalización				✓			✓	✓	✓	✓	✓				✓		✓	✓	✓	
Rotación		✓			✓							✓	✓	✓	✓					
Orientación espacial			✓		✓				✓	✓		✓	✓	✓	✓		✓		✓	
Simetría			✓			✓		✓	✓					✓	✓	✓				
Formación de mosaicos														✓						

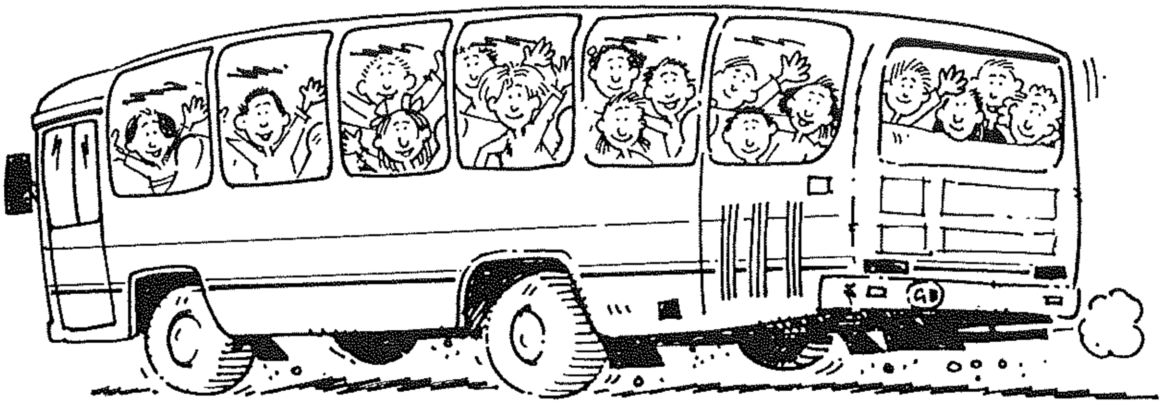
Tabla de resumen Libro 4

Temas	Área	Peso	Volumen	Longitud	Dinero	Tiempo	Número	esquemas	fracciones	Formas planas	Cuerpos sólidos	Ángulos	Rutas	Probabilidades	Lógica
La excursión del colegio					✓		✓								
Las agujas del reloj						✓	✓	✓	✓	✓		✓			
El huevo de tangram										✓		✓			
Columnas de números							✓	✓							
Cubos de soma			✓								✓				
Todo alrededor	✓						✓			✓	✓				
Tres y un poco										✓					✓
Diagonales															
Braille				✓			✓	✓							
Las franjas de Möbius							✓			✓					
Palíndromos							✓	✓	✓						
Cuadrados de colores	✓								✓			✓			✓
Figuras de áreas	✓									✓		✓			
Dibujos islámicos										✓		✓			
Esquemas de cuadrados en espiral	✓							✓	✓						
Mirando hacia adelante							✓	✓							✓
Los rectángulos áureos				✓				✓		✓					
La caja	✓		✓							✓	✓				
Los policías miopes															✓
La competición de los ceros y las cruce															

Nombre

1 La excursión del colegio

Qué necesitas: Una calculadora, papel, lápiz.



1 El colegio ha organizado una excursión de tu clase. Vais a ir en autocar a visitar una exposición, y luego vais a montar en barca. Los costes son los siguientes:

Alquiler del autocar	5.690 pts.	por toda la clase
Entrada	45 pts.	cada uno
Paseo en barca	75 pts.	cada uno

En la clase hay 32 niños.

¿Cuánto tendrá que pagar cada uno por la excursión?
¿Qué pasa si alguno no viene?

2 Planead ahora vuestra propia excursión.

Decide a dónde vais a ir, y estima los costes del viaje y otros gastos.

- Averigua cuánto tendrá que pagar cada niño de la clase para cubrir el coste total.
- Haz un horario para el día, indicando la hora de salida, qué actividades vais a tener y la hora de llegada al colegio.
- Dibuja un plano de la ruta.
- Escribe una carta a los padres contándoles todo acerca de la excursión, pidiéndoles permiso para que asista su hijo y diciéndoles el precio.

La excursión del colegio

Equipo Una calculadora para cada niño, papel, lápiz.

Datos que ayudan a la investigación Vocabulario: estimar, gastos, horario.

Conocimientos requeridos Elaboración de planes, computación, estimación y técnicas de cálculo.

Conceptos Estimación del dinero, redondeo hacia arriba y hacia abajo, coste total e individual, valor según la colocación (valor relativo).

Puntos de enseñanza

¿Han ido los niños alguna vez de excursión con el colegio? Para ellos puede suponer una gran ayuda el uso de datos reales a la hora de averiguar una serie de respuestas a cuestiones que les afectan directamente. La calculadora resulta muy útil, y no sólo para que el profesor pueda averiguar el coste por cabeza de la excursión. En realidad, esta unidad presenta el tipo de información que recogería un profesor al planear una excursión.

Los niños pueden entender fácilmente que cada uno tenga que pagar 45 pts. y 75 pts. por dos cosas diferentes, pero no siempre comprenden que haya que *dividir* el precio del autocar. Además, al dividirlo, se llevarán una sorpresa: 5.690 : 32 = 177'8125... ¿Qué cantidad es esta en dinero de verdad? Esto servirá para establecer una discusión sobre el sistema de redondear. Pregúnteles: «¿Redondeamos hacia arriba, a 178 pts., o hacia abajo, a 177?»

Para resolver este problema pueden emplear métodos de prueba y error, o también la calculadora: «Si cada uno paga 177 pts., entonces tenemos 177 × 32 = 5.664» (se acerca bastante). «Pero si cada uno paga 178 pts., entonces tenemos 178 × 32 = 5.696» (se aproxima mucho más).

A los niños les puede servir de ayuda el empezar dando pasos más sencillos, por ejemplo: «Si cada uno paga 100 pts., tendremos 3.200» (no es suficiente). «Y si cada uno paga 200 pts., tendremos 6.400» (es demasiado). La respuesta más aproximada es 178, aunque sobren 6 pts.

Discuta con ellos lo «aproximado» de los resultados, y su respuesta a la pregunta «¿Qué pasa si alguien no viene, quién paga su parte?»

Planear su propia excursión puede servirles para escribir un relato, para representarlo, o para plantear otra serie de problemas. Discuta con ellos todas las posibles opciones.

Actividades de ampliación

Que planeen y estimen el precio, total e individual, de:

1 Una salida para niños pequeños. ¿A dónde podrían ir de excursión? ¿Cuánto costaría la comida, la bebida, el transporte, etc.?
2 Un viaje con el colegio al extranjero. Que recojan folletos, que comparen precios de viajes organizados, que estimen todos los gastos como los transportes al aeropuerto, los seguros y el dinero para gastar.
3 Una comida para la clase o para toda la escuela. Que obtengan una lista de precios del supermercado, o que la preparen ellos, que planeen el menú, y que especifiquen los artículos y estimen los precios.

Unidades relacionadas «De compras» (Libro 3).

Las agujas del reloj

Equipo Una esfera de reloj con agujas móviles, un transportador de ángulos, lápiz.

Datos que ayudan a la investigación Ángulo, grados, transportador.

Conocimientos requeridos Medida de ángulos, uso del transportador, estimación, colocación de los resultados en tablas.

Conceptos Ángulos, progresión, grados, fracciones.

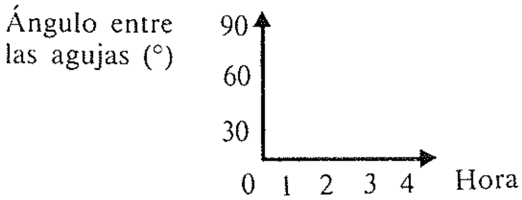
Puntos de enseñanza

Al iniciar esta unidad, los niños deberían haber aprendido ya a medir ángulos y a utilizar un transportador para dibujarlos. ¿Pueden estimar (lo más cerca posible de los 10°) el ángulo de las agujas a la 1 en punto? Si necesitan ayuda, pídales que observen el ángulo 12 → 1 y el diagrama del transportador de la hoja del alumno. Que hagan una estimación, y que luego la comprueben midiendo. Recuérdeles que midan siempre en la *dirección de las agujas del reloj*, utilizando la línea central de las agujas.

La secuencia numérica que se obtiene es la siguiente:

Hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ángulo	30	60	90	120	150	180	150	120	90	60	30	0

El tamaño del ángulo va aumentando en proporciones de 30° hasta las 6 (180°), y a partir de ahí disminuye de 30° en 30° hasta las 12. También se puede hacer un gráfico con los resultados, utilizando estos ejes:



Utilizando el gráfico, los niños pueden estimar otros ángulos y comprobarlos con una esfera y un transportador.

¿Pueden estimar el ángulo de las cinco y cuarto?

Anímelos a probar con otros ángulos que puedan formar las agujas, y que los comprueben con algún compañero.

Actividades de ampliación

1 ¿Cuánto mide la vuelta completa de la aguja, desde las 12 hasta las 12 otra vez? (360° = 180° + 180°)
2 Investiga cuántas vueltas completas da la aguja de los minutos en un día, en una semana, en un mes, en un año, en una década, en un siglo. ¿Cuántos grados representa eso?
3 ¿Cuántas veces al día el ángulo de las agujas es de 180°? ¿Puedes decirnos a qué horas lo hace?
4 Con un transportador de 360°, ¿puedes crear y diseñar tu propia esfera de reloj, con los numerales, los dibujos o los símbolos colocados correctamente?

Unidades relacionadas «Buscando el ángulo recto» (Libro 1), «El maravilloso polígono» (Libro 2).

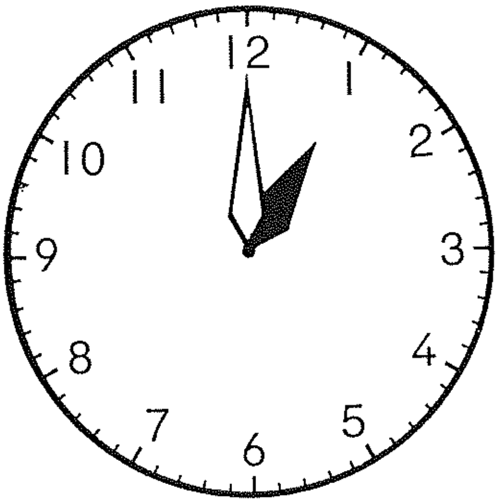
Nombre ______________________

2 Las agujas del reloj

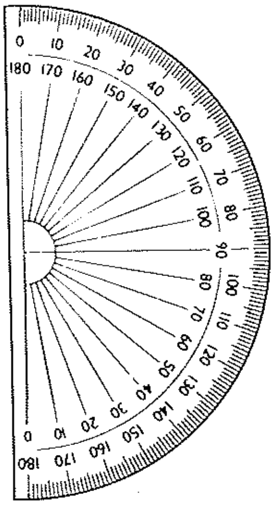
Qué necesitas: Calculadora, transportador, lápiz.

Mira la esfera de un reloj.

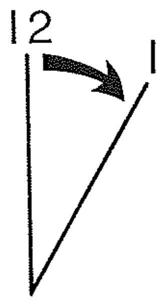
¿Qué ángulo forma la aguja de los minutos con la de las horas cuando es la 1 en punto?



reloj



transportador



ángulo

Siguiendo la dirección de rotación de las agujas, mide el ángulo que forma la aguja de los minutos con la de las horas.
¿De cuántos grados es el ángulo? ______ °

¿Qué ángulo formarían si la aguja de las horas estuviera en las 2?
El ángulo de las 2 en punto es ______ °

Completa esta tabla indicando el ángulo de las agujas a cada hora del día:

Hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ángulo	30											

¿Qué secuencia numérica obtienes? ______________________

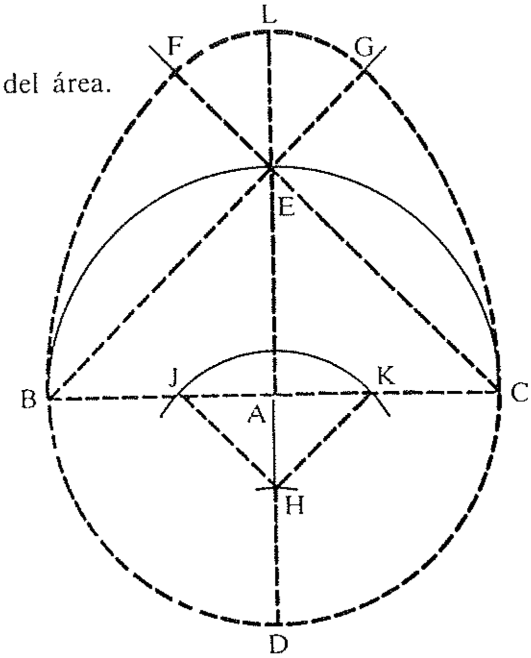
El huevo de tangram

Equipo Tijeras.

Datos que ayudan a la investigación Juegos de tangram.

Conocimientos requeridos Orientación espacial, comparación.

Conceptos Simetría, ángulos, diseño de figuras, conservación del área.



Puntos de enseñanza

Los pasatiempos del tipo tangram son muy populares entre los niños. En forma de huevo existen dos, uno de nueve piezas y otro de doce, aunque los niños un poco más mayores pueden dibujar y recortar sus propias piezas, tal como indicamos a continuación.

1 Dibuja un círculo con un radio de 6 cm. y marca el centro con una A.
2 Traza los diámetros BC y DE, de manera que se crucen en ángulo recto.
3 Une B a E y E a C, y luego alarga estas dos líneas 5 cm. por encima de E.
4 Utilizando B como centro y BC como radio, traza un arco que corte la prolongación de la línea BE en G.
5 Utilizando C como centro y CB como radio, traza un arco que corte la prolongación de la línea CE en F.
6 Con E como centro y EF como radio, traza un arco que una F y G.
7 Mide este mismo radio desde D a lo largo de la línea DA para hallar el punto H.
8 Con ese mismo radio, y con H como centro, traza un arco que cruce la línea BC en J y en K.
9 Alarga la línea AE hasta que corte el arco FG en L.
10 Une H con J y luego H con K.
11 Recorta las piezas por las líneas *de puntos.*

Anime a los niños a clasificar las piezas de todas las maneras posibles, teniendo en cuenta las semejanzas y las diferencias. Sugiérales que elijan una pieza y la describan para que un compañero pueda reconocerla o adivinar de cuál se trata.

Al hacer sus propios diseños de pájaros deben seguir estas reglas:

- Utilizar todas las piezas.
- No superponerlas.
- Que cada una de las piezas quede unida por lo menos a una de las demás.

El diseño completo se puede colocar en un marco con forma de huevo, con las piezas pegadas con cola en sus lugares correspondientes. Las piezas se pueden pegar sobre un papel, con un pegamento ligero, y pintar luego con un aerosol; si a continuación se quitan las piezas, queda un bonito dibujo. También se pueden recortar piezas de papel decorado o papel negro, y pegar sobre un papel blanco, formando así otro tipo de dibujo con el que se pueden decorar las paredes de la clase.

Actividades de ampliación

1 Investiga los juegos tradicionales de tangram.
2 Investiga, colecciona y fabrica tus propios juegos de tangram.

Unidades relacionadas «Cortar el pastel» (Libro 1), «Diseños circulares» (Libro 3).

3 El huevo de tangram

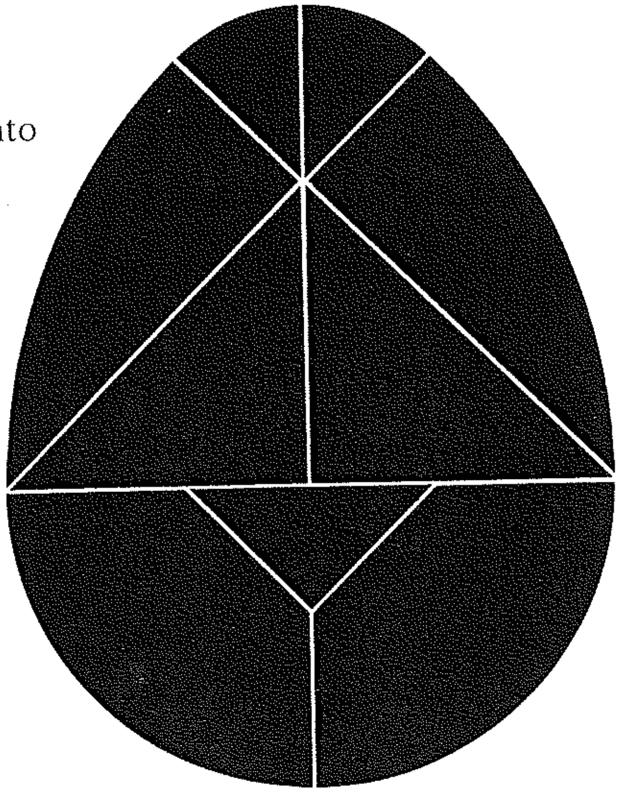
Qué necesitas: Tijeras.

Este antiguo pasatiempo chino se llama el huevo de tangram.

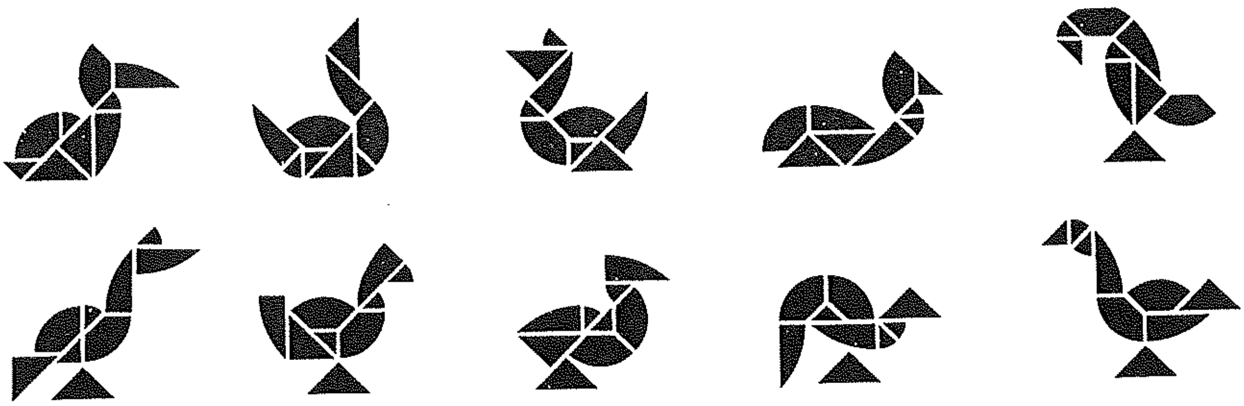
1 Mira estas nueve piezas. ¿En qué se parecen, y en qué se diferencian? ¿Podrías describir cada una de las piezas? Trata de recordar la posición de cada una.

Recorta las piezas.

Ahora vuelve a formar el huevo. ¿Cuánto tardas en hacerlo?



2 Mira estos diseños de pájaros, y luego trata de copiarlos de memoria utilizando tus piezas.



3 Haz tus propios diseños de pájaros.

Columnas de números

Equipo Papel, lápiz, calculadora (opcional).

Datos que ayudan a la investigación Suma, vocabulario: columna, tabla.

Conocimientos requeridos Cómputo, seguimiento de reglas, predicción.

Conceptos Secuencias numéricas.

Puntos de enseñanza

Lo mejor es permitir a los niños que utilicen la calculadora como ayuda para calcular.

1 *Tres columnas* Todos los números de A + A = A, todos los de B + B = C. A partir de esta información, ¿pueden predecir a qué columna pertenecen los números C + C? (B.)

Las columnas que utilizamos terminan arbitrariamente en 26 pero, por supuesto, se pueden ampliar indefinidamente. Asegúrese de que hacen las suficientes comprobaciones de las respuestas. A + B = B, B + C = A. ¿Pueden predecir A + C? (C.)

Se puede discutir sobre la pregunta: «¿qué secuencia obtienes?».

2 *Cinco columnas* Aquí hemos terminado la secuencia en 44, pero se puede ampliar. Se pueden «leer» las columnas de la hoja del alumno, sin necesidad de escribirlas, pero lo mejor es que las escriban, ya que esto les sirve de ayuda para fijar el proceso en su mente, con vistas a investigaciones más profundas. También les puede servir de ayuda que les hagan notar la secuencia de cada columna, por ejemplo: A = 5/10/15..., B = 1/6/11/16..., C = 2/7/12/17... etc. Compruebe si se han fijado preguntándoles:

«¿Veis alguna secuencia en estas columnas?»

Una vez completa, la tabla debería ser así:

	A	B	C	D	E
A	A	B	C	D	E
B	B	C	D	E	A
C	C	D	E	A	B
D	D	E	A	B	C
E	E	A	B	C	D

¿Se dan cuenta los niños de que A + B = B + A, C + D = D + C, etc?

¿Funciona esta misma regla con siete columnas? (Sí, sólo que la tabla de la secuencia es diferente. Todas las columnas entre 2 y 10 dan como resultado secuencias regulares, en base 10.)

Actividades de ampliación

1 Que investiguen la multiplicación en tres, cinco y siete columnas de números. Que se fijen en qué secuencia se obtiene, y que usen la calculadora para comprobar las respuestas. Estimúlelos a realizar predicciones. (Quizá quiera ofrecerles tableros de columnas ya hechas.) Desafíelos preguntando, por ejemplo:

«¿Dónde aparecerá la respuesta, a 44 × 9?»

2 Que investiguen la resta y la división en columnas de números.

Que hagan tablas y predicciones y se desafíen unos a otros.

3 Que investiguen los números pares e impares. Si I quiere decir cualquier número impar, y P cualquier número par, cuál será la paridad de cada una de estas sumas:

I + I = P + P = I + P =

I + I + I= I + I + I + I=

I + I + P + I= I + I + I + I + I=

¿Qué paridad se obtiene si se suma *cualquier* cantidad de números impares: par o impar?

Unidades relacionadas «Palíndromos» (Unidad 11), «Márcalo» (Libro 1), «Tríos» (Libro 2), «El número mágico» (Libro 3).

Nombre ______________________

4 Columnas de números

Qué necesitas: Papel y lápiz.

1 Dibuja tres columnas, y pon en ellas números enteros, colocándolos así, en orden. Márcalas con una A, una B y una C respectivamente.

A	B	C
0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
12	13	14
15	16	17
18	19	20
21	22	23
24	25	26

Suma dos números cualesquiera de la columna A, y anota aquí en qué columna se encuentra la respuesta.
Columna ______
Suma otros dos números de la columna A. ¿La respuesta se encuentra en la misma columna que la anterior?

Ahora suma dos números cualesquiera de la columna B. ¿En cuál se encuentra la respuesta? Columna ______
Suma dos números de la columna C. ¿En qué columna está la respuesta? Columna ______

Prueba a sumar cualquier número de la columna A a cualquiera de la columna B. ¿En qué columna está la respuesta? Columna ______
Suma cualquier número de la columna B a cualquiera de la columna C. ¿En qué columna se encuentra la respuesta? Columna ______

Ahora prueba a sumar cualquier número de la columna A a cualquiera de la columna C. ¿Qué secuencia obtienes?

2 Dibuja cinco columnas, y pon en ellas números enteros colocándolos en orden. Márcalas A, B, C, D y E.

A	B	C	D	E
0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
25	26	27	28	29
30	31	32	33	34
35	36	37	38	39
40	41	42	43	44

Suma cualquier número de la columna C con cualquiera de la columna D. ¿En qué columna está la respuesta? Columna ______
Haz lo mismo varias veces con distintos números. ¿La respuesta está siempre en la misma columna?

Suma cualquier número de cualquier columna con cualquier otro de cualquier otra columna, y ve colocando tus respuestas en una tabla como esta.
¿Funciona la regla si tienes siete columnas de números?
Investiga el número de columnas que hacen falta para que funcione.

	A	B	C	D	E
A					
B					
C				A	
D			A		
E					

Cubos de soma

Notas del profesor

Equipo 27 cubos encajables, o cubos de madera y un adhesivo resistente.

Datos que ayudan a la investigación Figuras de cubos.

Conocimientos requeridos Orientación espacial (tridimensional), comparación, seguimiento de reglas.

Conceptos Cuerpos sólidos, volumen.

Puntos de enseñanza

Los niños siguen el esquema para producir las siete figuras iniciales. Si se unen con cola los cubos, hay que tener cuidado de que los ángulos y las aristas sean los correctos. En cualquier caso, es más fácil usar cubos encajables. Asegúrese de que la reproducción de las figuras que realizan los niños es exacta.

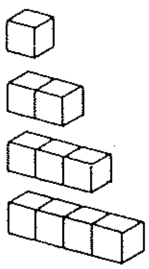
«¿La 6 y la 7 son la misma figura?» (No, pero son simétricas por reflexión.)
Otras preguntas que se pueden plantear:
«¿Cuántos cubos hay en total en el rompecabezas?»
«¿Cuántos cubos hay en tu figura?»
«Si la deshaces, ¿recordarías cómo volver a montarla?»
«¿Eres capaz de crear una figura interesante para que alguien trate de hacerla?»
«¿Puedes dibujar una figura para que otro la copie?»
«¿Podrías describir tu figura para que otro trate de hacerla sin verla?»

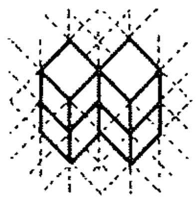
Entre los juegos de clase se puede tener un juego de cubos de soma, junto con un cubo de Rubik y otros rompecabezas de tacto.

Actividades de ampliación

1 Que investiguen los paralelepípedos.

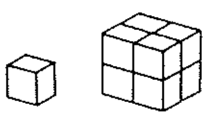
Long. del paralelepípedo	Núm. de cuadrados
1	6
2	?
3	?
4	?





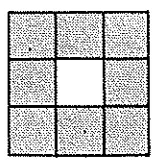
2 Que investiguen el dibujo de cubos, incluyendo los dibujos isométricos.
3 Que investiguen la ampliación de cubos, mostrando el efecto que produce en el volumen el aumentar la longitud de los lados.

Longitud	Número de cubos
1	1
2	8
3	?
4	?



4 Que investiguen diseños de marcos a base de cubos encajables.

Cubos por lado	Cubos que hacen falta	Cubos del interior	Total
3	8	1	9
4			
5			
6			
7			



5 Que investiguen cubos ocultos. Que construyan estructuras que contengan cubos huecos. ¿Cuántos hacen falta para construir un marco alrededor de un cubo hueco, de dos, de tres, etc.?

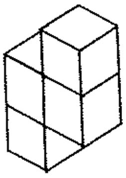
Unidades relacionadas «Figuras de cubos» (Libro 1), «Redes de cuadrados» y «El juego de los dados» (Libro 2).

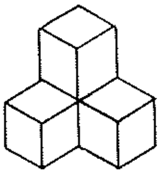
Nombre

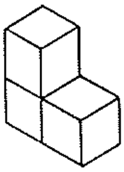
5 Cubos de soma

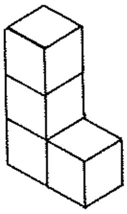
Qué necesitas: Cubos encajables, o cubos de madera y un adhesivo.

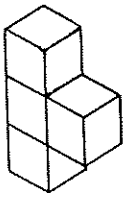
1 Encaja los cubos o pégalos con cuidado para formar estas siete figuras diferentes.

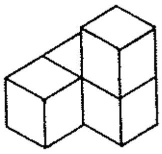

1

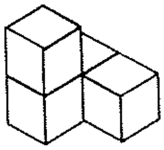

2


3


4

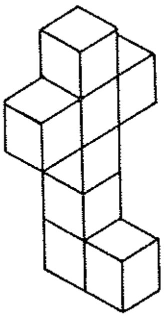

5

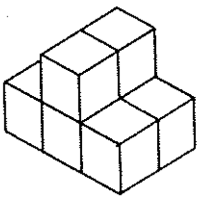

6

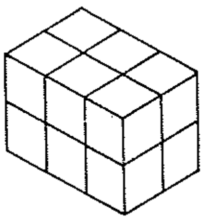

7

Ahora ya tienes todas las piezas de soma que necesitas.

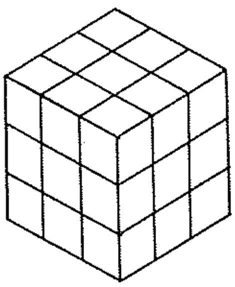
2 Con tus piezas de soma, prueba a hacer estas figuras.

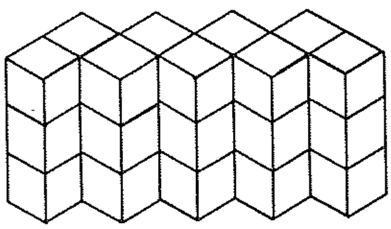

Cruz (dos piezas)


Escaleras (dos piezas)


Ladrillo (tres piezas)

El cubo de soma (siete piezas)




Muralla (tres piezas)

Equipo Varios cilindros de distinto tamaño (latas, etc.), cordel, tijeras, regla, calibradores, calculadora, papel cuadriculado (Hoja de Trabajo 1).

Datos que ayudan a la investigación Términos: diámetro, circunferencia.

Conocimientos requeridos Medida exacta de la longitud utilizando distintos materiales.

Conceptos Relación directa entre el diámetro y la circunferencia de un círculo, maneras de minimizar los errores.

Puntos de enseñanza

Esta actividad debe preceder a la de «Tres y un poco» (Unidad 7), pues las dos se refieren a las relaciones del círculo, aunque aprovechando la oportunidad para emplear una actitud investigadora hacia los conceptos y los métodos.

El diámetro de un cilindro se puede medir de muchas maneras. Se trata de la medida más larga a través de una sección circular, y aunque se puede medir con una regla, por medio del método de prueba y error, es más fácil hacerlo con un calibrador. No obstante, hay que animar a los niños a que discutan y pongan en práctica todas las ideas que se les ocurran. El hecho de que el diámetro sea la línea que cruza el centro de un círculo, puede estimularles a buscar una manera de señalar el centro exacto, quizá con un compás, usando el método de prueba y error.

Para medir la circunferencia se pueden utilizar una serie de métodos. Uno de ellos consiste en marcar un punto en la circunferencia y hacer rodar el cilindro, hasta que haya dado una vuelta completa, y luego medir con una regla la distancia recorrida. Otro, consiste en rodearlo con un cordel y luego medir este con la regla. Se puede mejorar la exactitud dando más de una vuelta con el cordel y dividiendo luego la medida resultante por el número de vueltas (el cordel debe mantenerse siempre en horizontal al rodear el cilindro). Pregúnteles:

«¿Cuántas vueltas tendríamos que dar para que el cálculo fuera más fácil?» (Los errores provocados por la colocación del cordel o por la forma de rosca que adopta el mismo, resultan menores en comparación al realizar medidas más largas.)

El cuadro debería dar como resultado una serie de aproximaciones razonables a π (3'14...). Si tienen acceso a una calculadora en la que aparezca el número π puede pedirles a los niños que vayan pulsando teclas hasta dar con la más cercana al resultado. Explíqueles que se trata de un número tan importante en matemáticas que incluso tiene un símbolo especial.

«Si $c/d = \pi$, entonces $c = \pi d$»; esta es una idea del álgebra más sofisticada de lo que suelen tener los niños de esta edad, pero hay algunos ejemplos, como este:

$$12 : 4 = 3$$
$$\text{así que } 12 = 3 \times 4$$

que pueden ayudarles a comprender la relación.

Actividades de ampliación

π es un número irracional. En la calculadora es 3,1415927, pero esta es sólo una aproximación: los dígitos decimales continúan hasta el infinito. ¿Son capaces los niños de encontrar otros números en los que suceda lo mismo? (Por ejemplo, que expresen $^1/_7$ como decimal.)

¿Qué pasa con la capacidad de un cilindro cuando se multiplica por 2 el diámetro de su sección? ¿Y cuando se multiplica por 3?

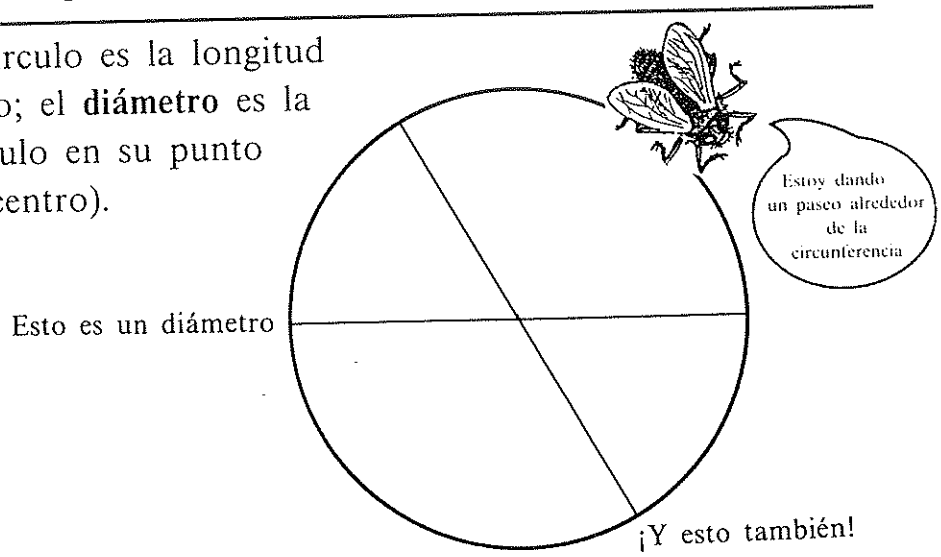
Unidades relacionadas «Tres y un poco» (Unidad 7), «El largo de la cuerda» (Libro 2), «Calculando fracciones» (Libro 3).

Nombre

6 Todo alrededor

Qué necesitas: Varios cilindros (latas, por ejemplo) de distinto tamaño, cordel, tijeras, papel cuadriculado, regla, calculadora.

La **circunferencia** de un círculo es la longitud a todo lo largo del mismo; el **diámetro** es la distancia a través del círculo en su punto más ancho (a través del centro).



Mide la circunferencia y el diámetro de la parte superior de cada una de tus latas, con la mayor exactitud posible. Para ello puedes utilizar cualquiera de los artículos que mencionamos en la parte superior de la página, o cualquier otro objeto que se te ocurra.

Mide varias latas diferentes y escribe los resultados en este cuadro. Cada vez que lo hagas, divide la circunferencia por el diámetro y luego pon también los resultados en la tabla.

Circunferencia	Diámetro	Circunferencia/diámetro

¿Qué ves?

¿Se te ocurre algún sistema para averiguar la circunferencia de cualquier círculo del que conozcas el diámetro?

Tres y un poco

Equipo Calculadora, lápiz.

Datos que ayudan a la investigación Términos: radio, cuadrante.

Conocimientos requeridos Técnicas de cálculo y de deducción.

Conceptos Medida de áreas, concepto de constante.

Puntos de enseñanza

Lo mejor es abordar «Todo alrededor» (Unidad 6) antes que esta, para que los niños hayan conocido el número π. Aquí descubrirán que la aproximación a π es el resultado de todos los ejemplos presentados. Primero tendrán que hallar una regla general que se pueda aplicar en cada caso, volviendo luego su atención al cuadrado que rodea el cuadrante.

Aquí se introduce también el término «radio», así que se puede pensar en el cuadrado exterior como el cuadrado del radio. La discusión es muy importante, pues los niños tendrán que tratar de expresar verbalmente sus descubrimientos, y sus compañeros pueden ayudarles a hacerlo. Puede preguntarles:

«¿Qué has descubierto? ¿Cuál es el sistema más rápido de ponerlo por escrito?» (Por ejemplo:

$\pi =$ área del cuarto de un círculo $\times \dfrac{4}{\text{cuadrado del radio}}$)

Visto de esta manera, y tras plantear preguntas como,

«¿Qué obtenemos si multiplicamos el área de un cuarto de círculo por 4?»

los niños pueden llegar a deducir que $\pi =$ área del círculo/cuadrado del radio.

Para la mayor parte de los niños esta es una expresión que resuelve todos los problemas que se puedan plantear, pero los ejemplos numéricos como el que aparece aquí abajo, pueden ayudarles a deducir la fórmula habitual para hallar el área de un círculo (πr^2), que requiere una capacidad algebraica que va más allá de la experiencia de la mayoría de los niños de esta edad.

$6 = 12 : 2$, así que $12 = 6 \times 2$; $3 = 6 : 2$, etc.; $\pi = \dfrac{\text{area}}{\text{radio}^2}$

así que área $=$ r $\times$ radio^2.

Actividades de ampliación

Ver las notas del profesor de «Todo alrededor».

Unidades relacionadas «Todo alrededor» (Unidad 6), «Chinchetas y áreas» (Libro 2), «Bombardeo» (Libro 3).

Nombre ______________________

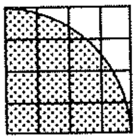
7 Tres y un poco

Qué necesitas: Calculadora, lápiz.

En «Todo alrededor» descubriste un número llamado π que es igual a tres y un poco. Ahora vamos a tratar de hallar π de una manera diferente.

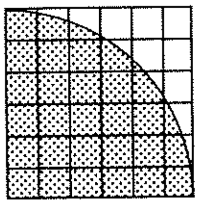
Aquí tienes unos cuantos cuartos de círculo (llamados **cuadrantes**) dentro de cuadrados de distintos tamaños.

¿Cuántos cuadrados pequeños hay dentro del cuadrante de este cuadrado? (Si el cuadrante cubre al menos la mitad de un cuadrado, se cuenta como uno entero, y si cubre menos, entonces no se cuenta.) ______ cuadrados.



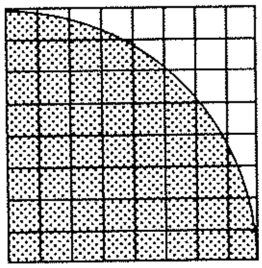
Multiplica la respuesta por 4 y divide por 16. Resultado: ______

¿Cuántos hay en este cuadrante?



______ cuadrados.
Multiplica la respuestata por 4 y divide por 36.
Resultado: ______

¿Y en este otro cuadrante?



______ cuadrados.
Multiplica la respuesta por 4 y divide por 64.
Resultado: ______

¿Y en este otro cuadrante?

______

______ cuadrados.
¿Qué debes hacer con esta respuesta?
Resultado: ______

¿Qué harías con la respuesta que obtuvieras con un cuadrante en un cuadrado de 10 cm. de lado?

¿Por qué tienes que empezar siempre multiplicando por 4?

El **radio** de un círculo es la longitud de una línea recta desde el centro hasta la circunferencia.

¿Cómo puedes averiguar el área de cualquier cuarto de círculo, sabiendo el radio?
¿Y la de un círculo entero?

Diagonales

Equipo Hoja de Trabajo 1, lápiz.

Datos que ayudan a la investigación Términos: diagonal, cuadrilátero divisor.

Conocimientos requeridos Uso preciso del lápiz y la regla, distinción de relaciones comunes.

Conceptos Factores comunes.

Puntos de enseñanza

En el ejemplo de la hoja del alumno, el máximo común divisor (MCD) de 6 y 4 es 2. La relación que están buscando los niños es esta:

Número de cuadrados cruzados = Longitud + Anchura — MCD (de la longitud y la anchura)

Por lo que,

$$\text{número de cuadrados cruzados} = 6 + 4 - 2 = 8$$

No es fácil hallar esta relación si no se dispone de unas cuantas claves, pero usted puede ayudar a los niños de diversas maneras:

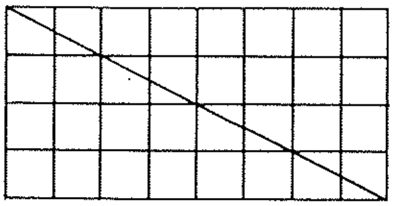
1 Sugiérales que dibujen cuadrados, rectángulos en los que tanto la longitud como la anchura sean números pares, otros en los que sean impares, y otros con mezcla de pares e impares. Esto asegurará que aparezcan MCD que no sean sólo 1.

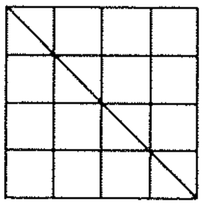
2 A la vez, al darles inicialmente una absoluta libertad de elección, les estará dando la oportunidad de hacerles ver que en muchos casos se mantiene esta relación:

$$\text{Número de cuadrados cruzados} = \text{Longitud} + \text{Anchura} - 1$$

Sugiérales que encuentren excepciones a la regla. En esos casos, ¿cuál es la diferencia en las dimensiones del cuadrilátero?

3 Pídales que investiguen el número de veces que una diagonal corta exactamente por el vértice de un cuadrado. En los dos ejemplos inferiores, esto sucede tres veces. Pregúnteles qué tienen los dos cuadriláteros en común: en los dos casos su MCD es 4: uno más que el número de esquinas cortadas.





4 En el cuadro hay espacio suficiente para otra columna, que puede ser la del MCD. Si cree que puede ser de ayuda, llame a la columna «Número de esquinas cortadas + 1». Este puede ser un medio para introducir el concepto de máximo común divisor.

Actividades de ampliación

Pida a los niños que predigan cuántos cuadrados cruzará una diagonal, dadas la longitud y la anchura del cuadrilátero y utilizando la fórmula descubierta; que luego lo comprueben dibujándolo.

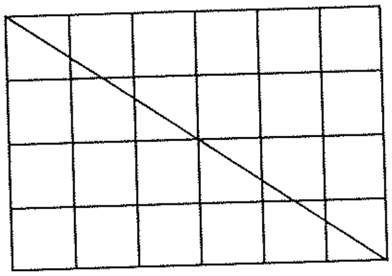
Unidades relacionadas «Figuras de áreas» (Unidad 13), «¡Pártelo por la mitad!» y «Factores» (Libro 1).

Nombre ______________________

8 Diagonales

Qué necesitas: Papel cuadriculado, lápiz.

En el cuadrilátero inferior se ha trazado una diagonal.



¿Cuál es la longitud de este cuadrilátero? ______ cuadrados.

¿Y su anchura? ______ cuadrados.

¿Cuántos cuadrados cruza la diagonal? ______ cuadrados.

1 En un papel cuadriculado, dibuja otro cuadrilátero (llámalo cuadrilátero B) y traza una diagonal desde una esquina a la otra.

No olvides dibujar con cuidado y usar un lápiz bien afilado.

2 Anota en este cuadrado la longitud, la anchura y el número de cuadrados que cruza la diagonal.

Cuadrilátero	Longitud	Anchura		N.º de cuad. cruzados por la diagonal
A	6	4		8
B				

¿Se te ocurre algún sistema para averiguar el número de cuadrados cruzados por la diagonal en cuadriláteros de cualquier tamaño sin tener que dibujarlos?

Braille

Equipo Hoja de Trabajo 1, lápiz.

Datos que ayudan a la investigación Término: colocación.

Conocimientos requeridos Trabajo metódico, reconocimiento de una secuencia.

Conceptos Simetría de números, secuencias numéricas.

Puntos de enseñanza

Esta unidad trata tanto del trabajo metódico, como de las secuencias numéricas: el averiguar el número de colocaciones de puntos posibles sin que se repitan ni falte ninguna es dificilísimo, a menos que se utilice algún método lógico, como el que se esboza en la hoja del alumno. No obstante, es muy importante que los niños empiecen haciéndolo a su manera: la comparación con sus compañeros y la discusión en grupo deberían permitirles encontrar algún tipo de estrategia.

También les puede ayudar preguntándoles:

«¿Será más fácil averiguar el número de colocaciones de dos puntos si empezamos dejando uno fijo en la esquina superior izquierda?» Si hacemos eso, entonces tenemos cinco colocaciones. Si trasladamos ese punto fijo a otro cuadrado, entonces tenemos cuatro, luego tres, luego dos y luego una, dando un total de 15. ¿Son capaces los niños de explicar por qué es así?

El resultado con cuatro puntos es el mismo que el de dos, al igual que el resultado de cinco y uno es el mismo, y el de 0 y seis puntos. Se puede establecer una discusión sobre esta simetría. La razón que lo explica es que la colocación de dos puntos es la misma que la de los espacios, es decir, cuatro puntos.

Los resultados son los siguientes:

0 puntos	1	colocación posible
1	6	
2	15	
3	20	
4	15	
5	6	
6	1	
Total	64	

Ahora, los niños pueden averiguar el resultado de las colocaciones de cinco, cuatro, tres, dos y un cuadrado con bastante rapidez, una vez que han descubierto un método de trabajo sistemático. Si colocamos los resultados así:

		Número total de colocaciones
1 cuadrado	1 1	2
2 cuadrados	1 2 1	4
3 cuadrados	1 3 3 1	8
4 cuadrados	1 4 6 4 1	16
5 cuadrados	1 5 10 10 5 1	32
6 cuadrados	1 6 15 20 15 6 1	64

obtendremos una figura muy familiar: ¡otra vez el triángulo de Pascal! (ver «Rutas», en el Libro 2).

El número de colocaciones posibles para siete cuadrados es 128, pero para saberlo los niños no tendrán que formar la séptima fila, pues si se fijan verán que el total de cada fila es el doble de la anterior.

Actividades de ampliación

Una buena unidad para realizar a continuación de esta es «Mirando hacia adelante» (Unidad 16). Los niños también pueden averiguar cosas sobre Louis Braille y su sistema. ¿En el sistema Braille se utilizan realmente las 64 colocaciones posibles?

Unidades relacionadas «Mirando hacia adelante» (Unidad 16), «Tres en raya» (Libro 2), «Huevos en una cesta» (Libro 3).

Nombre

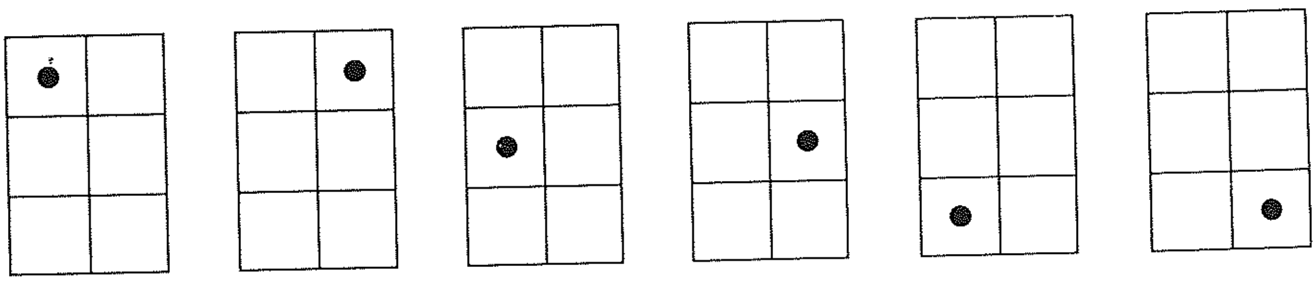
9 Braille

Qué necesitas: Papel cuadriculado con rectángulos de 2 × 3, lápiz.

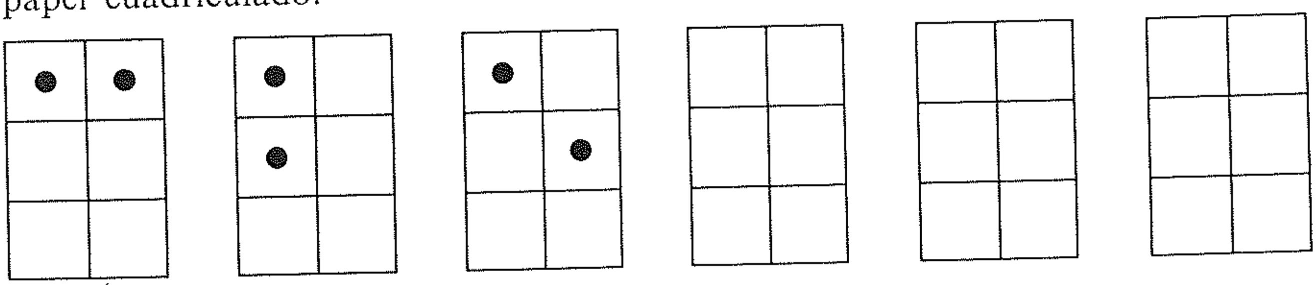
Cuando Louis Braille inventó su sistema de lectura por el tacto, descubrió que necesitaba una serie de colocaciones diferentes de puntos dentro de una figura en particular. La figura que escogió fue un rectángulo de 2 × 3 en el que podía colocar uno, dos, tres, cuatro, cinco o seis puntos en relieve.

En primer lugar, tenía que averiguar de cuántas maneras distintas podía colocar un punto en la figura.

Descubrió que había seis, así:



¿De cuántas maneras podía colocar dos puntos?
Utiliza estos rectángulos para averiguarlo, y luego continúa en el papel cuadriculado.



Averigua de cuántas maneras podía colocar tres puntos, cuatro, cinco y seis. ¿Y 0 puntos?

¿Cuántas maneras hay en total de colocar puntos en un rectángulo de 3 × 2?

Si cada colocación de puntos representara una letra del alfabeto, una marca de puntuación o un número, ¿se las podría haber arreglado con un cuadrilátero de 2 × 2 ó 5 × 1?

¿Cuántas colocaciones diferentes se pueden obtener con un rectángulo de 7 × 1?

Las franjas de Möbius *Notas del profesor*

Equipo Tiras de papel de unos 50 cm de largo y 5 cm de ancho (deben tener todas las mismas dimensiones), tijeras, cinta adhesiva, lápiz.

Datos que ayudan a la investigación Términos: bucle, vuelta, fracciones: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc.

Conocimientos requeridos Corte preciso, predicción, comprobación, generalización.

Conceptos Topología (la geometría de los puntos y el espacio, y cómo están conectados).

Puntos de enseñanza

Las franjas de Möbius son un pasatiempo que ha entretenido a niños y adultos desde principios del siglo XIX. Tienen una topología tal, que los resultados que se obtienen al estudiarlas de distintas maneras son fascinantes, y también pueden ser sujeto de una serie de estrategias de resolución de problemas.

Un sistema alternativo para introducirlas, es pedir a los niños que coloreen los dos lados de un bucle normal con colores diferentes, y que luego prueben a hacerlo con una franja a la que se haya dado media vuelta.

Si se hace un corte en el centro de una franja de Möbius con media vuelta, obtendremos un bucle, no dos, mientras que la longitud será el doble de la anterior. No obstante, si cortamos en un tercio de la franja obtendremos una serie de bucles entrelazados, cada uno el doble de largo que el anterior. Cortando una cuarta parte obtendremos exactamente el mismo resultado, sólo que habrá cambiado la anchura relativa de cada bucle. ¿Pueden predecir los niños el resultado de cortar una quinta parte de la franja, y comprobarlo luego en la práctica? De hecho, lo único que cambia es la anchura relativa. ¿Se dan cuenta de por qué? Sugiérales que confeccionen una tabla como esta:

Posición del corte	¿Cuántos bucles?	Longitud de cada bucle		Anchura del bucle mayor comparado con el menor
		Bucle mayor	Bucle menor	
$\frac{1}{2}$	2	33 (aprox.)	17	=
$\frac{1}{3}$	2	33	17	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	2	33	17	$\frac{1}{3}$

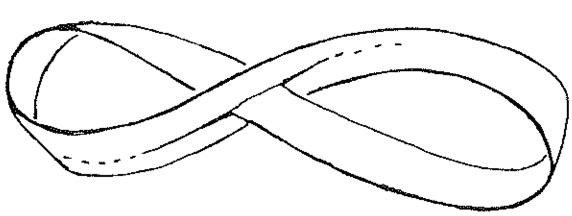
¿Pueden continuarla ellos?

También pueden utilizar este tipo de tabla para un bucle de dos vueltas, que parece dar siempre dos bucles de la misma longitud, con diferentes anchuras relativas. A ver si pueden hacer alguna predicción y comprobarla con algún ejemplo sencillo.

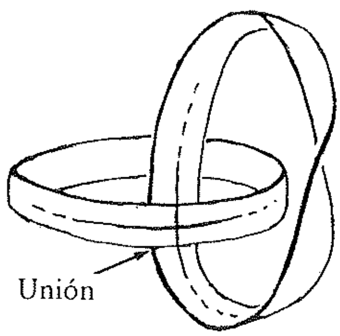
Al cortar por la mitad un bucle de tres medias vueltas, se obtendrá como resultado un bucle único con bastantes vueltas. ¿Qué sucede si se investiga este de la misma manera que los anteriores? ¿Da un bucle de cuatro medias vueltas el mismo resultado que uno de dos medias vueltas?

Actividades de ampliación

1 Compara las áreas de los bucles que resultan.
2 Antes de unir una franja de Möbius, prueba a hacerle una ranura a lo largo y meter por ella uno de los extremos. ¿Puedes predecir lo que sucederá si vas alargando la ranura?



3 Une en ángulo recto un bucle normal con una franja de Möbius con media vuelta. ¡El resultado es *impredecible*! (Debería resultar un cuadrado.)



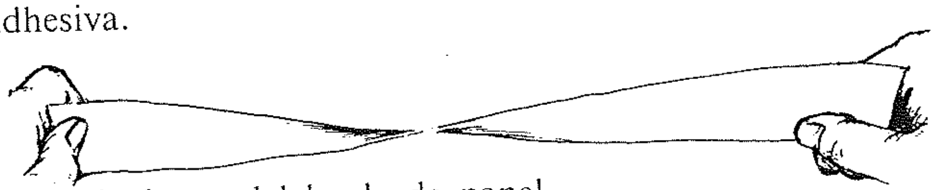
Unidades relacionadas «Rompecabezas de trazado» (Libro 1), «Dentro o fuera» (Libro 3).

10 Las franjas de Möbius

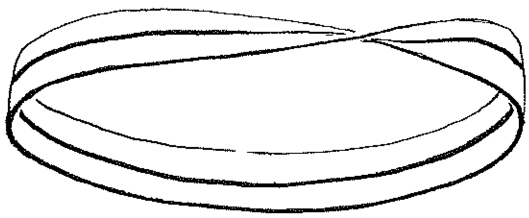
Qué necesitas: Tiras de papel de unos 50 cm de largo y 5 cm de ancho, tijeras, cinta adhesiva, lápiz.

Aquí tienes un sistema para trazar una línea por los dos lados de un trozo de papel sin levantar el lápiz.

Coge una de tus tiras de papel, dale media vuelta y junta los extremos con un trozo de cinta adhesiva.



Ahora traza una línea a lo largo del bucle de papel, procurando mantenerte en el centro, y continúala hasta llegar de nuevo al principio. Luego corta el rizo por cualquier punto, de manera que vuelvas a tener una tira.



¿Qué ves?

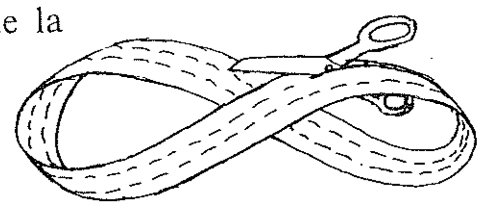
¿Has descubierto un papel de una sola cara?

Estos extraños bucles de papel se llaman **franjas de Möbius.**

Haz otra franja, y córtala longitudinalmente por el centro.

¿Qué sucede?

¿Qué crees que pasará si cortas a 1/3 del ancho de la franja?



Prueba a ver. ¿Tenías razón?

¿Y qué pasará si cortas a 1/4 del ancho? ¿O a 1/5?

¿Y si haces una franja con dos medias vueltas?

Trata de *predecir* cada vez lo que puede suceder, y luego compruébalo.

Equipo Papel y lápiz.

Datos que ayudan a la investigación Dígitos.

Conocimientos requeridos Suma, seguimiento de reglas.

Conceptos Secuencias numéricas.

Puntos de enseñanza

Los niños pueden empezar probando con números elegidos al azar. Preguntas que se pueden plantear:

«¿*Todos* los números terminan dando un palíndromo?» Discuta con ellos si pueden hacer una predicción fiable basándose en su investigación. (Nota: el único número para el que aún no se ha encontrado ningún palíndromo es el 196.)

«¿Qué números menores de 100 se convierten en palíndromos en un paso?» (Ejemplo: 32 + 23 = 55.)

«¿Qué números menores de 100 se convierten en palíndromos en dos pasos?» (Ejemplo: 28 + 82 = 110; 110 + 011 = 121.)

«¿Cuáles se convierten en palíndromos en tres pasos... en cuatro... etc?» (Ejemplos: 68 + 86 = 154; 154 + 451 = 605; 605 + 506 = 1111 (tres pasos), 78 + 87 = 165; 165 + 561 =726; 726 + 627 = 1353; 1353 + 3531 = 4884 (cuatro pasos.) Los niños deberían realizar un cuadro o una tabla con sus averiguaciones.

2 pasos	19, 28, 37, 39, 46, 48, 57, 58, 64, 67, 73, 75
3 pasos	59, 68, 86, 95
4 pasos	69, 78, 87, 96

«¿Qué números menores de 100 son palíndromos?» (1-9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.)

«¿Qué números entre 100 y 1000 son palíndromos?»

También hay palíndromos en las palabras, como «radar», «oro» o «dábale arroz a la zorra el abad». ¿Se te ocurren algunas otras?

Actividades de ampliación

Calcula, predice y comprueba tus respuestas a los siguientes acertijos numéricos, que pueden dar como resultado palíndromos.

1 *Todos los unos* Investiga y completa estas series:
$1 \times 9 + 2 = ?$ (11)
$12 \times 9 + 2 = ?$ (111)
$123 \times 9 + 2 = ?$ (1111)
$1234 \times 9 + 2 = ?$ (11111)
$12345 \times 9 + 2 = ?$ (111111)
etc. ¿Qué secuencia obtienes?

2 142857 es un número extraño. (Multiplícalo por 2, 3, 4, 5 ó 6 y averiguarás por qué: todas las respuestas dan los dígitos 142857 en distinto orden.)
$142857 \times 7 = ?$ $(999999) : 9 = ?$ (111111)
$285714 \times 7 = ?$ $(1999998) : 9 = ?$ (222222)

3 *El 8 que falta* Completa estas series, y descubre las secuencias:
$12345679 \times 9 = ?$ (111111111)
$12345679 \times 18 = ?$ (222222222)
$12345679 \times 27 = ?$ (333333333)
$12345679 \times 36 = ?$ (444444444)
$12345679 \times ? = ?$?

4 *Unos al cuadrado* $11 \times 11 = 121$
$111 \times 111 = 12321$
$1111 \times 1111 = ?$, etc.

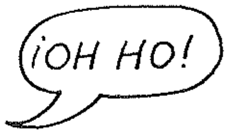
5 *Todos los nueves* Toma un número de tres dígitos. Multiplícalo por 11 y luego por 91. ¿Qué descubres? (El número final siempre es el número original escrito dos veces.)

6 *Número 37* Si $3 \times 37 = 111$, busca $6 \times 37 = ?$, $9 \times 37 = ?$, $12 \times 37 = ?$, etc.

7 *Onces* 11 es el primer palíndromo. $11 \times 11 = 121$ (11^2) también es un palíndromo. Prueba con $11 \times 11 \times 11$ (11^3), 11^4, 11^5... ¿son todos palíndromos?

Unidades relacionadas «Tríos» (Libro 2), «El número mágico» (Libro 3).

Nombre



11 Palíndromos

Qué necesitas: Papel y lápiz.

Elige un número, por ejemplo 216
Da la vuelta a los dígitos 612
Suma los dos números 828

828 es un **palíndromo:** se lee igual empezando por el principio o por el final.

Prueba con otro número 154
Da la vuelta a los dígitos 451
Súmalos 605

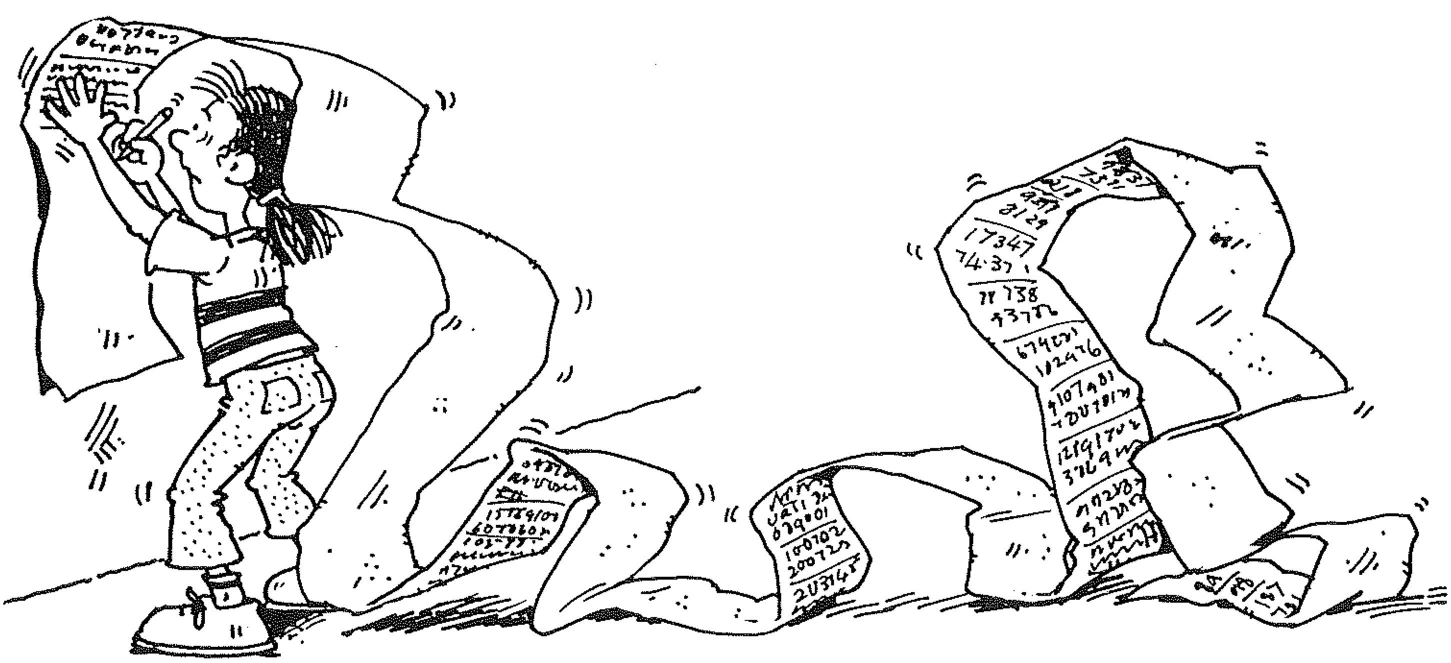
605 no es un palíndromo, pero repite el proceso 605
506
1111

1111 es un palíndromo.

¿Pasa lo mismo con todos los números?

Investiga y toma nota de tus resultados.

Para algunos números hacen falta muchos más pasos para llegar a un palíndromo. Prueba con el 89... ¡pero asegúrate de que tienes suficiente papel!



Cuadrados de colores

Equipo Cuadrados de 2 × 2, tres lápices de colores.

Datos que ayudan a la investigación Cuadrados.

Conocimientos requeridos Orientación espacial, rotación, análisis lógico.

Conceptos Fracciones: $^1/_2$, $^1/_4$, conjuntos, simetría.

Puntos de enseñanza

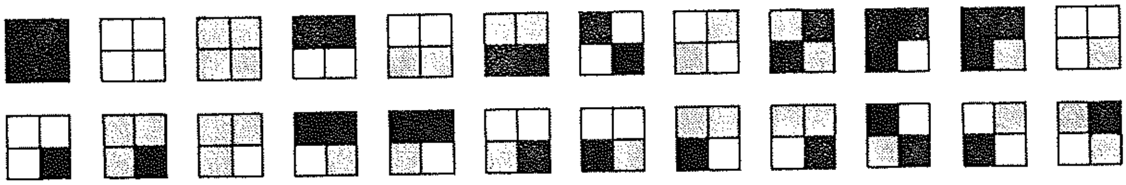
Los niños deben ponerse de acuerdo sobre las reglas para colorear los cuadrados antes de ponerse a trabajar. Las preguntas más corrientes son:

«¿Está permitido colorearlo todo de un solo color ■ ?» (Sí, ¿por qué no?)

«¿Son diferentes estos dos: ? » Por lo general, dirán que no, porque si se le da la vuelta a uno de ellos son idénticos. Si no se rechazan las rotaciones, entonces se obtienen muchas más posibles respuestas.

«¿Estos dos son diferentes: ?» Por lo general, dirán que sí; no basta con darle la vuelta para que sean iguales, hace falta una reflexión. No obstante, es importante dejar que lo decidan ellos mismos.

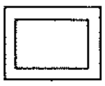
Aquí hay 24 combinaciones posibles de tres colores:



Preguntas que se pueden plantear: «¿Puedes dividirlos en conjuntos?», «¿Qué colores has usado más?», «¿Puedes dividir el cuadrado en cuartos de alguna otra manera?»

El trabajo complementario podría incluir una investigación sobre las banderas nacionales: sus divisiones, sus esquemas y los conjuntos que forman.

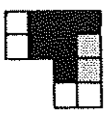
Actividades de ampliación

1 Explora con distintas figuras de partida como 1 × 3 ó 2 × 3
2 Investiga las maneras de unir los cuadrados. Por ejemplo: ¿se pueden unir formando un cuadrado de 6 × 4, o de 3 × 8, o de 2 × 12, de manera que al unir dos lados, las dos caras contiguas coincidan?
3 ¿Se pueden colocar dentro de un marco vacío —  — utilizando la misma regla de que coincidan las caras?
4 ¿Puedes inventarte un juego del estilo del dominó que se pueda jugar utilizando las 24 piezas (lo mejor es pegarlas en cartón)? Aquí te damos una versión que se podría llamar «Unir los colores»:

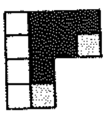
- Se colocan todas las fichas en la mesa, boca abajo.
- El primer jugador coge dos, por ejemplo, esta y esta , y si los colores coinciden, las une así: 

  Si puede unirlas se anota 5 puntos, es decir, un punto por cada cuadrado del color que coincida. ■

  Si no puede unir las fichas, entonces las cambia por otras dos, repitiéndolo hasta que pueda unir dos.
- El siguiente jugador coge *una* ficha. Si encaja con las anteriores, la une y se anota los puntos que le toquen.



así, esto puntuaría ■6 + □ 2 = 8

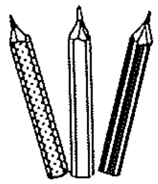
o si se colocara así,  ■6 + □ 4 = 10

  Si no puede encajarla, entonces se la guarda y no se anota ningún punto.
- El juego continúa así, con el mismo turno de jugadas para cada jugador. Gana el que consiga más puntos.

Unidades relacionadas «¡Pártelo por la mitad!» (Libro 1). «El juego de los cuadrados» (Libro 2), «Cuartos curvados» (Libro 3).

Nombre ______________________

12 Cuadrados de colores

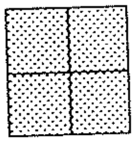


Qué necesitas: Tres lápices de colores.

Desafío ¿De cuántas maneras *diferentes* puedes colorear los cuadrados inferiores?

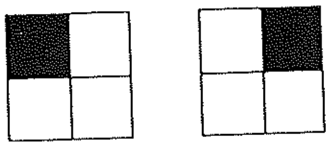
Recuerda: cada uno debe estar coloreado de una manera diferente.

¿Puedes usar un solo color?



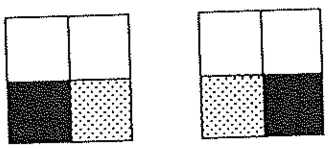
Sí.

¿Estos son diferentes?



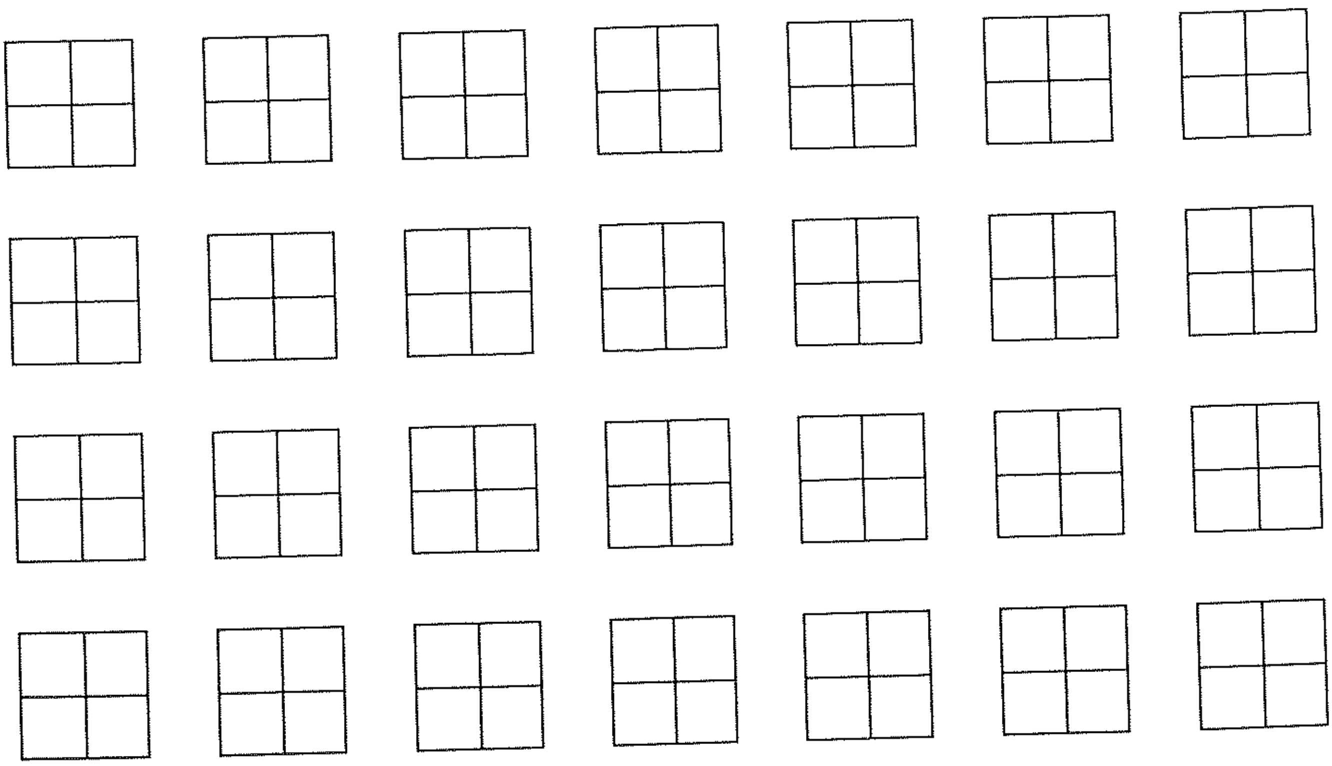
______

¿Y estos, son diferentes?



______

¿Cuántas maneras diferentes de colorear se te ocurren?



Figuras de áreas

Notas del profesor

Equipo Papel de puntos (Hoja de Trabajo 2) y lápiz o un tablero y chinchetas.

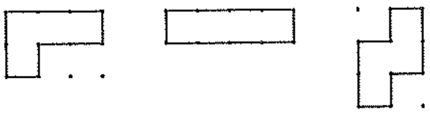
Datos que ayudan a la investigación Vocabulario: cuadrado, polígono, área.

Conocimientos requeridos Conciencia espacial, medida de áreas, comparación de figuras.

Conceptos Conservación del área, transformación de las figuras, simetría.

Puntos de enseñanza

Por lo general, los niños empiezan usando ejemplos en los que sólo aparecen líneas horizontales y verticales, como estos:



Es posible incluso que haya que aconsejarles que utilicen *diagonales*, como por ejemplo:

 $= \frac{1}{2}$ cuadrado

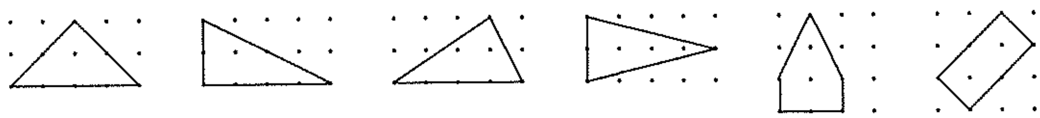
 $= \frac{1}{2}$ de 2 cuadrados = 1 cuadrado

 $= \frac{1}{2}$ de 3 cuadrados $= 1\frac{1}{2}$ cuadrados

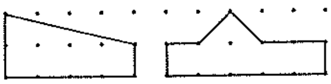
 $= \frac{1}{2}$ de 4 cuadrados = 2 cuadrados

Aquí hay algunos ejemplos en los que aparecen líneas diagonales.

Unidades de 4 cuadrados



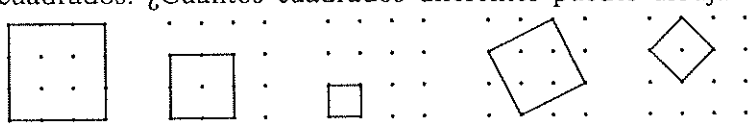
Unidades de 6 cuadrados



La investigación puede llevarse a cabo como si se tratara de un juego. El primer jugador dibuja una figura cualquiera en un tablero de 4× 4, y el segundo dibuja otra figura diferente en el mismo área. Continúan así hasta que uno de los dos repite una figura, y el que la repita pierde.

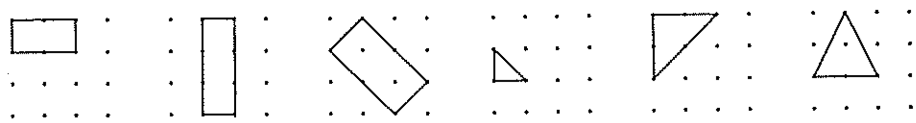
Actividades de ampliación

1 Investiga los cuadrados. ¿Cuántos cuadrados diferentes puedes dibujar en un tablero de 4 × 4? (Respuesta: 5.)

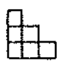
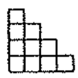


¿Y en un tablero de 5 × 5? (8.) ¿Y en uno de 6 × 6? (11.)

2 Investiga los rectángulos y los triángulos.



3 Investiga las escaleras, y completa este cuadro:

	Altura		Área (cuadrados)		Perímetro
	1	→	1	→	4
	2	→	3	→	?
	3	→	?	→	?
	4	→	?	→	?
	?		?		?

4 Investiga con tableros de distintas formas y haz un cuadro con los resultados.

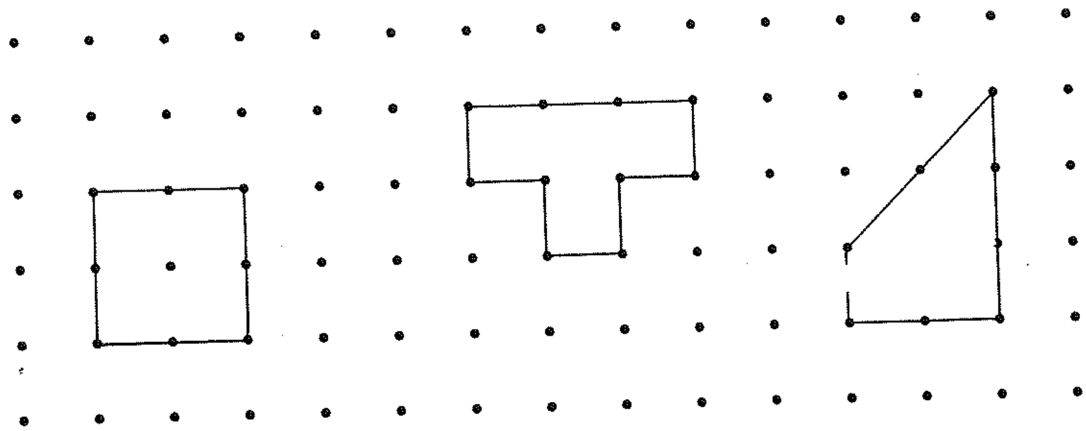
Unidades relacionadas «¡Pártelo por la mitad!» y «Estructuras de cubos» (Libro 1), «El juego de los cuadrados» y «Chinchetas y áreas» (Libro 2), "¿Cuántos lados?" (Libro 3).

Nombre ____________________

13 Figuras de áreas

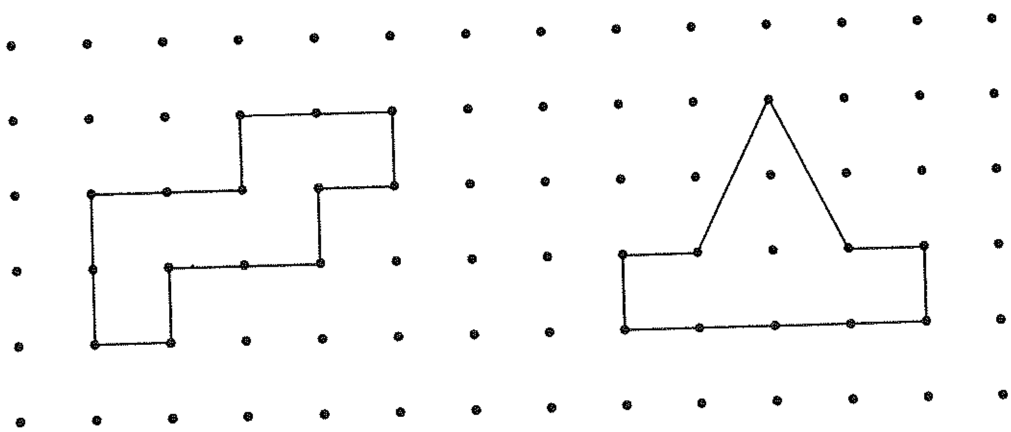
Qué necesitas: Lápiz y papel de puntos o un tablero y chinchetas.

1 Estos polígonos tienen un área de cuatro cuadrados.



¿Cuántos polígonos más puedes encontrar que tengan un área de cuatro cuadrados?
Utiliza papel de puntos o un tablero y chinchetas para mostrar tus resultados.

2 Estos polígonos tienen un área de seis cuadrados.



¿Cuántos polígonos más puedes encontrar que tengan un área de seis cuadrados?

3 Investiga polígonos con otras áreas.

Equipo Dos copias de la Hoja de Trabajo 3, lápiz, regla, lápices de colores, papel de calco.

Datos que ayudan a la investigación Conocimiento de las figuras regulares de los mosaicos.

Conocimientos requeridos Dibujo, visualización.

Conceptos Simetría, regularidad, mosaico.

Puntos de enseñanza

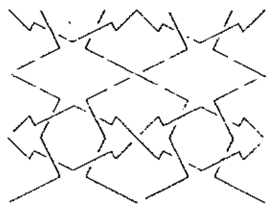
Esta actividad enlaza las matemáticas con el arte al estilo de las culturas orientales, y a la vez proporciona la posibilidad de crear hermosos diseños geométricos que pueden ser diferentes en cada niño.

La Hoja de Trabajo está pensada para ayudar a los niños con el dibujo inicial, sobre todo en lo que se refiere a la simetría. En cada cuadrado aparecen punteados dos ejes de simetría, pero pregúnteles si ven alguno más: se trata, por supuesto, de las dos diagonales, que pueden añadir si lo desean, ya sea como parte del dibujo o a modo de guía.

Una vez que han decidido qué parte de las líneas colorearán, pueden calcar el trazado del cuadrado y los segmentos coloreados en los cuadrados que quedan en la Hoja de Trabajo. Si les gusta el resultado, que, si está realizado correctamente, deberá consistir en una serie de figuras cerradas, pueden pasarlo a la segunda copia de la Hoja de Trabajo y colorear las figuras o las líneas formando un diseño simétrico.

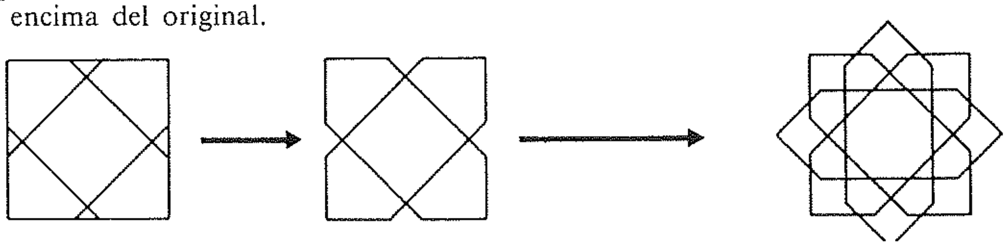
Actividades de ampliación

1 Si los niños deciden dejar el resultado como una serie de líneas, pueden «entrelazarlas» dejando huecos muy pequeños en las intersecciones y asegurándose de que cada línea pasa alternativamente «por debajo» y «por encima», como en esta:



2 También pueden cambiar el esquema de colores a partir de un punto determinado, obteniendo así distintos diseños basados en la misma forma.

3 Se pueden crear esos diseños en cualquier figura de mosaico. Por ejemplo, trazando líneas dentro de un cuadrado, de manera que den como resultado una simetría rotacional, se pueden obtener dibujos muy hermosos al girarlos sobre un ángulo e impresionarlos encima del original.



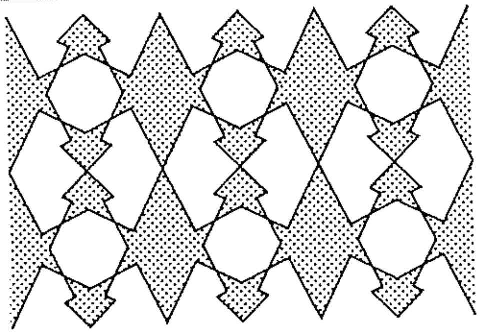
Unidades relacionadas «Cuartos curvados» (Libro 3).

Nombre

14 Dibujos islámicos

Qué necesitas: Dos copias de la Hoja de Trabajo 3, papel de calco, lápiz, lápices de colores, regla.

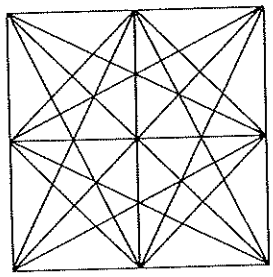
En los países islámicos se encuentran muchos dibujos muy hermosos, inventados por sus matemáticos hace muchísimos años.



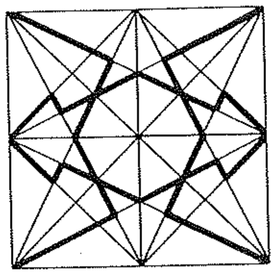
Este dibujo, por ejemplo, se hizo basándose en un cuadrado.

Aquí tienes un sistema para hacer tú tus propios dibujos islámicos:

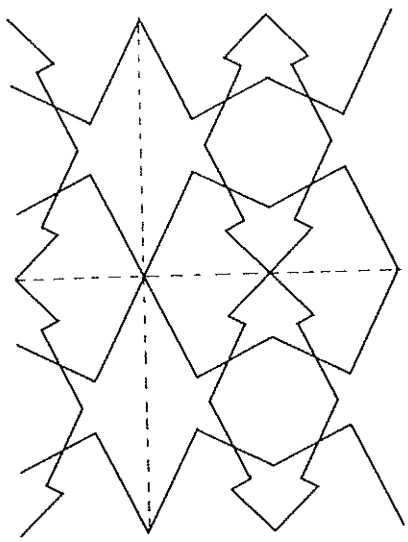
1 En un cuadrado de la Hoja de Trabajo, dibuja varias líneas rectas: diagonales, líneas desde el centro hasta los lados, líneas que unan intersecciones de otras líneas, etc. Trata de que el dibujo sea simétrico. Este, por ejemplo, es simétrico (pero el tuyo puede ser distinto).



2 Ahora elige una de las líneas y márcala más oscura. Asegúrate de que cuando una línea se une a un lado o a una esquina del cuadrado, en el lado o en la esquina opuestos sucede lo mismo.



3 Ahora calca sólo el cuadrado externo y las líneas más oscuras, y repítelo en el cuadrado contiguo, formando un dibujo simétrico.



Si te gusta el resultado, vuelve a calcar el dibujo en todos los cuadrados de la segunda copia de la Hoja de Trabajo. Puedes colorear las figuras que aparezcan o dejar simplemente un dibujo de líneas.

Mira a ver cuántos dibujos diferentes eres capaz de hacer. También puedes utilizar hexágonos o triángulos como figura básica, si lo deseas.

Esquemas de cuadros en espiral

Equipo Hoja de Trabajo 4, lápiz.

Datos que ayudan a la investigación Términos: espiral, múltiplo, conocimiento de las secuencias numéricas básicas.

Conocimientos requeridos Reconocimiento de secuencias, predicción y comprobación, tablas de multiplicar.

Conceptos Secuencias numéricas.

Puntos de enseñanza

Se trata de una investigación que puede producir un resultado sumamente atractivo, estéticamente hablando, y que hará que los niños se embarquen en una serie de discusiones muy útiles, al tratar de predecir unos esquemas o deducir cómo se han producido otros.

En primer lugar, asegura a los niños una experiencia concreta en el tema de las espirales, incluyendo quizá la creación de sus propios ejemplos (aunque sean simples). Asegúrese de que comprenden realmente cómo se construyen las espirales de números.

No hay necesidad de colorear todos los cuadrados para que se den cuenta de que los números pares producirán un tablero de ajedrez: es mejor darles la oportunidad de que predigan el diseño que aparecerá y lo comprueben. Igualmente, antes de empezar a colorear deberían predecir que los números impares darán el mismo resultado.

El primer cuadro de la hoja del alumno es el de la tabla del 8. La discusión se puede centrar en la diferencia de las distribuciones a los dos lados de la diagonal que va desde la parte inferior izquierda, hasta la parte superior derecha, por un lado las líneas diagonales de la parte superior izquierda, y por otro el esquema de la parte inferior derecha, y cómo continuarían las dos mitades. Para descubrir de qué número son los múltiplos en cuestión, puede ser necesario empezar con un método de prueba y error, con el cual aparecerán los esquemas de otras tablas que pueden a su vez proporcionar alguna pista. Por ejemplo, la tabla del 4 consiste en una serie de líneas diagonales con la misma división en diagonal. ¿Son capaces de establecer alguna conexión entre los números pares, los múltiplos de 4 y el número que están buscando?

En cuanto a los cuadros del final de la página, pertenecen a los números cuadrados (¿son capaces los niños de explicar por qué producen ese esquema?), la tabla del 6 y los números triangulares, respectivamente.

Actividades de ampliación

1 Se puede profundizar en el estudio de la relación entre las tablas del 2, del 4 y del 8, ya vista arriba, observando la tabla del 16, aunque para que se vea claramente será necesario ampliar las espirales a 400 números o más.

2 Que coloreen una espiral con los múltiplos de 6 en un color, y los de 9 en otro color. Que intenten lo mismo con los múltiplos de otros números que tengan factores comunes.

3 Los números primos producen un esquema muy inconsistente, pero si se colocan en una pirámide de números:

		1		
	2	3	4	
5	6	7	8	9

etc., aparece un esquema más tangible. También se pueden probar en la pirámide los múltiplos de otros números o cualquier otra secuencia numérica.

3 Se puede preparar una espiral muy grande para que los niños coloreen en ella una serie de múltiplos o una secuencia que ellos elijan, y a la que todos puedan ir contribuyendo a lo largo de varios días.

Unidades relacionadas «Factores» (Libro 1).

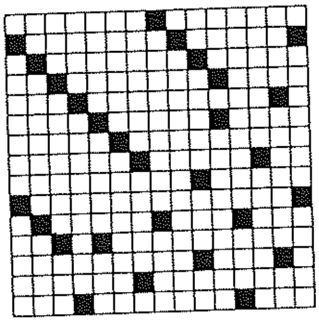
Nombre ____________

15 Esquemas de cuadros en espiral

Qué necesitas: Hoja de Trabajo 4, lápiz.

En tu Hoja de Trabajo hay unas espirales cuadradas. ¿Ves cómo están colocados los números?
¿Qué esquema crees que obtendrás si coloreas todos los números pares?
Prueba a ver si tenías razón.
Y si coloreas los números impares, ¿qué esquema obtendrás?

Este esquema se ha hecho coloreando los múltiplos de un número determinado.



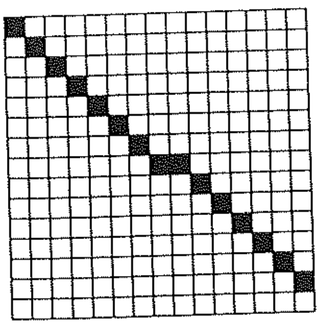
¿Cómo crees que continuará el esquema?
Discútelo con tus amigos.

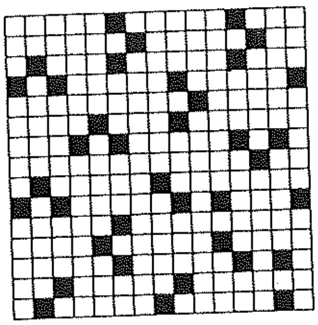
¿A los múltiplos de qué número crees que pertenece? ______

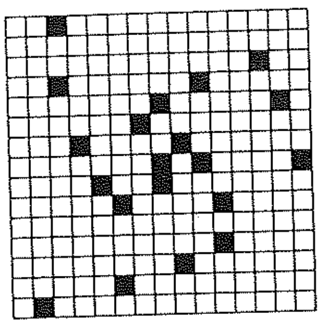
Puedes formar esquemas utilizando los múltiplos de cualquier número.

Podrías tratar de hacer esquemas con los números cuadrados, con los números triangulares o con cualquier otra secuencia numérica.

¿Puedes formar estos esquemas?







Mirando hacia adelante

Equipo Lápiz, calculadora.

Datos que ayudan a la investigación Conocimiento de los números triangulares.

Conceptos Secuencias numéricas, álgebra.

Puntos de enseñanza

El triángulo de Pascal sirve por sí mismo para llevar a cabo más de una investigación: está lleno de distintas secuencias numéricas. Aparte de las más obvias, como los números triangulares, que ya se han estudiado en «Rutas» (Libro 2), se pueden encontrar «ocultos» en él los números cuadrados, e incluso la sucesión de Fibonacci.

Es precisamente fijándose en esas secuencias y aplicando sus generalizaciones a las filas «ocultas» del triángulo como se pueden hallar las respuestas a estas preguntas.

La pregunta 1 está pensada en parte para disuadir a los niños de intentar responder las preguntas ampliando el triángulo: ¡incluso los más dispuestos se lo pensarán dos veces antes de seguir hasta la fila 87! Por supuesto, la respuesta es 87, como se deduce del hecho de que el segundo número de cada fila es el mismo de la fila en cuestión. Igualmente, la respuesta a la pregunta 2 será 102. Pregunte a los niños cómo han llegado a esa conclusión: la discusión puede sacar a la luz la simetría del triángulo.

La pregunta 3 es un poco má difícil. Pregúnteles:

«¿Qué sabemos del número 79?» La mayoría de los niños dirán que es un número impar; quizá alguno señale que es primo. ¿Las filas de números primos tienen números que no se repiten? La fila 2, la 4 y la 6 los tienen... ¿los tiene también la 8? Sí, pasa lo mismo con todos los números pares. Este tipo de razonamiento les ayudará a llegar a la conclusión de que el 79, al ser impar, no tendrá ningún número que se repita.

La pregunta 4 requiere una estrategia: hay que averiguar los totales de las primeras filas y reconocer la secuencia. Los totales de las filas de la 0 a la 5 son fáciles de averiguar: 1, 2, 4, 8, 16. Pregúnteles:

«¿Qué pasa?... ¿Cuál será la respuesta para la fila 6?... Comprueba si tenías razón. ¿Cuál será entonces el total de la fila 16?» Para esto necesitarán calculadoras, con las que pueden probar a buscar 2 × 2 × 2 ×, etc. No obstante, recuérdeles el uso de la función reiterativa (ver «Calculando sucesiones numéricas», en el Libro 3). Lo único que tienen que hacer es

$$\boxed{2}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$$

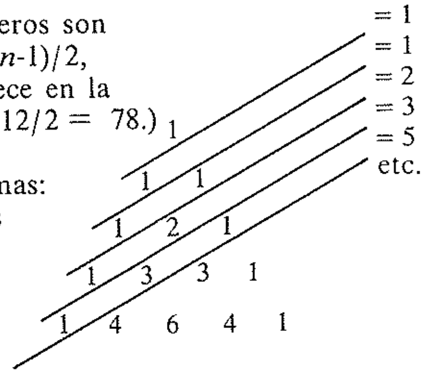
y luego darle al símbolo «=» 14 veces más, ya que el primer número, el 4, es la respuesta de la fila 2. La respuesta final es 65.563.

Esta técnica se puede utilizar también para investigar la pregunta 5, que va dando cada fila sucesiva del triángulo. La secuencia parece romperse en la fila 5: en este punto, en la calculadora aparece 161051. Pregunte a los niños por qué sucede esto (porque aquí entra en juego el valor según la colocación). Señáleles las diferencias; el último 5 y el 1 son esos mismos números, pero el 0 viene del dígito de las unidades del 10 de la derecha (de los dos 10 que aparecen); la cifra de la decena de este número se ha desplazado al 10 de la izquierda, que a su vez pierde su cifra de la decena ante el 5, que se convierte en 6. Partiendo del triángulo, ¿pueden predecir los niños qué será 11^6? (1771561.)

Actividades de ampliación

1 Cuál es el tercer número de la fila 13? (Los terceros números son todos triangulares, y se pueden obtener con la fórmula $n(n\text{-}1)/2$, siendo n el número de la fila. La explicación a esto aparece en la unidad «El rosetón», en el Libro 3. La respuesta es 13 × 12/2 = 78.)

2 ¿Se pueden «descubrir» los números cuadrados? ¿Y los de Fibonacci? Para ambos habrá que hacer unas cuantas sumas: los números cuadrados se obtienen sumando dos números sucesivos de la secuencia de números triangulares (los terceros números de cada fila); la sucesión de Fibonacci se obtiene sumando los números de las filas formadas al dibujar líneas oblicuas paralelas.



Unidades relacionadas «Rutas» (Libro 2), «El rosetón», «Averigua el número» y «Calculando sucesiones numéricas» (Libro 3).

Nombre ______________________

16 Mirando hacia adelante

Qué necesitas: Lápiz y calculadora.

¿Has visto alguna vez este triángulo de números?

1	Fila 0
1 1	Fila 1
1 2 1	Fila 2
1 3 3 1	Fila 3
1 4 6 4 1	Fila 4
1 5 10 10 5 1	etc...
1 6 15 20 15 6 1	
1 7 21 35 35 21 7 1	
1 8 28 56 70 56 28 8 1	

Se llama **triángulo de Pascal,** como el matemático que lo investigó por primera vez.

Mira a ver si puedes responder a estas preguntas. ¡Unas son más difíciles que otras!

1 ¿Cuál es el segundo número de la fila 87? __________

2 ¿Cuál es el penúltimo número de la fila 102? __________

3 ¿Hay en la fila 79 algún número que no se repita?

4 ¿Cuál es el total de todos los números de la fila 16?

5 Con la calculadora, averigua lo siguiente:

11^2 $(11 \times 11) =$ ________ 11^3 $(11 \times 11 \times 11) =$ ________

11^4 $(11 \times 11 \times 11 \times 11) =$ ________

¿Qué ves? ¿Funciona siempre? Si no funciona ¿a qué se debe?

Plantea tus propias preguntas acerca del triángulo. Pueden ser todo lo difíciles que quieras, ¡pero asegúrate de que sabes averiguar la respuesta!

Los rectángulos áureos

Equipo Hoja de Trabajo 1, calculadora, regla, lápiz.

Datos que ayudan a la investigación Conocimiento de la sucesión de Fibonacci, término: razón.

Conocimientos requeridos Uso de la calculadora, precisión de dibujo y medidas.

Conceptos Números irracionales, redondeo, secuencias numéricas, estimación, razón.

Puntos de enseñanza

La longitud y la anchura de los rectángulos de los ejemplos son 1, 2, 3, 5 y 8 centímetros, lo cual equivale a la sucesión de Fibonacci presentada en «De compras» (Libro 3), que debe llevarse a cabo antes que esta. Una vez que se ha recordado a los niños la construcción de dicha sucesión (cada número se obtiene sumando los dos anteriores), pídales que predigan cuál será la longitud y la anchura del siguiente rectángulo (13 × 8 cm.).

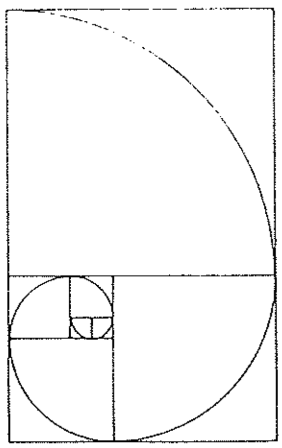
Cuando les pida que dividan la longitud de cada rectángulo por su anchura, anímelos a hacerlo mentalmente, y que luego lo comprueben con la calculadora, ya que la respuesta puede incluir la conversión de fracciones en decimales. Los resultados son 2, 1'5, 1,666... periódica y 1'6, respectivamente. Puede aprovechar la oportunidad para discutir con ellos el significado de la cifra decimal periódica.

¿Cuál de las dos últimas respuestas se acerca más a 1'618? (Aquí se puede utilizar el término «razón», presentándolo de una forma práctica.)

A medida que van aumentando de tamaño los rectángulos, la razón se va acercando a 1'618, lo cual descubrirán los niños al realizar la última actividad de la hoja del alumno. El rectángulo mayor que pueden dibujar en la hoja es de 21 × 13, que da una proporción de 1'615... No obstante, pueden continuar la investigación dividiendo cada término sucesivo de la sucesión de Fibonacci por el número anterior de la misma, acercándose cada vez más a 1'618. El hecho de que nunca se alcance este término exacto, puede servir de punto de partida para una discusión sobre el grado de exactitud requerido. Si se deciden por la aproximación con tres cifras decimales, ese grado se alcanzará con un rectángulo de 55 × 34, que da un resultado de 1'617647 (discuta con ellos cómo se pueden redondear estos decimales). Luego pueden comprobar qué hace falta para llegar a un grado mayor de exactitud.

Actividades de ampliación

Si vuelven a dibujar los rectángulos de manera que el primero mida 3 cuadrados de ancho y 6 de largo, y luego le van añadiendo cuadrados en la dirección contraria a las agujas del reloj, obtenemos el diseño básico para dibujar una espiral equiangular. Con un compás, que dibujen un arco desde un vértice hasta el opuesto de cada cuadrado, para obtener una curva continua.



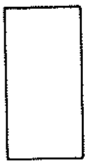
Unidades relacionadas «De compras» (Libro 3).

Nombre ______________________

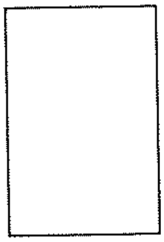
17 Los rectángulos áureos

Qué necesitas: Papel de cuadros de 1 cm., calculadora, lápiz, regla.

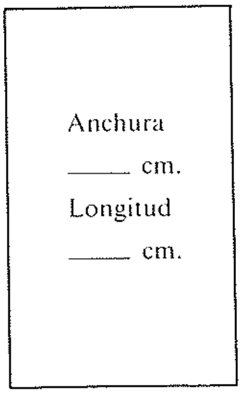
Los antiguos griegos consideraban el rectángulo áureo como la más hermosa de las figuras, y lo utilizaban como parte del diseño de muchos edificios. El rectángulo áureo es aquel cuya longitud es 1'618 veces su anchura. Todos estos son casi rectángulos áureos.



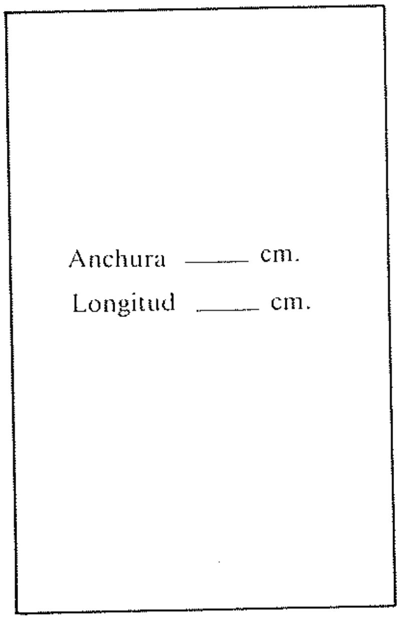
Anchura ______ cm.
Longitud ______ cm.



Anchura
______ cm.
Longitud
______ cm.



Anchura
______ cm.
Longitud
______ cm.



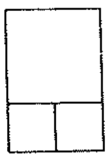
Anchura ______ cm.
Longitud ______ cm.

1 Mide la anchura y la longitud de cada uno. ¿Reconoces estos números de alguna unidad que hayas hecho antes?

2 Divide la longitud de cada rectángulo por su anchura. ¿Cuál de ellos es el que más se acerca al rectángulo áureo?

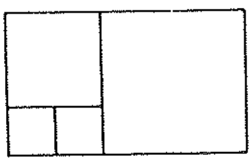
3 Aquí tienes un sistema bastante exacto para obtener un rectángulo áureo. Empieza por dibujar un cuadrado de un centímetro en la esquina inferior derecha de tu papel cuadriculado: 

Luego dibuja otro del mismo tamaño justo al lado: 

Ahora dibuja otro pegado al lado más largo: 

Continúa dibujando cuadrados así, cada uno en el lado más largo del anterior, hasta que ya no te quede espacio en el papel.

¿Qué pasa con los lados del rectángulo anterior cada vez que añades uno nuevo?



4 Trata de resolver este problema.
Si siguieras dibujando rectángulos así, ¿qué tamaño tendría el que, al dividir la longitud por la anchura, diera exactamente 1'618?

La caja

Equipo Hoja de Trabajo 1, tijeras, calculadora, cubos de 1 cm., otros materiales que se puedan utilizar para medir la capacidad.

Datos que ayudan a la investigación Centímetro cuadrado.

Conocimientos requeridos Desarrollo de estrategias para medir la capacidad, razonamiento lógico, uso de la calculadora para investigar los límites.

Conceptos Area, capacidad, concepto de límite.

Puntos de enseñanza

«El tesoro de Jacko el Cruel» (Libro 3) es una introducción en la que se tratan conceptos similares a los de esta unidad, aunque aquí la situación está formalizada, y requiere unos cálculos más extensivos y una capacidad de generalización.

Deliberadamente, en la hoja del alumno no hemos hecho ningún intento de explicar cómo se debe medir la capacidad de cada caja. Los niños deben discutir entre ellos las posibilidades, quizá experimentando con arena o con agua: pronto descubrirán que estas materias son muy poco prácticas. Hágales notar que no tienen cinta adhesiva, por lo que quizá haya otro sistema. En realidad, lo mejor es utilizar cubos de un centímetro: para no dejar huecos entre medias pueden unirlos con clips para formar un paralelepípedo que mida 13 × 13 × 1, exactamente la capacidad de la caja. Luego pueden contar los cubos y hacer un cuadro con los resultados. Pregúnteles:

«¿Se puede simplificar el sistema de contar?», con lo que les ayudará a desarrollar sistemas de cuenta más eficaces, dirigiendo a la vez la discusión para hacerles ver que el volumen del paralelepípedo que obtienen cada vez, se obtiene multiplicando el área de la superficie (o la base) por la altura: un método común a todos los prismas. Quizá algunos se den cuenta de que eso es lo mismo que multiplicar la longitud por la anchura y por la altura, pero esto sólo se ajusta a los cubos o a los paralelepípedos. Estos son los resultados:

Tamaño del cuadro	Longitud	Anchura	Altura	Volumen del paralelepípedo
1 × 1	13	13	1	169
2 × 2	11	11	2	242
3 × 3	9	9	3	243
4 × 4	7	7	4	196
5 × 5	5	5	5	125
6 × 6	3	3	6	54
7 × 7	1	1	7	7

Esto parece llevar a la conclusión de que lo mejor es recortar de la esquina un cuadrado de 3 × 3, ya que este es el que permite un volumen mayor. Pregunte a los niños:

«¿Podremos estar *seguros* de que esta es la respuesta correcta, o hemos olvidado algo?»

La cuestión es que hasta ahora hemos trabajado únicamente con unidades de cuadrados enteros; los niños pueden probar la posibilidad de cortar sólo parte de los cuadrados, por ejemplo $3\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}$, para ver si así mejoran los resultados. Pregúnteles por dónde deben empezar: lo mejor sería hacerlo por donde hemos obtenido el mejor resultado hasta ahora, es decir, entre 2 y 4 cm. En vez de cortar de verdad los cuadrados, haga que se den cuenta de que se pueden obtener los mismos resultados multiplicando $8 \times 8 \times 3\frac{1}{2}$, para lo cual les basta con una calculadora. Así descubrirán que el resultado óptimo se obtiene al recortar medidas de $2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2}$, lo cual da un resultado de 250 cubos.

Actividades de ampliación

1 Quizá algún niño quiera llevar más allá la investigación para tratar de mejorar el resultado, calculando 2'75, 2'25, etc.

2 ¿Qué resultado se obtiene si empezamos con un cuadrado de 18 cm, o de 24? Llévelos a generalizar el resultado: el óptimo se obtiene cuando el cuadrado recortado mide $\frac{1}{6}$ de la longitud total. ¿Pueden averiguar así la respuesta para un cuadrado de 20 cm? (20 : 6 = 3'33.)

3 ¿Cómo averiguarías la capacidad de un cilindro? Esto conecta con las dos primeras de las unidades relacionadas que mencionamos.

Unidades relacionadas «Todo alrededor» (Unidad 6), «Tres y un poco» (Unidad 7), «El tesoro de Jacko el Cruel» (Libro 3).

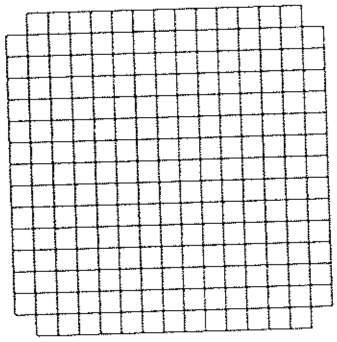
Nombre

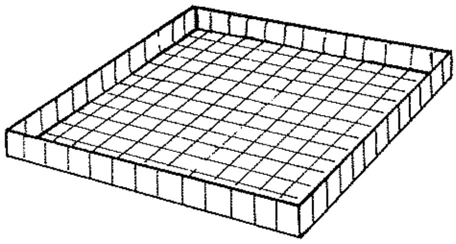
18 La caja

Qué necesitas: Papel cuadriculado, tijeras.

1 Recorta un cuadrado de 15 × 15 cm.

2 Recorta un cuadrado de un centímetro de cada esquina del cuadrado grande.

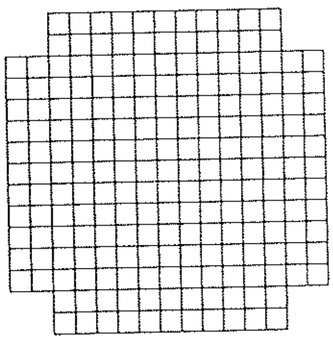




3 Dobla los lados para hacer una caja abierta por arriba.

4 ¿Cómo puedes medir la capacidad de esta caja? (Sin sobrepasar el borde.)

5 Ahora desdobla el cuadrado y recorta tres cuadrados más de un centímetro por cada esquina, de manera que te quede un cuadrado de 2 × 2 en cada una.



6 Vuelve a doblar los lados como antes.
¿Tiene esta nueva caja más capacidad que la anterior o menos?

7 Trata de averiguar de qué tamaño tienes que recortar el cuadrado por cada esquina para conseguir una caja con el máximo de capacidad.

Equipo Hoja de Trabajo 5. La Hoja de Trabajo 6 es una tabla que se puede utilizar a la hora de hacer un cuadro con los resultados, pero no se menciona en la hoja del alumno.

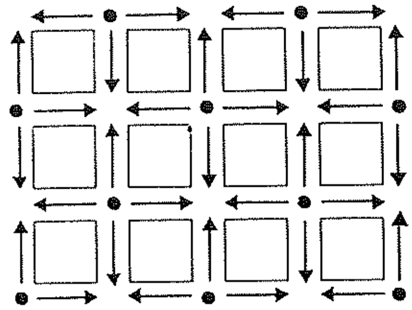
Datos que ayudan a la investigación Término: mapa «a vista de pájaro».

Conocimientos requeridos Métodos de prueba y error, reconocimiento de secuencias numéricas, generalización de los resultados.

Conceptos Secuencias numéricas, secuencias visuales, conceptos espaciales.

Puntos de enseñanza

La Hoja de Trabajo 5 resulta muy útil para ayudar a los niños a experimentar distintas colocaciones. Mientras hacen esto, empezarán a darse cuenta de que existe un esquema determinado para distribuir a los distintos policías: los que miran a dos lados, los que miran a tres y los que miran a cuatro.



Habría que animar a los niños a que se dieran cuenta de que no hay ningún caso en que el policía tenga que mirar a un solo lado, y que tampoco hay ninguna situación en la que haga falta emplear a más de dos policías que miren a dos lados. Pregúnteles:

«¿Cómo puedes estar seguro de que tienes el número menor posible de policías que necesitas cada vez? ¿Hay alguna regla?»

La Hoja de Trabajo 6 se les puede dar si necesitan alguna guía para colocar los resultados en orden. Los policías que miran a dos lados aparecen como «2 caminos», etc. Colocar en el cuadro los resultados de cada vez les ayudará a llevar a cabo un trabajo metódico. Deberían ser capaces de predecir los resultados de la columna 1 y la 3, comprobándolos luego con la Hoja de Trabajo 5. La columna 2 y la 4 son más difíciles de predecir, pero son muy parecidas entre sí. Hay que animar todo el tiempo a los niños a que expongan verbalmente tanto sus descubrimientos, como las secuencias que encuentren.

Manzanas	2 caminos	3 caminos	4 caminos	Total
1 × 1	2	0	0	2
2 × 1	2	1	0	3
3 × 1	2	2	0	4
4 × 1	2	3	0	5
5 × 1	2	4	0	6
6 × 1	2	5	0	7
7 × 1	2	6	0	8

Manzanas	2 caminos	3 caminos	4 caminos	Total
1 × 2	2	1	0	3
2 × 2	0	4	0	4
3 × 2	2	3	1	6
4 × 2	0	6	1	7
5 × 2	2	5	2	9
6 × 2	0	8	2	10
7 × 2	2	7	3	12

Manzanas	2 caminos	3 caminos	4 caminos	Total
1 × 3	2	2	0	4
2 × 3	2	3	1	6
3 × 3	2	4	2	8
4 × 3	2	5	3	10
5 × 3	2	6	4	12
6 × 3	2	7	5	14
7 × 3	2	8	6	16

Manzanas	2 caminos	3 caminos	4 caminos	Total
1 × 4	2	3	0	5
2 × 4	0	6	1	7
3 × 4	2	5	3	10
4 × 4	0	8	4	12
5 × 4	2	7	6	15
6 × 4	0	10	7	17
7 × 4	2	9	9	20

Actividades de ampliación

Algunos niños pueden expresar sus resultados por medio de palabras o de símbolos. La primera columna se puede resumir como $a + b$, siendo a y b el número de manzanas a lo largo y a lo ancho. ¿Pueden investigar expresiones similares para otras columnas? No es fácil, pero la investigación en sí ya es una actividad que merece la pena. De hecho, todos los resultados se pueden resumir de la siguiente manera: $\frac{(a + 1)(b + 1)}{2}$ si a o b (o los dos) son impares, y

$\frac{(a + 1)(b + 1) - 1}{2}$ si tanto a como b son pares.

¡Que investiguen situaciones en las que los policías tengan mejor vista!

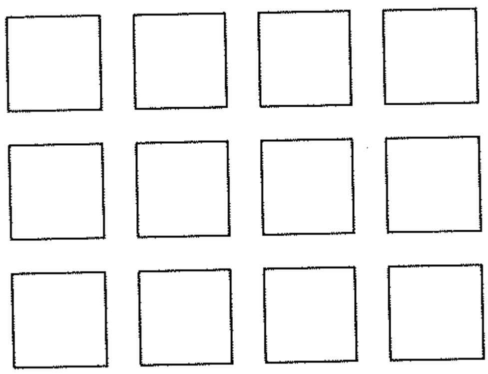
Unidades relacionadas «Laberintos» (Libro 1).

Nombre

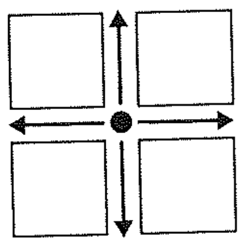
19 Los policías miopes

Qué necesitas: Copia de la Hoja de Trabajo número 5.

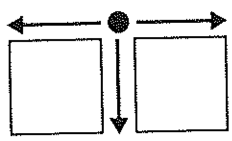
Este es el mapa de un barrio de una ciudad. Está compuesto por manzanas de edificios separadas por calles que se entrecruzan.



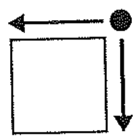
En algún lugar del barrio está escondido un ladrón. El inspector de policía tiene que colocar a sus hombres de manera que cubran todos los lados de cada manzana, pero tiene que utilizar el menor número de policías posible. Por desgracia, cada uno de los policías ve sólo a una manzana de longitud en cada dirección. Cada uno puede vigilar cuatro lados, así:



También pueden vigilar tres lados, así:

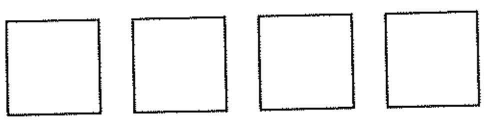


O sólo dos lados, así:

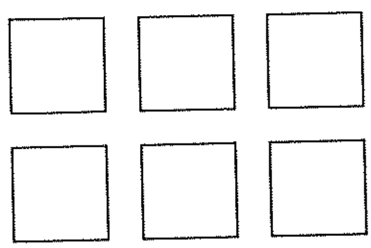


¿Cuál es el número menor de policías que puede utilizar el Inspector?

Prueba con distintas colocaciones, como esta:



o esta:



A ver si puedes encontrar alguna regla.

¿Has encontrado alguna regla para hallar el número menor de policías necesario para cada colocación?

La competición de los ceros y las cruces *Notas del profesor*

Equipo Papel y lápiz.

Datos que ayudan a la investigación Conocimiento del juego de los ceros y las cruces.

Conocimientos requeridos Aritmética básica, técnicas de resolución de problemas (incluyendo la comprobación.

Conceptos Secuencias numéricas (álgebra) y relaciones (números triangulares).

Puntos de enseñanza

Los niños pueden abordar el problema de muchas maneras.
Pueden:

- Explorar los casos más sencillos
  1 jugador = 0 partidas
  2 jugadores = 1 partida
  3 jugadores = 3 partidas
  4 jugadores = 6 partidas, etc.

- Representar los juegos
  Ana contra Ben   A c. B   A c. D
  Ana contra Clara   A c. C   B c. D
  Ben contra Clara   B c. C   C c. D, etc.

- Hacer un cuadro

Jugadores	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Partidas	1	3	6	10	15	21	28	36	45

Al buscar la secuencia deberían hallar esto:

1   3   6   10   15   21   28   36   45

+2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9

Una vez que hayan visto esto, deberían ser capaces de averiguar el número de partidas necesarias para una competición en la que participaran todos los niños de la clase. También pueden descubrir la *regla general*: el número de partidas es igual a la suma de los números enteros, desde 1, hasta 1 menos que el número de jugadores, es decir, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.

Cada jugador nuevo añade una partida más para cada uno de los que ya estaban. Los niños pueden utilizar esto para comprobar sus cálculos, y también sirve para explicar la regla anterior.

Anime a los niños a que planeen su propia competición de clase y la lleven a cabo.

Actividades de ampliación

1 Si Iberia realiza vuelos entre los 8 aeropuertos principales de Europa, ¿cuántas rutas significa eso? ¿Qué pasa si se cambia el número de aeropuertos? (Para esto pueden utilizar mapas, seleccionar sus propios destinos y dirigir sus líneas aéreas imaginarias.)
2 Si todas las aulas de tu colegio estuvieran unidas unas a otras por un teléfono directo, ¿cuántas líneas harían falta? (Dibuja un mapa, traza rutas para el cable, averigua cuánto cable hará falta y cuánto costaría cada llamada.)
3 Si se celebrara una fiesta en clase y cada uno tuviera que estrechar la mano a todos los demás, ¿cuántos apretones de mano habría?
4 Que investiguen las ligas deportivas. Por ejemplo: «¿Cuántos partidos hay que jugar en una liga regional, o nacional?»

Unidades relacionadas «Mirando hacia adelante» (Unidad 16), «Rutas» (Libro 2), «El rosetón» (Libro 3).

 Nombre ______________

20 La competición de los ceros y las cruces

Qué necesitas: Papel y lápiz.

En nuestra clase hemos hecho una competición de ceros y cruces, y cada uno tenía que jugar contra cada uno de los demás. Al principio sólo querían jugar tres niños: Ana, Juan y Clara.

1 Así que Ana jugó contra Juan y luego contra Clara. Luego Juan jugó contra Clara. ¿Cuántas partidas hubo en esa competición?
________ partidas.

2 La siguiente competición incluyó a Ana, Juan , Clara y David. ¿Cuántas partidas hubo en esa competición?
________ partidas.

3 En la siguiente competición se añadió José, así que ya eran cinco jugadores. ¿Cuántas partidas hubo esta vez?
________ partidas.

4 Luego se unió Elena, y luego Inés y Pablo. Ahora ya eran ocho. ¿Cuántas partidas se jugaron?
________ partidas.

¿Siguen alguna secuencia tus respuestas?

5 ¿Cuántas partidas se jugarían si hubiera diez jugadores en la competición? ________ partidas.

Trata de planear una competición entre tú y tus amigos.

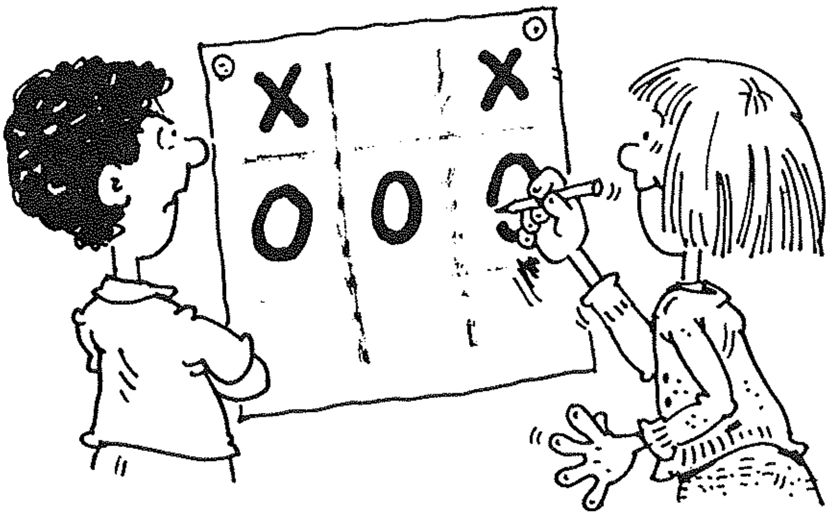


Tabla de notas

Esta tabla se puede utilizar para ir anotando la fecha en que cada alumno termina cada actividad

Nombre del alumno																		
1 La excursión del colegio																		
2 Las agujas del reloj																		
3 El huevo de tangram																		
4 Columnas de números																		
5 Cubos de soma																		
6 Todo alrededor																		
7 Tres y un poco																		
8 Diagonales																		
9 Braille																		
10 Las franjas de Möbius																		
11 Palíndromos																		
12 Cuadrados de colores																		
13 Figuras de áreas																		
14 Dibujos islámicos																		
15 Esquemas de cuadros en espiral																		
16 Mirando hacia adelante																		
17 Rectángulos áureos																		
18 La caja																		
19 Los policías miopes																		
20 La competición de los ceros y las cruces																		

Hoja de Trabajo 1

225	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183
224	169	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	184
223	168	121	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	134	185
222	167	120	81	50	51	52	53	54	55	56	57	92	135	186
221	166	119	80	49	26	27	28	29	30	31	58	93	136	187
220	165	118	79	48	25	10	11	12	13	32	59	94	137	188
219	164	117	78	47	24	9	2	3	14	33	60	95	138	189
218	163	116	77	46	23	8	1	4	15	34	61	96	139	190
217	162	115	76	45	22	7	6	5	16	35	62	97	140	191
216	161	114	75	44	21	20	19	18	17	36	63	98	141	192
215	160	113	74	43	42	41	40	39	38	37	64	99	142	193
214	159	112	73	72	71	70	69	68	67	66	65	100	143	194
213	158	111	110	109	108	107	106	105	104	103	102	101	144	195
212	157	156	155	154	153	152	151	150	149	148	147	146	145	196
211	210	209	208	207	206	205	204	203	202	201	200	199	198	197

225	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183
224	169	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	184
223	168	121	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	134	185
222	167	120	81	50	51	52	53	54	55	56	57	92	135	186
221	166	119	80	49	26	27	28	29	30	31	58	93	136	187
220	165	118	79	48	25	10	11	12	13	32	59	94	137	188
219	164	117	78	47	24	9	2	3	14	33	60	95	138	189
218	163	116	77	46	23	8	1	4	15	34	61	96	139	190
217	162	115	76	45	22	7	6	5	16	35	62	97	140	191
216	161	114	75	44	21	20	19	18	17	36	63	98	141	192
215	160	113	74	43	42	41	40	39	38	37	64	99	142	193
214	159	112	73	72	71	70	69	68	67	66	65	100	143	194
213	158	111	110	109	108	107	106	105	104	103	102	101	144	195
212	157	156	155	154	153	152	151	150	149	148	147	146	145	196
211	210	209	208	207	206	205	204	203	202	201	200	199	198	197

Manzanas	2 caminos	3 caminos	4 caminos	Total		Manzanas	2 caminos	3 caminos	4 caminos	Total		Manzanas	2 caminos	3 caminos	4 caminos	Total		Manzanas	2 caminos	3 caminos	4 caminos	Total	
1 × 1						1 × 2						1 × 3						1 × 4					
2 × 1						2 × 2						2 × 3						2 × 4					
3 × 1						3 × 2						3 × 3						3 × 4					

MATERIAL FOTOCOPIABLE

Investigando las Matemáticas

LIBRO 4

Investigando las matemáticas es una recopilación de estimulantes desafíos en dicha ciencia. La serie utiliza interesantes juegos y problemas para introducir conceptos y técnicas de resolución que se pueden ir ampliando progresivamente para llevar al niño a unos niveles de abstracción cada vez mayores. Cada actividad se presenta con un formato bien estudiado, con las notas para el profesor junto a las hojas del alumno, y todas se pueden fotocopiar para su uso, bien de manera individual, bien en grupo o en clase. **Investigando las matemáticas** propone unos trabajos flexibles que incluyen una tabla resumen donde se muestra cómo encaja cada unidad en la estructura general del conocimiento matemático.

ISBN 84-7600-577-6

9 788476 005774