matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 3

Isabel Echenique Urdiain

MATEMÁTICAS
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Educación Primaria

Gobierno de Navarra

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 4

Título: Matemáticas resolución de problemas
Autor: Isabel Echenique Urdiain
© GOBIERNO DE NAVARRA. Departamento de Educación
1.ª edición, 1.ª impresión: 2006
Diseño gráfico: Macunix® *ideas para estampar*
Impresión: Castuera
ISBN: 84-235-2888-0
Depósito legal: NA-2212/2006

Promociona y Distribuye: Fondo de Publicaciones del Gobierno de Navarra
Dirección General de Comunicación
C/ Navas de Tolosa, 21
Teléfono: 848 427 121
Fax: 848 427 123
31002 PAMPLONA
fondo.publicaciones@cfnavarra.es
www: cfnavarra.es/publicaciones

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 5

PRESENTACIÓN

Este segundo número de la Colección Instrumenta versa sobre la resolución de problemas matemáticos en Educación Primaria. Su estrategia se basa, más que en enseñar a los alumnos a resolver problemas, en enseñarles a pensar matemáticamente, es decir, que sean capaces de abstraer y aplicar ideas matemáticas en un amplio rango de situaciones. Abordar la enseñanza desde esta perspectiva requiere un proceso lento y continuo que debe iniciarse desde los primeros años de la etapa.

En la primera parte, más teórica, se presentan algunas ideas generales sobre las competencias matemáticas y numerosas pautas para seguir un proceso ordenado en la resolución de distintos tipos de problemas. En la segunda, se ofrece un modelo de taller para la resolución de problemas organizado por ciclos y cursos. En él se proponen estrategias generales de aplicación y numerosas actividades para realizar. La publicación se completa con un CD-ROM que recoge numerosos ejemplos para trabajar la resolución de problemas de distintos tipos, al tiempo que se aportan ideas para que el profesorado diseñe sus propias propuestas y actividades.

Esta obra está elaborada desde el convencimiento de que la resolución de problemas es lo que realmente da sentido a los contenidos matemáticos de la etapa de Educación Primaria. Además, fomentar la capacidad para entender, razonar y aplicar correctamente los conocimientos adquiridos facilita la capacidad del alumnado para enfrentarse a la detección y resolución de problemas en los distintos ámbitos en los que tendrá que desenvolverse.

Esperamos que este material, ayude al profesorado en la difícil tarea de elevar el nivel de competencias básicas de los niños y niñas de nuestra comunidad.

Luis Campoy Zueco

Consejero de Educación

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 6

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 7

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN 9

PRIMERA PARTE: MATEMÁTICAS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. TEORÍA

LAS MATEMÁTICAS EN NUESTRA SOCIEDAD 15

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS 19

LA IMPORTANCIA DE SEGUIR UN PROCESO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS 23
1. ¿Cómo se resuelven los problemas matemáticos en la escuela? 25
2. ¿Cómo se debe afrontar la resolución de problemas? 26
3. El método en la resolución de problemas 27
4. Fases del proceso de resolución de problemas 28

TIPOLOGÍA DE PROBLEMAS EN LA ETAPA DE EDUCACIÓN PRIMARIA 29
1. Problemas aritméticos 30
2. Problemas geométricos 39
3. Problemas de razonamiento lógico 40
4. Problemas de recuento sistemático 42
5. Problemas de razonamiento inductivo 42
6. Problemas de azar y probabilidad 43

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 8

SEGUNDA PARTE: TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. PRÁCTICA

EL TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS 49

UN MODELO DE TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR CICLOS 51

1. Primer ciclo 52
   - Objetivos. Contenidos. Típos de problemas. Metodología de trabajo. 53
   - Procesos heurísticos 55

   1.1. Primer curso 57
   - Actividades 57
   - Evaluación 67

   1.2. Segundo curso 70
   - Actividades 70
   - Evaluación 79

2. Segundo ciclo 84
   - Objetivos. Contenidos. Típos de problemas. Metodología de trabajo. 84
   - Procesos heurísticos 87

   2.1. Tercer curso 89
   - Actividades 89
   - Evaluación 103

   2.2. Cuarto curso 108
   - Actividades 108
   - Evaluación 118

3. Tercer ciclo 123
   - Objetivos. Contenidos. Típos de problemas. Metodología de trabajo. 123
   - Procesos heurísticos 125

   3.1. Quinto curso 128
   - Actividades 128
   - Evaluación 138

   3.2. Sexto curso 142
   - Actividades 142
   - Evaluación 153

CONCLUSIONES 157

BIBLIOGRAFÍA 159

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 9

Introducción

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 10

"Casi todos los problemas matemáticos se pueden resolver directamente aplicando reglas, fórmulas y procedimientos mostrados por el profesor o dados en el libro. Por tanto el pensamiento matemático consiste en aprender, memorizar y aplicar reglas, fórmulas y procedimientos" (Garofalo, 1989).

"Sólo hay una manera de responder correctamente a cada problema; normalmente es el método que el profesor acaba de mostrar recientemente en clase" (Schoenfeld, 1992)

"Los problemas de matemáticas son tareas para aplicar reglas aprendidas, por tanto, se pueden resolver fácilmente en pocos pasos" (Frank, 1988).

"Los ejercicios de los libros de matemáticas se pueden resolver con los métodos presentados en el libro; además, han de ser resueltos con los métodos presentados en el apartado del libro en el que se proponen" (Garofalo, 1989)

"La resolución de problemas es una actividad de reconocimiento/aplicación de las técnicas trabajadas en clase y a la vez de acreditación de las técnicas aprendidas" (Vila, 2001)

Estos pensamientos son creencias muy extendidas entre personas que conciben los problemas bajo un aspecto puramente formal e instrumental, el de la aplicación de los contenidos previamente aprendidos. Además, a ellas se pueden añadir otras como: "si se es bueno en matemáticas, se es bueno resolviendo problemas" y, por el contrario, "si se tiene dificultades en matemáticas, se tendrán dificultades resolviendo problemas" (Woods, 1987). Responden a una percepción de las matemáticas excesivamente mecanicista.

Bien es cierto que es necesario interiorizar determinados contenidos relevantes propios del área para hacer frente a la resolución de problemas matemáticos. Pero también intervienen en el proceso aspectos internos como el esfuerzo y la concentración, el interés, el gusto por aceptar retos, la tranquilidad para afrontarlos, la perseverancia, la creatividad, la autoconfianza, los estados emocionales…, así como los propios procesos de investigación: analizar los datos del enunciado, su relevancia, pensar en posibles vías de resolución…que, aun no formando parte de los contenidos propiamente matemáticos, desarrollan un papel muy importante y ayudan a resolver con éxito la tarea.

Polya (1965) consideraba que el profesor tiene en sus manos la llave del éxito ya que, si es capaz de estimular en los alumnos la curiosidad, podrá despertar en ellos el gusto por el pensamiento independiente; pero, si por el contrario dedica el tiempo a ejercitarles en operaciones de tipo rutinario, matará en ellos el interés. Es necesario crear en clase un ambiente que favorezca la investigación, el descubrimiento, la búsqueda, la desinhibición - cuando se trate de plantear preguntas o dudas - , el respeto a los compañeros, las actitudes de colaboración… etc.

Más que enseñar a los alumnos a resolver problemas, se trata de enseñarles a pensar matemáticamente, es decir, a que sean capaces de abstraer y aplicar ideas matemáticas a un amplio rango de situaciones y, en este sentido, los propios problemas serán las "herramientas" que les llevarán a ello.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 11

Abordar la enseñanza bajo esta perspectiva es un proceso lento, que debe iniciarse en los primeros años de la escolaridad obligatoria. Llevaría además a un cambio sustancial en las creencias con las que se ha iniciado esta introducción.

Elevar el nivel de competencias básicas de los niños y niñas de Educación Infantil y Primaria es, actualmente, un objetivo primordial en nuestro sistema educativo. "…Descubrir las posibilidades de la propia capacidad para entender, razonar y aplicar correctamente los conocimientos adquiridos, son acciones que, convertidas en hábitos, facilitan la capacidad del alumnado para enfrentarse a la detección y resolución de problemas en los distintos ámbitos en los que tendrá que desenvolverse…"

Esta publicación, dirigida al profesorado que trabaja en Educación Primaria, pretende servir de ayuda en el tratamiento de la resolución de problemas, ya que es lo que realmente da sentido a los contenidos matemáticos de la etapa. "La resolución de problemas debiera ser el foco de las matemáticas escolares" (NCTM, 1980).

Para conseguir que los alumnos sean competentes en esta disciplina, es necesario empezar por adoptar acuerdos comunes como centro:

- En primer lugar, es importante tomar conciencia de la situación. Para ello todos los profesores de la etapa que imparten el área deberían reflexionar conjuntamente sobre la dificultad de la tarea y la necesidad de desarrollar en los alumnos una serie de capacidades que favorezcan la consecución del fin.
- Tomar medidas comunes, es decir, consensuadas, respecto al proceso a seguir:
  - Acordar un método de resolución que se aplique a lo largo de la etapa.
  - Secuenciar la tipología de problemas que se han de trabajar en cada ciclo y curso.
  - Determinar la metodología y el agrupamiento de los alumnos.
  - Temporalizar y determinar las posibilidades de elaborar y poner en práctica en el aula talleres de resolución de problemas o bien trabajarlos dentro del desarrollo normal de clase (menos aconsejable).
  - Determinar qué evaluar en la resolución de problemas, cómo, cuándo y con qué instrumentos (diseño de los mismos).
  - Analizar dificultades encontradas en los alumnos y estudiar la manera de afrontarlas.

A lo largo de las páginas de este libro, se pueden encontrar pautas que sirven de ayuda y que facilitan la reflexión sobre los aspectos reseñados. Para su mejor localización se establecen tres partes diferenciadas:

- La primera comienza con la presentación de algunas ideas generales sobre las competencias matemáticas para el normal desenvolvimiento en la sociedad de nuestros días. Después se centra en la resolución de problemas y en la tipología correspondiente a la etapa de Educación Primaria.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 12

- La segunda parte está dedicada a cómo trabajar sobre el tema en los tres ciclos, a partir del diseño y la elaboración de talleres de resolución de problemas. Para ello se sugiere la dedicación de la sesión semanal contemplada en el horario escolar, en la que el ambiente de clase y la disposición tanto del profesor/a como de los alumnos/as sean favorables para el tratamiento de este tipo de actividades. Se presentan una serie de estrategias generales de aplicación y actividades que bien podrían trabajarse en cada uno de los cursos, aplicando una metodología que queda recogida en los apartados correspondientes.
- Por último, y como complemento, se incluye un CD en el que se recogen los materiales con los que se ha trabajado en un seminario de formación que se desarrolló durante los cursos 2003-2004 y 2004-2005 en el CAP de Pamplona, cuyo título fue "Aprender matemáticas… para resolver problemas".

Estos materiales pretenden ser una ejemplificación de cómo se puede trabajar el tema en los diferentes ciclos y cursos de la etapa, al tiempo que aportan ideas para que, si lo cree conveniente, el profesorado realice los cambios que considere oportunos o, en su caso, diseñe sus propias sesiones.

Agradecimientos

Mi agradecimiento personal y profesional a Luis Pereda, experto en Didáctica de Matemáticas, con quien tanto he aprendido en estos años y me ha ayudado a elaborar y mejorar esta publicación. Por sus atentas lecturas, detalladas revisiones e interesantes aportaciones.

Debo agradecer también a todos los profesores que participaron en el Seminario "Aprender matemáticas… para resolver problemas" porque juntos disfrutamos de enriquecedoras discusiones que nos ayudaron a reflexionar sobre nuestras propias experiencias en torno al tema, así como por las aportaciones realizadas para mejorar los talleres de resolución de problemas tras su puesta en práctica con los alumnos. Todo ello quedó recogido en el CD-ROM que acompaña a esta publicación.

A los profesionales de la educación con los que he tenido la suerte de trabajar y mejorar mi formación personal.

Mi reconocimiento además para los profesores/as que con su buena disposición me ayudaron con sus lecturas, revisiones y aportaciones para que este trabajo hoy salga adelante.

Gracias, porque sin su colaboración esta obra no hubiera sido posible.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 13

Primera Parte

Matemáticas y resolución de problemas. Teoría

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 14

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 15

I

LAS MATEMÁTICAS EN NUESTRA SOCIEDAD

¿Qué significa ser matemáticamente competente?

El hecho de que en nuestra sociedad todas las personas debieran tener una formación suficiente para desenvolverse con normalidad en el discurrir de sus tareas diarias es algo indiscutible. Una parte importante de los saberes y destrezas necesarios para que eso ocurra provienen del estudio de la Lengua y de las Matemáticas. La primera es imprescindible para comprender las informaciones que nos llegan expresadas por escrito o de forma oral y, fundamental, para expresar nuestros sentimientos o ideas en distintos contextos de la vida diaria. El dominio de las matemáticas es así mismo determinante para enfrentarse con éxito a muchas situaciones cotidianas.

Los conocimientos que una persona adulta utiliza con mayor frecuencia en sus relaciones y ocupaciones diarias se cimientan en los aprendizajes adquiridos durante la etapa de la escolaridad obligatoria. Es, por tanto, muy importante que durante este tiempo se trabaje para conseguir que nuestros alumnos lleguen a ser competentes en estos dos ámbitos educativos.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 16

Podemos decir de las Matemáticas que es una materia que generalmente despierta sentimientos encontrados. Nos podemos topar con personas que, debido a las vivencias que han tenido, manifiestan una actitud de rechazo, tienen baja autoestima para enfrentarse con éxito a la resolución de situaciones en las que deban hacer uso de sus conocimientos matemáticos y, por ello, delegan estas tareas en terceras personas. Otras han experimentado vivencias que les han resultado atractivas, gratificantes, motivadoras y han despertado en ellas una actitud positiva y abierta al intentar resolver situaciones matemáticas en su vida diaria.

Como profesionales de la educación, nos corresponde a los profesores trabajar para conseguir que nuestros alumnos desarrollen al máximo sus capacidades, aunque no todas las personas llegarán al mismo nivel. De esa manera, podremos sentir la satisfacción de haber contribuido con nuestra ayuda a que el día de mañana puedan desenvolverse con soltura en la sociedad que les toque vivir. Uno de nuestros objetivos es que sean capaces de enfrentarse sin miedos a las situaciones habituales para las cuales necesitan tener unas competencias básicas. Dicho esto, no es menos cierto que nuestro esfuerzo no sustituye al que el alumno debe realizar para ir formándose en estas áreas.

Una persona matemáticamente competente es aquella que comprende los contenidos y procesos matemáticos básicos, los interrelaciona, los asocia adecuadamente a la resolución de diversas situaciones y es capaz de argumentar sus decisiones.

Conseguir esta madurez es un proceso largo y costoso, que no se logra en términos de todo o nada. Es necesario ir trabajando las matemáticas en los años de escolaridad obligatoria, por medio de una variedad de experiencias que desarrollen en el alumno capacidades que le permitan proyectar sus conocimientos más allá de las situaciones netamente escolares. Eso no se alcanza a través de la repetición sistemática de ejercicios de aplicación o de algoritmos de cálculo, en los que en ningún momento la persona debe justificar la utilización de los contenidos que intervienen en el proceso.

Una forma de dirigir nuestros pasos hacia el objetivo de dotar a las personas de unas capacidades que les permitan desenvolverse con cierta soltura en situaciones matemáticas de la vida cotidiana, desde la Educación Primaria, consiste en proponer a nuestros alumnos la resolución de actividades que les obliguen a reflexionar sobre los conocimientos matemáticos que poseen.

Para ello conviene seleccionar una serie de capacidades generales, como las que a modo de ejemplo se recogen a continuación, que permitan organizar los diferentes aprendizajes del área a lo largo de las unidades didácticas y de la etapa. Dichas capacidades pueden ser:

- *Comprensión y comunicación.* Se refiere a capacidades relacionadas con la adquisición y expresión de conceptos. Puede hablarse por tanto de acciones como identificar, relacionar, aplicar; así como de describir, expresar, explicar, representar, etc.

  La comprensión conceptual se asocia a la representación mental y a la relación que se establece entre diferentes conceptos. Se pone de manifiesto al resolver determinadas situaciones matemáticas.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 17

El desarrollo de la capacidad de comunicación se irá consiguiendo en la medida en que se ofrezcan oportunidades para la expresión de los diferentes lenguajes y recursos propios de las matemáticas. Indudablemente, propiciar la expresión oral facilitará la consolidación de los aprendizajes adquiridos. Implica que las personas, en nuestro caso los alumnos, lleguen a ser capaces de explicar y justificar el proceso seguido en la ejecución de tareas propuestas, para que los demás comprendan la razón de por qué lo han resuelto de una determinada manera.

- *Cálculo procedimental.* Se refiere no solo a conocer los procedimientos matemáticos, sino además a cuándo y cómo usarlos de un modo apropiado, correcto y eficaz.

  El desarrollo de las destrezas procedimentales debe relacionarse siempre con la comprensión conceptual, que conlleva su uso como instrumento de resolución. Si la persona no está familiarizada o no domina los conceptos, aprenderá los procedimientos de forma memorística, paso a paso, hará que resulte más complicada su aplicación y no generará un verdadero aprendizaje. Que los procedimientos aparezcan de forma aislada o sin justificación alguna, favorece su olvido y propicia que las Matemáticas se conciban como un conjunto de recetas y métodos inconexos.

  Durante mucho tiempo, las destrezas en aspectos procedimentales se han asociado únicamente al cálculo aritmético y algorítmico. Sin embargo, es preciso considerarlas también en estimación de magnitudes, redondeo, tablas, dibujos gráficos, uso de herramientas de dibujo, etc.

- *Resolución de problemas.* Es una competencia en la que se pone de manifiesto la habilidad de las personas y el grado de desarrollo de las destrezas anteriormente expuestas. Es la principal finalidad del área, entendida no solamente como la resolución de situaciones problemáticas propias de la vida cotidiana, sino también de las que no resulten tan familiares.

  La resolución de problemas precisa de una planificación de las acciones a llevar a cabo, que ayuden a situar y utilizar adecuadamente los conocimientos adquiridos.

- *La actitud.* Una actitud positiva hacia las matemáticas viene determinada por varios factores: el enfoque que se le dé al área en la etapa de escolaridad, las oportunidades de colaboración activa que se les brinde a los alumnos en el desarrollo de las sesiones, el ambiente del aula, el tipo de tareas matemáticas que se les demande, etc. Pero en cualquier caso la precisión, el rigor, la exactitud… son valores que determinan el pensamiento matemático. Todo esto influirá notablemente en el éxito educativo conseguido al finalizar el periodo de enseñanza obligatoria.

Todas estas capacidades deben trabajarse conjuntamente estableciendo relaciones entre ellas, ya que en muchas situaciones confluyen. Además, resumen lo que el currículum presenta como objetivos generales para Matemáticas.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 18

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 19

II

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS

Concepto de problema matemático
Diferencias entre problemas y ejercicios

La resolución de problemas es la actividad más complicada e importante que se plantea en Matemáticas. Los contenidos del área cobran sentido desde el momento en que es necesario aplicarlos para poder resolver una situación problemática. Cuando se trabajan en el aula de forma sistemática, dando opción al alumno a que razone y explique cuál es su forma de afrontar y avanzar en el desarrollo de la actividad, salen a la luz las dificultades que el propio proceso de resolución de problemas conlleva. Dichas dificultades están relacionadas en algunos casos con la falta de asimilación de contenidos propios de los diferentes bloques del área; en otras ocasiones se basan en la comprensión lectora, en el uso del lenguaje o en el desconocimiento de conceptos propios de otras disciplinas que intervienen en la situación planteada. No obstante, suponen una importante fuente de información para dar a conocer los aspectos que se debieran retomar e incorporarlos nuevamente al proceso de enseñanza-aprendizaje.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 20

Un problema es una situación que un individuo o grupo quiere o necesita resolver y para la cual no dispone, en principio, de un camino rápido y directo que le lleve a la solución; consecuentemente eso produce un bloqueo. Conlleva siempre un grado de dificultad apreciable, es un reto que debe ser adecuado al nivel de formación de la persona o personas que se enfrentan a él. Si la dificultad es muy elevada en comparación con su formación matemática, desistirán rápidamente al tomar consciencia de la frustración que la actividad les produce. Por el contrario, si es demasiado fácil y su resolución no presenta especial dificultad ya que desde el principio ven claramente cuál debe ser el proceso a seguir para llegar al resultado final, esta actividad no será un problema para ellos sino un simple ejercicio. De este modo podemos decir que la actividad que para alumnos de ciertas edades puede concebirse como un problema, para otros no pasa de ser un mero ejercicio.

Los ejercicios no implican una actividad intensa de pensamiento para su resolución. Al realizarlos, el alumno se da cuenta muy pronto de que no le exigen grandes esfuerzos. Generalmente tienen una sola solución, son actividades de entrenamiento, de aplicación mecánica de contenidos o algoritmos aprendidos o memorizados. Le sirven al profesor para comprobar que los alumnos han automatizado los conocimientos que él pretendía enseñarles y, a su vez, al alumno para consolidar dichas adquisiciones.

Hacer ejercicios en serie puede provocar aburrimiento, ya que generalmente son repetitivos y pueden resultar poco interesantes. Sin embargo, en algunas ocasiones sirven para motivar a los alumnos, pues de esa manera toman conciencia de los conocimientos que van adquiriendo. Son un tipo de actividades muy abundantes en los libros de texto. Como profesores/as no debemos abusar de su realización, sino seleccionar cuidadosamente aquellos que nos resultan más útiles para evaluar el grado de comprensión de los conceptos y la adquisición de algoritmos matemáticos por parte de los alumnos.

Por contraposición, los problemas no se resuelven con la aplicación de una regla o receta conocida a priori. Exigen al resolutor sumergirse en su interior para navegar entre los conocimientos matemáticos que posee y rescatar de entre ellos los que pueden serle útiles para aplicar en el proceso de resolución. Puede servirse de experiencias anteriores que hagan referencia a situaciones parecidas, para rememorar cuál fue el camino o vía seguida, en caso de poder volver a utilizarlos en esta nueva situación.

Los problemas pueden tener una o varias soluciones y en muchos casos existen diferentes maneras de llegar a ella(s). Cuando un alumno o un grupo se implica en esta actividad, se vuelca en ella, muestra entusiasmo y desarrolla su creatividad personal. Es frecuente manifestar cierto nivel de satisfacción al descubrir el camino que le conduce al resultado final como fruto de la investigación llevada a cabo. El tiempo que se dedica a la resolución de un problema es bastante mayor que el que lleva la realización de un ejercicio.

El cuadro que viene a continuación recoge de una manera más gráfica y comparada las principales diferencias que existen entre estos dos tipos de actividades:

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 21

Características de los ejercicios	Características de los problemas
Se ve claramente qué hay que hacer.	Suponen un reto.
La finalidad es la aplicación mecánica de algoritmos.	La finalidad es ahondar en los conocimientos y experiencias que se poseen, para rescatar aquellos que son útiles para llegar a la solución esperada.
Se resuelven en un tiempo relativamente corto.	Requieren más tiempo para su resolución.
No se establecen lazos especiales entre el ejercicio y la persona que lo resuelve.	La persona que se implica en la resolución lo hace emocionalmente. El bloqueo inicial, debido a que la situación le desconcierta, dará paso a la voluntariedad y perseverancia por encontrar la solución y, por último, al grado de satisfacción una vez que esta se ha conseguido
Generalmente tienen una sola solución.	Pueden tener una o más soluciones y las vías para llegar a ellas pueden ser variadas.
Son muy numerosos en los libros de texto.	Suelen ser escasos en los libros de texto.

Por último es muy importante que, cuando vayamos a trabajar problemas con los alumnos, les propongamos unas actividades con las que puedan sentirse retados según sus capacidades matemáticas. De este modo podrán experimentar el gusto por la investigación y el descubrimiento de la solución a la situación planteada.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 22

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 23

III

LA IMPORTANCIA DE SEGUIR UN PROCESO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. ¿Cómo se resuelven los problemas matemáticos en la escuela?

Durante muchos años y todavía en nuestros días, la mayor parte de los problemas matemáticos que se proponen en clase tienen como finalidad aplicar los contenidos o algoritmos que se han estudiado en la unidad didáctica de la que forman parte. Estas actividades no potencian la búsqueda de procedimientos de resolución, sino que, más bien al contrario, a menudo se presentan como baterías de problemas que los alumnos resuelven de forma mecánica. Generalmente se les pide que los trabajen de forma individual, no tienen por qué poner nada en común con nadie (salvo que el profesor les pregunte a ellos directamente), ni discutir o consensuar cuáles son los motivos que les llevan a utilizar tal o cual algoritmo, contenido, etc. En muchos casos se resuelven como tarea para casa y al día siguiente se corrigen en la pizarra para toda la clase.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 24

El resultado de todo este proceso es que cuando a los estudiantes se les proponen problemas que hacen referencia a contenidos que estudiaron en un tiempo pasado, que no tiene por qué ser lejano, en muchos casos ya no recuerdan qué es lo que deben aplicar para resolver con éxito la actividad.

Como profesores, nos damos cuenta entonces de la cantidad de lagunas que tienen los alumnos. A menudo pensamos que han asimilado contenidos y nos basamos para ello en que resuelven bien las actividades correspondientes. Quizá esto nos deba hacer reflexionar sobre la naturaleza de las mismas. En muchos casos son baterías de ejercicios, como se ha mencionado anteriormente, en las que los alumnos se van adiestrando en la ejercitación de unos procedimientos mecánicos que no les exigen un esfuerzo especial, salvo el de memorizar el proceso para su aplicación de una forma correcta. Pero de ningún modo demuestran que el alumno ha comprendido e interiorizado los conceptos que se han trabajado en la unidad didáctica.

2. ¿Cómo se debe afrontar la resolución de problemas?

Una modalidad de aprendizaje de las matemáticas es la que se lleva a cabo a través de la resolución de problemas de forma activa, como fruto de variadas reflexiones sobre los contenidos conceptuales y procedimentales que se poseen, para retomar en cada momento aquello que puede ser útil.

Puesto que los problemas matemáticos son las actividades más complejas que se le proponen al alumno al abordar este área, es necesario ser consecuentes en su tratamiento. Enseñar a resolver problemas debe figurar entre las intenciones educativas del currículum escolar, ha de ser algo que nos debemos proponer. No basta con que pongamos problemas matemáticos para que los alumnos los resuelvan. Es necesario que les demos un tratamiento adecuado, analizando estrategias y técnicas de resolución, "verbalizando" el pensamiento y contrastándolo con el de otras personas. Debemos enseñarles procesos de resolución a través de buenos modelos, con ejemplos adecuados, dedicar un espacio en el horario escolar y conseguir un clima propicio en el aula que favorezca la adquisición de las correspondientes destrezas y hábitos. Es cierto que cada problema tiene unas peculiaridades concretas, sin embargo hay un proceso común a la mayor parte de ellos que es el método de resolución y en la enseñanza del mismo es precisamente donde debemos insistir.

La escuela es el lugar donde los alumnos deben aprender a resolver problemas y, si no dedicamos a ello el tiempo que la actividad requiere, difícilmente se logrará en años posteriores. Como Polya dijo: "la resolución de problemas es un arte práctico, como nadar o tocar el piano. De la misma forma que es necesario introducirse en el agua para aprender a nadar, para aprender a resolver problemas, los alumnos han de invertir mucho tiempo

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 25

enfrentándose a ellos". Poco a poco irán interiorizando estrategias y sugerencias de aplicación, en la medida en que las utilizan para resolver diferentes situaciones.

En la etapa de Educación Primaria deben asentarse las bases que contribuirán a que los alumnos sean capaces de enfrentarse con un mayor porcentaje de éxito a este tipo de actividades. Un buen resolutor de problemas se va formando poco a poco y se identifica porque dispone de:

- Un buen bagaje de conocimientos matemáticos claros, estructurados e interconectados que le permiten enfrentarse a las diferentes situaciones.
- Un método de resolución acompañado de una serie de estrategias heurísticas para poder hacer uso de ellas durante el proceso.
- Una actitud positiva al aceptar el reto que se le propone. Es perseverante y disfruta resolviendo problemas.

Esto no nos debe llevar a creer que el buen resolutor es capaz de resolver correctamente cualquier problema matemático que se le presente. Sin embargo, sí que cuenta con unos buenos procedimientos de los que hará uso al enfrentarse a la resolución de la situación-problema.

3. El método en la resolución de problemas

Existen muchos enfoques en la resolución de problemas dado el gran número de autores que han realizado estudios e investigaciones en este tema. La preocupación por conseguir buenos resolutores ha llevado a determinar diferentes fases en el proceso de resolución. George Polya (1949) estableció cuatro etapas que después sirvieron de referencia para muchos planteamientos y modelos posteriores, en los que se fueron añadiendo nuevos matices, si bien el esquema básico de todos ellos se mantiene. Las etapas del proceso de resolución que determina Polya son las siguientes:

- Comprensión del problema
- Concepción de un plan
- Ejecución del plan
- Visión retrospectiva.

Estos cuatro pasos, que se conciben como una estructura metodológica, podrían aplicarse también a problemas incluso no matemáticos de la vida diaria.

Al poner en práctica este método en Educación Primaria, es necesario tener en cuenta que su aplicación y la importancia concedida a cada una de las fases debe adecuarse a las edades y desarrollo intelectual de los alumnos con los que se trabaje.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 26

4. Fases del proceso de resolución de problemas

La resolución de problemas requiere una actividad mental que se pone en funcionamiento desde el momento en que se nos presenta el enunciado y lo asumimos como un reto, hasta que damos por terminado el problema una vez hallada su solución. Todo este encadenamiento de situaciones, planteamientos y justificaciones que nos hacemos tienen lugar en silencio, normalmente no las expresamos, lo asumimos como algo personal e individual.

Si queremos que nuestros alumnos aprendan a resolver problemas, debemos dedicar tiempo a ejercer como modelos de buenos resolutores y explicitar los procesos de pensamiento que tienen lugar, para que tomen conciencia de ellos. La mayor parte de los aprendizajes los hacemos por imitación a través de la observación y la práctica, de una forma más o menos reiterada, de aquello que deseamos aprender. Por tanto, deberemos ofrecerles situaciones para que puedan ejercitarse en los procesos mentales que conlleva la resolución de problemas.

Es muy importante que cuando se trabajen en clase, los alumnos tengan una disposición abierta hacia los problemas, se tomen el trabajo con tranquilidad (las prisas nunca son buenas consejeras), abandonen de momento lápices, pinturas o cualquier otro objeto que les pueda servir para escribir, se concentren en la lectura del enunciado y se dispongan a intercambiar opiniones.

Una vez conseguido el clima de trabajo, podremos empezar con la primera fase del modelo de resolución.

1ª fase. Comprensión del problema

Implica entender tanto el texto como la situación que nos presenta el problema, diferenciar los distintos tipos de información que nos ofrece el enunciado y comprender qué debe hacerse con la información que nos es aportada, etc.

Podríamos considerar el texto de los enunciados matemáticos como una tipología particular en la que se expresa la situación a resolver pero no el modo de llevarla a cabo. Su descubrimiento forma parte del trabajo del resolutor, el cual debe decodificar el mensaje contenido en el enunciado y trasladarlo a un lenguaje matemático que le permita avanzar en el proceso de resolución. De aquí se deduce que las dificultades que pueden aparecer en la comprensión del enunciado de un problema son diferentes de las que surgen en la comprensión de un texto de otra índole.

2ª fase. Concepción de un plan

Es la parte fundamental del proceso de resolución de problemas. Una vez comprendida la situación planteada y teniendo clara cuál es la meta a la que se quiere llegar, es el momento de planificar las acciones que llevarán a ella. Es necesario abordar cuestiones

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 27

como para qué sirven los datos que aparecen en el enunciado, qué puede calcularse a partir de ellos, qué operaciones utilizar y en qué orden se debe proceder.

Es muy importante enunciar la planificación por escrito, de forma clara, simplificada y secuenciada. Servirá, además de para controlar el proceso de resolución por parte del alumno, para que el profesor conozca el pensamiento matemático desarrollado durante la ejecución de la tarea.

En esta fase puede ser útil el uso de esquemas que ayuden a clarificar la situación a resolver, así como el proceso a seguir. Del mismo modo puede ser práctico recordar si se han abordado con anterioridad problemas similares y qué metodología se siguió,...

3ª fase. Ejecución del plan

Consiste en la puesta en práctica de cada uno de los pasos diseñados en la planificación. Es necesaria una comunicación y una justificación de las acciones seguidas: *primero calculo…*, *después…*, *por último…* hasta llegar a la solución. Esta fase concluye con una expresión clara y contextualizada de la respuesta obtenida.

4ª fase. Visión retrospectiva

Un problema no termina cuando se ha hallado la solución. La finalidad de la resolución de problemas es aprender durante el desarrollo del proceso, y este termina cuando el resolutor siente que ya no puede aprender más de esa situación.

Desde este punto de vista, es conveniente realizar una revisión del proceso seguido, para analizar si es o no correcto el modo como se ha llevado a cabo la resolución. Es preciso:

- Contrastar el resultado obtenido para saber si efectivamente da una respuesta válida a la situación planteada.
- Reflexionar sobre si se podía haber llegado a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos.
- Decir si durante el proceso se han producido bloqueos y cómo se ha logrado avanzar a partir de ellos.
- Pensar si el camino que se ha seguido en la resolución podría hacerse extensible a otras situaciones,…

Todos estos aspectos, que normalmente no se trabajan en el aula con los alumnos, sistematizan los procedimientos para la resolución de problemas de forma activa. Es necesario *verbalizar* los procesos que se dan interiormente. De esta manera, podremos conocer, por un lado, la forma de razonar y proceder, actuar... de los alumnos y, por otro, tener acceso a una serie de lagunas o malas interpretaciones referidas a contenidos conceptuales o procedimentales, que a veces es difícil detectar.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 28

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 29

IV

TIPOLOGÍA DE PROBLEMAS EN LA ETAPA DE EDUCACIÓN PRIMARIA

En los libros que se dedican al estudio del tema que nos ocupa, pueden contemplarse diversas clasificaciones. La que se presenta a continuación pretende servir de ayuda para recordar la variedad de problemas que debieran ser tratados dentro de esta etapa. A pesar de que es a los primeros, los llamados aritméticos, a los que más tiempo se dedicará por ser los propios de Educación Primaria, no por ello hay que descuidar los demás tipos en los que se trabajará a modo de iniciación.

Una breve explicación de cada uno de ellos y algunos ejemplos, nos ayudarán a comprender mejor qué se entiende por estas tipologías.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 30

TIPOS DE PROBLEMAS A TRABAJAR EN EDUCACIÓN PRIMARIA

- Problemas aritméticos
  - de primer nivel:
    - aditivo-sustractivos
      - de cambio
      - de combinación
      - de comparación
      - de igualación
    - de multiplicación - división
      - de repartos equitativos
      - de factor N
      - de razón
      - de producto cartesiano
  - de segundo nivel
  - de tercer nivel
- Problemas geométricos
- Problemas de razonamiento lógico
- Problemas de recuento sistemático
- Problemas de razonamiento inductivo
- Problemas de azar y probabilidad

1. Problemas aritméticos

Son aquellos que, en su enunciado, presentan datos en forma de cantidades y establecen entre ellos relaciones de tipo cuantitativo, cuyas preguntas hacen referencia a la determinación de una o varias cantidades o a sus relaciones, y que necesitan la realización de operaciones aritméticas para su resolución.

Se clasifican en problemas aritméticos de primer, segundo o tercer nivel teniendo en cuenta el número de operaciones que es necesario utilizar para su resolución, así como la naturaleza de los datos que en ellos aparecen.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 31

1.1. Problemas aritméticos de primer nivel

Podrían llamarse también de un solo paso, ya que es necesaria la aplicación de una sola operación para su resolución. Se dividen en problemas o situaciones aditivo-sustractivas y multiplicación-división.

1.1.1. Problemas aditivo-sustractivos

Son aquellos que se resuelven por medio de la adición o la sustracción. Según la situación planteada en el enunciado pueden ser:

a) Problemas de cambio

Se identifican porque en el texto del enunciado incluyen una secuencia temporal, muchas veces manifestada a través de los tiempos verbales utilizados. Parten de una cantidad inicial (C_i), la cual se ve modificada en el tiempo, para dar lugar a otra cantidad final (C_f). Vergnaud llama a estas situaciones, problemas ETE: estado - transformación - estado.

De las tres cantidades que deben aparecer en el problema: C_i, modificación y Cf, dos de ellas serán datos y la otra será la incógnita, de donde se pueden deducir en principio tres casuísticas para esta tipología de problemas. Teniendo en cuenta además que la modificación que actúa sobre la cantidad inicial puede producir un aumento o una disminución se duplicará finalmente el número de casos. El siguiente cuadro puede servir para expresar de forma más clara todas las posibilidades que podrían darse en los problemas de cambio.

	C_i	Modificación	C_f	C_i crece	C_i decrece	Operación
Cambio 1	x	x	?	x		+
Cambio 2	x	x	?		x	-
Cambio 3	x	?	x	x		-
Cambio 4	x	?	x		x	-
Cambio 5	?	x	x	x		-
Cambio 6	?	x	x		x	+

El signo (x) representa a los datos dados en el enunciado y el signo (?) representa a la incógnita que se debe calcular.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 32

Ejemplo: Problema de cambio, casuística 3

El día 1 de Abril conté el dinero que tenía en la hucha y eran 17 euros (Ci). Hoy es el último día del mes y tengo 28 euros (Cf). ¿Cuánto dinero he ahorrado durante este mes?

b) Problemas de combinación

En su enunciado se describe una relación entre conjuntos (P_1) y (P_2) que unidos forman el todo (T). La pregunta del problema hace referencia a la determinación de una de las partes (P_1) o (P_2) o del todo (T). Por tanto el cuadro que resume las posibilidades ofrecidas por este tipo de problemas es el siguiente:

	P_1	P_2	T	Operación
Combinar 1	x	x	?	+
Combinar 2	x	?	x	-

Ejemplo: Problema de combinación casuística 2

A una sesión de cine asistieron 153 personas (P_1). Si la sala tiene 185 butacas (T), ¿cuántos asientos se encontraban vacíos?

c) Problemas de comparación

Son problemas en los que, a través de un comparativo de superioridad (más que…) o de inferioridad (menos que…), se establece una relación de comparación entre dos cantidades. La información aportada por el enunciado está en relación con la cantidad de referencia (C_r), la cantidad comparada (C_c) o bien la diferencia (D) entre ambas cantidades. Del mismo modo que en los problemas de cambio, de las tres cantidades que deben aparecer en el problema: (C_r), (D) y (C_c), dos de ellas serán datos y la otra será la incógnita, de donde pueden deducirse en principio tres casos posibles dentro de este tipo de problemas.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 33

Además como el sentido de la comparación puede efectuarse en términos de más que… o menos que… se duplica la casuística anterior. El siguiente cuadro puede servir para expresar de forma más clara todas las posibilidades que podrían darse en los problemas de comparación.

	C_r	D	C_c	Más que	Menos que	Operación
Comparar 1	x	x	?	x		+
Comparar 2	x	x	?		x	-
Comparar 3	x	?	x	x		-
Comparar 4	x	?	x		x	-
Comparar 5	?	x	x	x		-
Comparar 6	?	x	x		x	+

Ejemplo: Problema de comparación casuística 5

Miren y Javier están haciendo una colección de cromos de animales. Miren tiene 187 cromos (C_c), tiene 46 más que Javier (D). ¿Cuántos cromos tiene Javier?

d) Problemas de igualación

En su enunciado incluyen un comparativo de igualdad (tantos como… , igual que…). Son situaciones en las que se da al mismo tiempo un problema de cambio y otro de comparación. Dicho de otro modo, una de las cantidades (cantidad de referencia C_r) debe modificarse o se modifica creciendo o disminuyendo (D) para llegar a ser igual a la otra cantidad (cantidad comparada C_c).

En el texto del problema se da información referida a las cantidades (C_r), (D), y (C_c), dos de las cuales aparecerán como datos y la tercera como incógnita a calcular. De nuevo pueden considerarse a partir de esta información tres casos de problemas, pero teniendo en cuenta que el sentido de cambio puede ser aumentando o disminuyendo dependiendo de la relación entre las cantidades Cr y Cc eso duplica el número de posibilidades. Por tanto el cuadro resumen de la casuística será:

	C_r	D	C_c	C_r crece	C_r decrece	Operación
Igualar 1	x	x	?	x		+
Igualar 2	x	x	?		x	-
Igualar 3	x	?	x	x		-
Igualar 4	x	?	x		x	-
Igualar 5	?	x	x	x		-
Igualar 6	?	x	x		x	+

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 34

Ejemplo: Problema de igualación casuística 3

Daniel tiene 56 libros de cuentos (C_C). Alberto tiene 25 (C_r). ¿Cuántos libros más debe tener Alberto para tener los mismos que Daniel?

1.1.2. Problemas de multiplicación-división

Se resuelven a través de una multiplicación o una división. Según la situación planteada en el enunciado pueden ser:

a) Problemas de repartos equitativos o de grupos iguales

Son aquellas situaciones en las que una cantidad debe repartirse entre un cierto número de grupos, de modo que cada grupo reciba el mismo número de elementos. En el enunciado se hará referencia a tres informaciones: la cantidad a repartir, el número de grupos a formar o el número de elementos por cada grupo. Dos de estas constituirán los datos y una tercera será la incógnita a calcular. Según esto se distinguen tres tipos diferentes de problemas en esta categoría:

	Cantidad a repartir	Nº de Grupos	Elementos por grupo	Operación
REP 1	x	x	?	:
REP 2	x	?	x	:
REP 3	?	x	x	x

Ejemplo: Problema de reparto equitativo casuística 3

En clase hay 18 alumnos. Después de repartir una bolsa grande de caramelos entre todos los alumnos, a cada uno le han correspondido 8 caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía la bolsa?

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 35

b) Problemas de factor N o de comparación multiplicativa

Son muy similares a las situaciones aditivas de comparación. En ellos intervienen dos cantidades del mismo tipo las cuales se comparan (cantidad referente C_r y cantidad comparada C_c) para establecer entre ellas una razón o factor (F). Se caracterizan también porque en el enunciado se incluyen cuantificadores del tipo "… veces más que …" "… veces menos que …"

De las tres informaciones a las que se alude en el enunciado (C_r), (C_c) y (F), dos de ellas aparecerán como datos y una tercera será la incógnita. De aquí surgirían tres posibles tipos de problemas. Ahora bien, al considerar que la comparación establecida entre las cantidades puede ser en términos de "veces más que" o "veces menos que", eso duplica el número de posibilidades:

	C_r	F	C_c	"n veces más"	"n veces menos"	Operación
Factor 1	x	x	?	x		X
Factor 2	x	x	?		x	:
Factor 3	x	?	x	x		:
Factor 4	x	?	x		x	:
Factor 5	?	x	x	x		:
Factor 6	?	x	x		x	X

Ejemplo: Problema de factor N casuística 2

Unos zapatos cuestan 72 euros (C_r). Un balón de baloncesto cuesta 8 veces menos (F). ¿Cuánto cuesta el balón?

c) Problemas de razón o de tasa

Este tipo de problemas incluye en el enunciado informaciones que hacen referencia a medidas de tres magnitudes diferentes. Una de ellas, la llamada magnitud intensiva o tasa, (C_i), resulta de relacionar las otras dos (una de las magnitudes dadas en el problema respecto a la unidad de la otra magnitud ej. km/h, euros/kilo,…) que a su vez se llaman extensivas(Ce_1 y Ce). Las posibilidades que se ofrecen son:

	C_{e1}	$C_i = C_e/C_{e1}$	C_e	Operación
Razón 1	x	x	?	x
Razón 2	?	x	x	:
Razón 3	x	?	x	:

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 36

Ejemplo: Problema de razón casuística 2

Por un jamón entero hemos pagado 152 € (C_e). Si el precio de esa clase de jamón es de 19 €/kilo (C_i), ¿cuántos kilos pesa el jamón que hemos comprado?

d) Problemas de producto cartesiano

Se trata de combinar de todas las formas posibles (T), los objetos de un tipo (C_1) con los objetos de otro tipo (C_2).

	C_1	C_2	T	Operación
Cartesiano 1	x	x	?	x
Cartesiano 2	?	x	x	:
Cartesiano 3	x	?	x	:

Ejemplo: Problema de razón casuística 2 ó 3

Combinando mis pantalones y camisas me puedo vestir de 24 formas diferentes (T). Tengo 4 pantalones (C_1 ó C_2). ¿Cuántas camisas tengo?

1.2. Problemas aritméticos de segundo nivel

También llamados problemas combinados. Para su resolución es necesario realizar varias operaciones (dos o más) en un cierto orden. Son más complejos que los de primer nivel puesto que supone establecer unas relaciones más complejas entre los datos aportados por el enunciado. Dentro de esta tipología podría hablarse de diferentes clasificaciones según el criterio seguido. Así, por ejemplo, atendiendo a la estructura del enunciado pueden ser:

1.2.1. Problemas combinados fraccionados

Son aquellos en los que en el enunciado aparecen varias preguntas encadenadas, las cuales ofrecen al resolutor el plan para responder a la última pregunta, que es propiamente la finalidad del problema.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 37

Ejemplo:

Una señora lleva en la cartera 300 €. Entra a una tienda de ropa y compra 3 pantalones que le cuestan 72 € cada uno y 2 camisetas a 15 € la unidad.
¿Cuánto dinero valen los tres pantalones?
¿Cuánto paga por las camisetas?
¿Cuánto dinero gasta la señora en la tienda?
¿Cuánto dinero le quedará en la cartera al salir?

1.2.2. Problemas combinados compactos

Resultan bastante más complejos que los fraccionados ya que en ellos aparece solamente una pregunta al final del enunciado. En este caso el resolutor debe relacionar los datos aportados, de un modo estratégico y concebir el plan que le llevará hasta la solución del problema.

Ejemplo:

El coche de mi padre consume 6 litros de gasolina cada 100 kilómetros. Cuando salió de casa antes de iniciar un viaje, el depósito estaba lleno y caben 57 litros. Después de andar 750 km., ¿qué distancia podría recorrer todavía sin volver a repostar combustible?

Por el tipo de operaciones que es necesario realizar para resolver el problema, se clasifican en:

1.2.3. Problemas combinados puros

Son aquellos en los que los pasos intermedios a realizar para resolver el problema pertenecen todos al mismo campo operativo-conceptual. Es decir se aplican bien sumas y/o restas, o bien multiplicaciones y/o divisiones.

Ejemplo:

Para celebrar el fin de trimestre, las tres clases de tercero de mi colegio hemos ido al cine. En cada clase hay 25 alumnos. Si hemos pagado en total 225 euros, ¿cuánto nos ha costado a cada alumno la entrada al cine?

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 38

1.2.4. Problemas combinados mixtos

En su resolución intervienen distintas operaciones pertenecientes a campos conceptuales diferentes.

Ejemplo:

En un almacén había 127 sacos de garbanzos. Cada saco pesaba 60 kilos. Se sacaron 8 carros de 12 sacos cada uno. ¿Cuántos kilos de garbanzos quedaron en el almacén?

En función de la secuencia temporal descrita en el enunciado, el orden en el que aparecen dados los datos y su utilización para la resolución del problema, se clasifican en:

1.2.5. Problemas combinados directos

Son aquellos en los que los datos expresados en el enunciado están dados en el mismo orden en el que deben ser utilizados al resolver el problema.

Ejemplo:

En un concurso escolar ganamos 1200 euros. Para celebrarlo compramos libros de lectura para la clase por valor de 192 euros. Después hicimos una excursión en la que gastamos 900 euros. El resto del dinero lo utilizamos en hacer una merienda. ¿Cuánto dinero costó la merienda?

1.2.6. Problemas combinados indirectos

Se caracterizan porque la persona que resuelve el problema debe reordenar los datos en función de la pregunta formulada en el enunciado, y combinarlos de forma que le permitan elaborar el plan que le llevará a la solución.

Ejemplo:

Una cuba contenía 112 litros de agua. Con ella se llenaron 3 bidones iguales y 2 garrafas de 15 litros cada una. En la cuba quedaron todavía 7 litros de agua. ¿Cuál era la capacidad de cada bidón?

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 39

1.3. Problemas aritméticos de tercer nivel

Son aquellos en los que los datos del enunciado vienen dados en forma de números decimales, fraccionarios o porcentuales. La situación planteada es similar a las de primer o segundo nivel, la dificultad añadida está precisamente en el tipo de números en los que se expresan los datos.

Ejemplos:

Un comerciante vendió las 350 botellas de aceite que había comprado. Pagó por cada botella 1,10 euros. En la venta ganó 140 euros. ¿A cómo vendió cada botella?

En un hotel que tiene 60 habitaciones, sólo 3 están vacías. ¿Qué porcentaje de habitaciones tiene ocupadas el hotel?

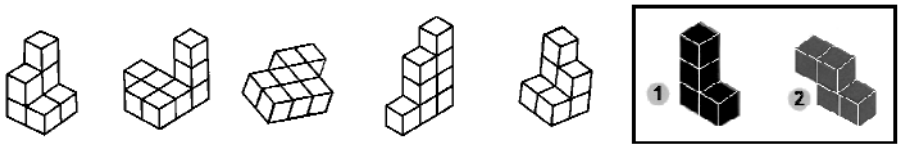
Una pieza de ¾ de kilo de solomillo de ternera cuesta 21 euros. ¿Cuánto pagaremos por 2 kilos de esa misma carne?

2. Problemas geométricos

Con ellos se trabajan diversos contenidos y conceptos de ámbito geométrico, diferentes formas y elementos, figuras bidimensionales y tridimensionales, orientación y visión espacial, los giros… El componente aritmético pasa a un segundo plano y cobra importancia todo lo relacionado con aspectos geométricos. Estos problemas se inician en Educación Primaria pero luego su tratamiento continúa en Secundaria. Es importante que los alumnos adquieran una buena base para que vayan ampliando sus conocimientos en cursos posteriores.

Ejemplo:

Juntando las piezas 1 y 2 se han hecho varias construcciones. Encuentra las dos piezas en cada construcción y luego píntalas.



matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 40

3. Problemas de razonamiento lógico

Son problemas que permiten desarrollar destrezas para afrontar situaciones con un componente lógico. Actividades de este tipo podrían ser por ejemplo:

3.1.Numéricos

Los criptogramas, líneas u otras figuras sobre las que hay que colocar números cumpliendo unas determinadas condiciones, aquellos en los que se dan unas pistas para que a partir de ellas se determine el número o números que las cumplen, …

Ejemplo:

Acaba este cuadrado numérico para que sea mágico, es decir, tienes que conseguir que cada fila, cada columna y las dos diagonales sumen lo mismo

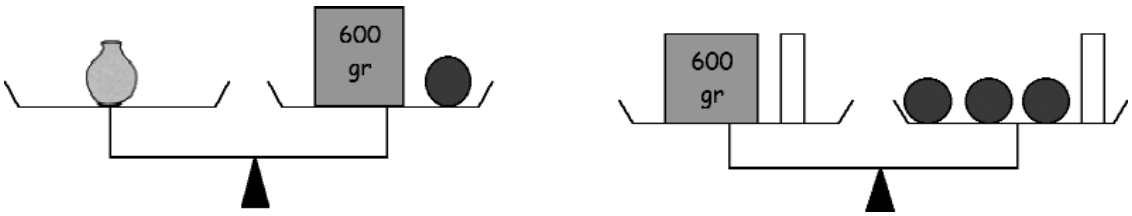
7	A	B
C	D	E
14	8	10

3.2. Balanzas de dos brazos

Problemas gráficos en los que una vez representadas algunas "pesadas" realizadas, se trata de averiguar otras equivalencias en función de los objetos utilizados.

Ejemplo:

Observa la balanza y deduce el peso de la jarra



matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 41

3.3. Enigmas

Aunque no tienen por qué ser propiamente matemáticos, mantienen la mente despierta, estimulan la imaginación y desarrollan la facultad de la inteligencia. Constituyen un ejercicio mental y desarrollan estrategias que resultan útiles en muchas ocasiones. Son actividades en las que es fundamental la expresión verbal del proceso seguido para su resolución, ya que no sólo es importante dar la respuesta sino también hacer partícipes al resto de compañeros de cómo se ha llegado hasta ella.

Ejemplo:

Un grupo de tres personas adultas se desplaza por la selva. Al cabo de cierto tiempo encuentran un río que deben cruzar, pero no pueden atravesarlo nadando. Al otro lado ven a dos niños con una pequeña canoa que se ofrecen a ayudarles. La canoa es tan pequeña que en cada viaje solamente caben los dos niños o una persona adulta. ¿Serías capaz de ayudarles a resolver este problema?

3.4. Análisis de proposiciones

Son actividades que desarrollan la capacidad para articular argumentaciones y dar explicaciones. Exigen utilizar el lenguaje con precisión.

Ejemplo:

Escribe VERDADERO o FALSO, detrás de las siguientes condicionales:

- *Si sumo dos números impares, entonces el resultado es par.*
- *Si hace sol, entonces no hay nubes.*
- *Si no es alemán, entonces no es europeo.*
- *Si el resultado de un producto es par, entonces los dos números son pares.*
- *Si soy propietario de un coche, entonces tengo el carné de conducir.*
- *Si apruebo el examen, entonces he sacado un cinco.*
- *Tener 13 años es condición necesaria y suficiente para estudiar 1º de ESO.*
- *Saber hablar inglés es condición necesaria y suficiente para dar clase de inglés.*

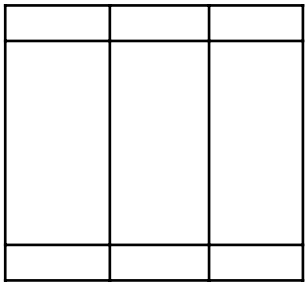
matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 42

4. Problemas de recuento sistemático

Son problemas que tienen varias soluciones y es preciso encontrarlas todas. Pueden ser de ámbito numérico o geométrico. Conviene ser sistemático en la búsqueda de posibles soluciones para llegar al final con la certeza de haberlas hallado todas.

Ejemplos:

¿Cuántos rectángulos puedes ver en este dibujo?



Halla todas las formas posibles de tener 50 céntimos, de manera que intervengan como máximo 5 monedas.

5. Problemas de razonamiento inductivo

Consisten en enunciar propiedades numéricas o geométricas a partir del descubrimiento de regularidades. Intervienen dos variables y es necesario expresar la dependencia entre ellas.

Ejemplos:

En las siguientes series, calcula el valor del término que ocupa el lugar 50:

- *1 , 3 , 5 , 7, 9 , ……....*
- *6 , 9 , 12 , 15 , ……....*
- *1 , 4 , 9 , 16 , 25 , ……*

Para ver una obra de teatro por cada 2 entradas que se compren, regalan otra. Rellena la tabla teniendo en cuenta la oferta:

Pago	2	3	5	6	...	10	...	
Llevo	3	4			...		...	21

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 43

6. Problemas de azar y probabilidad

Son situaciones planteadas en muchos casos a través de juegos o de situaciones en las que siguiendo una metodología de tipo manipulativa y participativa por parte de los alumnos, estos pueden descubrir la viabilidad o no de algunas opciones presentadas, así como la mayor o menor posibilidad de ganar en el juego. A partir de este tipo de experiencias se pueden hacer predicciones con cierta "base científica" o pensar en posibles apuestas a realizar ante determinadas situaciones.

En una bolsa de tela hay bolas de diferentes colores. En total son 10 bolas. Se han hecho 1500 extracciones anotando cada vez el color de la bola y devolviéndola después a la bolsa. El resultado es el siguiente:

Color de bola	*Nº de veces que ha salido*
Rojo	*510*
Verde	*275*
Blanco	*185*
Amarillo	*530*
.....	.....

¿De qué colores crees que son las bolas de la bolsa?
¿Cuántas bolas te parece que habrá de cada color?
¿Pudiera ocurrir que alguna de las bolas de la bolsa fuera azul?
Si haces el experimento 10 veces, ¿cuántas veces crees que saldrá la bola verde? Haz la experiencia.

Este apartado sobre tipologías de problemas será desarrollado de forma más detallada y secuenciada en la segunda parte de este libro en el capítulo de "Un modelo de taller de resolución de problemas por ciclos".

Sin embargo es importante resaltar ahora la conveniencia de que el profesorado se haga con un banco de actividades relevantes, adecuadas al nivel de los alumnos, de acuerdo con la clasificación presentada, seleccionando material bien a partir de diferentes publicaciones, bien inventando problemas por su cuenta o en clase con los alumnos, etc. De ese modo podría utilizarlo en diferentes ocasiones, cuando considere que los problemas que vienen en el libro de texto no son suficientes o cuando no recogen todas las posibilidades que en Educación Primaria debieran abordarse.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 44

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 45

Segunda Parte

Taller de resolución de problemas. Práctica

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 46

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 47

I

EL TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En primer lugar podría decirse que un taller de resolución de problemas ha de tener como finalidad el logro de unos objetivos, entre los que debe figurar conseguir que los alumnos tomen conciencia y practiquen un modelo o proceso de resolución. Se pretende que lo interioricen y que desarrollen una serie de capacidades que les lleven a ser buenos resolutores de problemas. Es decir, que sean poseedores de un cierto bagaje que les permita afrontar las situaciones matemáticas con garantías de éxito.

Se debe tener en cuenta, además, un componente propiamente curricular constituido por los materiales con los que se va a trabajar. En este caso serán los problemas y los ejercicios los que ayuden a desarrollar en los alumnos las capacidades que faciliten la consecución de los objetivos propuestos en el taller. Los contenidos deben estar bien diseñados, distribuidos en sesiones para incorporarlas al aula con la temporalización idónea. El número de actividades propuestas para cada sesión debe ser adecuado para que puedan ser abordadas al menos en su mayoría. No se debiera contemplar un número excesivo, si es que tenemos la certeza de que no todas las actividades van a poder ser trabajadas en la

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 48

sesión. Sin embargo, sí que podría plantearse como tarea, en algunos cursos, terminar en casa ciertos problemas a los que, pese a haber sido trabajados en clase en alguna de sus fases de resolución (comprensión y planificación), quedaran otras por completar (ejecución y valoración del resultado obtenido), puesto que requieren ya un trabajo de recapitulación y, por tanto, más individual.

Otro aspecto que se debe tener en cuenta al pensar en el taller es la temporalización. Es conveniente disponer dentro del horario escolar de un "espacio" que podamos dedicar al desarrollo de esta actividad, en el cual la actitud, tanto del alumno/a como del profesor/a, al abordar la resolución de problemas, sea diferente. Durante el tiempo dedicado a estas sesiones, el ambiente de clase debe favorecer especialmente la investigación, el diálogo y el planteamiento, sin miedos, de cuantas dudas puedan surgir. Ayudará a contrastar diferentes formas de afrontar y resolver problemas, a descubrir y conocer nuevas estrategias utilizadas por compañeros, a defender y argumentar puntos de vista propios a la hora de encarar distintos planteamientos o la planificación de la actividad propuesta…

Como profesionales, debemos pensar más en la calidad de las sesiones que en la cantidad de actividades desarrolladas. No siempre el número de problemas trabajados es un indicador de que los alumnos saben resolverlos. Sí es necesario garantizar que en el taller se trabajen las diferentes tipologías de problemas propias de la etapa educativa.

Durante mucho tiempo, se ha planteado a los alumnos la resolución de problemas de forma individual. Procediendo de este modo, se desaprovecha toda la información que este tipo de actividades nos puede aportar en lo referente a la forma de razonamiento y organización o a determinadas lagunas que nuestros alumnos arrastran. Los profesores hemos sido el centro de atención en clase para proponer, corregir actividades, sancionar resultados y llevar a cabo explicaciones que quizá resultaran innecesarias para todo el grupo.

El planteamiento metodológico del taller de resolución de problemas matemáticos que sugiero en los capítulos siguientes rompe con esta imagen. No por ello desliga al profesor de sus funciones, simplemente no lo considera el centro en torno al cual gira el funcionamiento del taller. Su intervención en el ámbito organizativo, dinamizador y mediador en el funcionamiento del mismo es indiscutible. El papel que el alumno debe asumir como protagonista del proceso de su propio aprendizaje y de colaborador en el aprendizaje de sus compañeros es también muy destacable.

El modelo de resolución de problemas propuesto en los capítulos precedentes pone de manifiesto el interés del agrupamiento en parejas del alumnado. Haciéndome eco de un artículo sobre "El aprendizaje entre iguales" (D. Duran Gisbert, P. Serra Joaniquet y E. Miquel Bertrán, publicado en el número 75 de la revista Aula de Innovación Educativa), recojo la idea de que los alumnos pueden ofrecer a sus compañeros una ayuda pedagógica muy interesante:

- Han sido aprendices recientes de los contenidos que transmiten y todavía conservan esa sensibilidad hacia los aspectos más complicados que el proceso conlleva.
- Son más directos que los adultos y comparten referentes culturales y lingüísticos más próximos a los de sus compañeros.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 49

- Facilitan la posibilidad de establecer en el aula relaciones uno a uno, algo que los profesores no podemos hacer.

Esta forma de aprendizaje cooperativo basado en la creación de parejas que pueden ser heterogéneas, aunque no es conveniente que entre sus componentes se den diferencias extremas, tiene un único objetivo que es la resolución de las actividades seleccionadas y propuestas por el profesor. La tarea no debe llevarse a cabo de cualquier manera; en un principio debe procederse de forma dialogada, pensada, discutida y consensuada en sus fases. Posteriormente, ya de forma individual, cada alumno ejecutará el plan diseñado y valorará la solución conseguida, con lo que se completará el proceso.

Esta metodología potencia la responsabilidad individual a través de la interacción del alumnado. El profesor será el que forme las parejas, del modo que considere más adecuado para potenciar esta forma de trabajo. Además será el que determine las actividades a abordar en cada sesión, es decir, su diseño. Dinamizará su funcionamiento facilitando recursos de aprendizaje, estrategias de aplicación, variando el modo de trabajo en las sesiones: unas veces resolviendo problemas en gran grupo, haciendo de modelo de resolutor, otras en parejas, individualmente... Por último, mediará interviniendo puntualmente en aquellos momentos que considere oportunos, con parejas que se encuentren atascadas, sugiriendo preguntas o aspectos que hagan a los alumnos replantearse la situación cuando la vía que han tomado es equivocada, facilitando pistas que les dirijan hacia otras vías de resolución, etc.

No hay que olvidar tampoco que uno de los aspectos fundamentales del proceso de enseñanza-aprendizaje es precisamente constatar qué es lo que el alumno va haciendo suyo, de entre todo el conjunto de contenidos de distinta naturaleza (conceptuales, procedimentales y actitudinales) que se le pretende enseñar. Es necesario que el profesor tenga claros cuáles son los criterios de evaluación que debe aplicar, para asegurarse de que efectivamente se van cumpliendo los objetivos propuestos en cada ciclo y curso del taller de resolución. De igual modo debe determinar qué tipo de actividades considera representativas e imprescindibles y, por tanto, han de estar presentes para evaluar el desarrollo del mismo.

No quisiera terminar este apartado sin resaltar que este método de trabajo refuerza el proceso de aprendizaje, poniendo a prueba no solo los conocimientos adquiridos y su aplicación a situaciones, sino también las estructuras necesarias para saber explicarlas a los compañeros, defenderlas, argumentarlas y llegar a consensuar los razonamientos.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 50

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 51

II

UN MODELO DE TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR CICLOS

A lo largo de este capítulo, se dan muchos ejemplos sobre situaciones matemáticas que se podrían trabajar en el taller de resolución de problemas en Educación Primaria. Están organizadas ajustándose a los tres ciclos que componen la etapa y secuenciadas según la tipología presentada en la primera parte del libro.

Antes de seguir adelante quisiera presentar este modelo de taller como el resultado de un proceso de dos años de formación en el tema que nos ocupa (Seminario: "Aprender matemáticas… para resolver problemas"). Actividad formativa que a su vez ha constituido la base de esta publicación. Se desarrolló en el Centro de Apoyo al Profesorado (CAP) de Pamplona, fue dirigido por Luis Pereda, profesor de Didáctica de las Matemáticas de la Escuela de Magisterio Begoñako Andra Mari, de Bilbao, y organizado y coordinado por quien suscribe este texto, en el desempeño de mis funciones como Asesora de Educación Primaria en dicho CAP. Participó un número elevado de profesores/as, que recibieron unas sesiones de formación inicial y diseñaron el contenido y secuenciación de los talleres para

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 52

alumnos de Educación Primaria. Después de haberlos puesto en práctica, han sido revisados y modificados teniendo en cuenta las observaciones y evaluaciones llevadas a cabo por el profesorado participante. Esta publicación incluye también el CD-ROM que contiene las producciones finales, así como unas pruebas de evaluación facilitadas por Luis Pereda, resultado del trabajo realizado en el Seminario. A lo largo del capítulo se ofrecen también otros ejemplos de actividades a desarrollar en las sesiones de los talleres de los diferentes cursos, siendo en su mayoría distintas a las recogidas en el citado CD-ROM.

El objetivo es que tanto los materiales elaborados durante la citada actividad de formación como los que están recogidos en esta segunda parte del libro, puedan servir de ejemplo para el diseño de otras actividades o sesiones y ampliar así el banco de recursos que cada profesor debiera poseer. En muchos casos los libros de texto no presentan una variedad de problemas que permitan elegir los más adecuados en cada momento. Por el contrario, a menudo aparecen como una batería de actividades de aplicación de los contenidos trabajados en la unidad didáctica de la que forman parte, y de cuya ejecución no se deduce la idea de que los alumnos han asimilado dichos contenidos.

Un porcentaje muy alto de los problemas que se trabajan en Educación Primaria lo constituyen los problemas aritméticos. Esta es la tipología propia de la etapa y en ella deben quedar lo suficientemente tratados y trabajados. Al finalizar sexto curso, los alumnos deberían resolver con seguridad y eficacia este tipo de problemas. Pero además se han de trabajar otras tipologías que también deben quedar reflejadas en el diseño de las sesiones y, por tanto, en el conjunto de actividades seleccionadas: son los problemas de razonamiento lógico, de recuento sistemático, de inducción, de azar…

A continuación, se presenta un estudio más detallado de lo que puede ser el taller de resolución de problemas matemáticos para cada ciclo y curso. Tal y como ha quedado recogido en el capítulo anterior, los componentes que siempre deben estar presentes en el momento de diseñar unos talleres de esta naturaleza son:

- los objetivos que se pretenden conseguir,
- los materiales que componen las sesiones,
- la temporalización,
- la metodología que se va a aplicar
- la evaluación de los aspectos y contenidos trabajados con los alumnos.

1. PRIMER CICLO

El primer ciclo de Educación Primaria es el que posee las diferencias más tangibles entre los dos cursos que lo forman. Ese año de diferencia en la edad cronológica entre los alumnos del primer y segundo curso tiene mayores repercusiones a nivel de desarrollo personal

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 53

e intelectual que las que se dan entre los otros cursos de los ciclos segundo y tercero. Así, mientras en primero los niños/as están aprendiendo a decodificar y, por tanto, se están iniciando en el desarrollo de la capacidad de comprensión lectora a través de textos escritos (la comprensión oral viene más trabajada tanto desde el entorno de Educación Infantil como desde el familiar y social), se van iniciando en la escritura y su dependencia del adulto es en general bastante acusada; en segundo curso el nivel de desarrollo en estas competencias está más avanzado y, por lo tanto, la metodología de trabajo es diferente.

Todos estos aspectos deben tenerse en cuenta al diseñar el taller de resolución de problemas.

Objetivos

Establecidas estas diferencias, se podría decir que los principales objetivos del taller de resolución de problemas para este ciclo serán:

- Identificar en la vida cotidiana y en su entorno próximo problemas que hacen referencia a situaciones aritméticas aditivo-sustractivas.
- Aplicar técnicas o estrategias heurísticas como la lectura analítica, separación de datos e incógnitas, realización de gráficos… que faciliten la resolución de problemas.
- Aplicar las cuatro fases del método a la resolución de problemas.
- Resolver problemas sencillos de otras tipologías: razonamiento lógico, azar (a través de juegos, preguntas etc.)…
- Aprender a trabajar por parejas en la resolución de problemas.

Contenidos. Tipo de problemas

En este primer ciclo se debe hacer especial hincapié en los problemas aritméticos simples aditivo-sustractivos, es decir, aquellos que se resuelven con una sola operación: suma o resta.

Es necesario tener en cuenta las diversas casuísticas presentadas en el capítulo "Tipología de problemas en la etapa de Educación Primaria". Las situaciones 5 y 6 de los cuadros que recogen los diferentes típos de problemas: de cambio, comparación e igualación, son aquellas en las que la incógnita hace referencia al punto de partida o cantidad inicial y pueden resultar de especial dificultad para los alumnos de este ciclo. Eso no quiere decir que haya que sacarlas de la programación, sino que es necesario retomarlas nuevamente en el planteamiento del siguiente taller de resolución de problemas.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 54

Ejemplo:

Una señora entra en una tienda y compra una falda que valía 90 euros. Después de pagar, le quedaron en la cartera 60 euros. ¿Cuánto dinero llevaba esa señora al entrar en la tienda?

Presentan también cierta complejidad los problemas en los que, en el enunciado, aparecen palabras clave, tales como "…más que…", "crece", "aumenta", etc. cuando el alumno las asocia erróneamente con la operación que resuelve el problema.

Ejemplo:

Tengo en la hucha 24 euros. Tengo 5 euros más que mi hermano. ¿Cuánto dinero tiene ahorrado mi hermano?

Son las situaciones con el número 3 de los cuadros anteriormente citados. Este tipo de actividades aparecerán nuevamente en el segundo ciclo.

Además se debería iniciar a los alumnos en la resolución de problemas muy sencillos de razonamiento lógico, en los que es necesario insistir en la comprensión del enunciado o situación planteada, así como en aquellos sobre combinatoria que puedan resolverse por medio de representaciones y en pequeños problemas de azar que se pueden plantear a través de juegos o experiencias sencillas.

Metodología

En primer curso, sobre todo al comienzo, se trabajará de manera intensiva a nivel oral y en gran grupo, resolviendo las actividades conjuntamente los alumnos con el profesor. Las sesiones no deben ser muy largas, menos de treinta minutos, organizadas de forma que vayan familiarizándose con la forma de trabajo y el tipo de actividades. Poco a poco se irá dando entrada a la lectura y la escritura. A final de curso se podría iniciar ya el trabajo en parejas. Es muy importante dedicar parte del taller a abordar diferentes actividades encaminadas a favorecer el desarrollo de la capacidad de comprensión de las situaciones en ellas descritas.

En segundo curso, se centrará más en lo que es propiamente reconocimiento y aplicación de las diferentes fases del proceso. Se dará más importancia al trabajo por parejas, aunque se den también situaciones en las que la actividad se plantee en y para el gran grupo. Se comenzará el taller con sesiones cortas y luego se irá pasando a situaciones en las que los alumnos, en sesiones más largas, vayan adoptando un mayor protagonismo. Inicialmente, y con el fin de recordar lo trabajado en el curso anterior, se resolverán las actividades en gran grupo y, tras el paso intermedio de resolver una actividad en esta modalidad y otra en parejas, podremos dedicar la sesión entera a que ellos trabajen agrupados de esta manera.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 55

Al final de ciclo, el profesor/a actuará como modelo de buen resolutor sólo en aquellos problemas que sean más novedosos en su tipología o que presenten una dificultad especial. Para ello expresará verbalmente los pensamientos y razonamientos asociados a las diferentes fases (comprensión, planificación, ejecución y comprobación del resultado obtenido), así como los procesos mentales que tienen lugar desde el momento en que se entra en contacto con el enunciado del problema hasta que se da por válida y terminada su resolución. En estos casos, las actividades presentadas irán seguidas de otras similares para que los alumnos las resuelvan de modo semejante a como lo hizo el profesor/a. La primera de ellas se planteará en gran grupo, siguiendo el modelo, y el resto en parejas.

Conforme avanzamos en el taller de segundo, veremos cómo de vez en cuando se combinan problemas con ejercicios que refuerzan los aprendizajes adquiridos en el de primer curso.

Procesos heurísticos

La habilidad para resolver problemas no se consigue por el mero hecho de enfrentarse a ellos de forma sistematizada y dedicarles tiempo dentro del horario escolar. Es necesario además familiarizarse y utilizar con soltura una serie de estrategias generales de resolución llamadas procesos heurísticos. Se trata de favorecer en los alumnos el desarrollo de la autoconfianza al abordar y resolver problemas desde el inicio en el tratamiento de este tipo de actividades. El desarrollo de estas capacidades se consigue enfrentándose a dificultades, errando y volviéndolo a intentar.

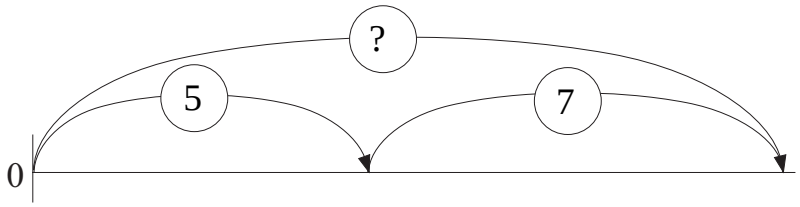
Cuando a menudo interrumpimos a los alumnos en el proceso de resolución de un problema, interviniendo para que tomen otra vía más rápida y elegante que les lleve a la solución, estamos evitando precisamente que se topen con complicaciones. De ese modo no aprenderán a superarlas ni facilitaremos su confianza, así como tampoco la adquisición de autonomía, matemáticamente hablando.

A continuación se presentan algunos procesos heurísticos que, sin excluir a otros, sería conveniente tener en cuenta en este ciclo para el tratamiento del tema que nos ocupa:

- En primer lugar, y dadas las características del alumnado de estos cursos, hay que dedicar especial atención al desarrollo de estrategias que faciliten la escucha y/o lectura analítica (inicialmente se trabajará a nivel oral para luego dar paso a la lectura). Se trata de técnicas dirigidas fundamentalmente a facilitar la comprensión de la situación planteada en el problema. Para ello se proponen una serie de actividades en las que se pide:
  - Decir lo mismo pero de otra forma.
  - Contar la historia dando marcha atrás.
  - Separar datos e incógnitas.
  - Deducir qué se puede calcular a partir de unos datos conocidos.
  - .....

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 56

- La realización de esquemas gráficos a partir de los datos que se extraen del enunciado de los problemas es otro proceso heurístico que se debe utilizar. Se trata de prescindir de toda aquella información no matemática y representar las relaciones existentes entre los datos aportados. En primer ciclo es recomendable la utilización de diagramas sagitales para la resolución de problemas aritméticos. Para ello, en la recta numérica se representarán los datos y sus relaciones de forma que se mantengan las proporciones, es decir, sin basarse en divisiones gráficas previas que puedan servir al alumno para resolver el problema a través del método del conteo y no por la aplicación de la operación correspondiente. Así por ejemplo, una situación que se resuelva por medio de la operación 5 + 7 se representará con un diagrama sagital de la siguiente forma:



Es preciso trabajar el uso y la representación de esquemas gráficos, de forma gradual. Comenzar por representar primero operaciones de sumas o restas fuera del contexto de los problemas, después continuar con esquemas incompletos asociados a enunciados para que el alumno los termine, por último será labor del resolutor la elaboración del esquema en su totalidad. Este paso podrá llegar ya a final del primer ciclo.

En las páginas siguientes se presenta una secuenciación de tareas correspondientes a los cursos primero y segundo del primer ciclo de Educación Primaria, que ejemplifican en síntesis lo que puede ser un taller de resolución de problemas.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 57

1.1. Primer curso

Actividades

Las actividades que vienen a continuación tratan de ir conduciendo a los alumnos poco a poco hasta la interiorización de la estrategia general que se va a proponer para abordar la resolución de cualquier problema aditivo-sustractivo. Esta estrategia o plan de resolución se presentará al finalizar el taller de primero y sobre él se seguirá trabajando a lo largo de segundo. Para ello, previamente, se propondrán unas tareas preparatorias, encaminadas a desarrollar capacidades que faciliten la adquisición del método de resolución propuesto.

En primer curso se puede comenzar por actividades pensadas para practicar lo que en el apartado de procesos heurísticos propios de este ciclo se ha denominado la escucha analítica. Con ellas se pretende desarrollar la capacidad lógica, la expresión oral a través de giros lingüísticos de formas alternativas a una relación numérica, situacional o cualitativa dada… Cuando los alumnos hayan conseguido cierta agilidad y comprensión lectora se les podría volver a presentar esto mismo por escrito y en ese caso poner en práctica la lectura analítica. Algunos ejemplos de este tipo de tareas se exponen a continuación. Cada grupo de actividades se engloba bajo un epígrafe que resume qué es lo que se pretende trabajar por medio de ellas.

❑ DECIR LO MISMO PERO DE OTRA FORMA

Observa el dibujo y después vuelve a decir lo mismo pero de otra manera:

LA NIÑA SE LLAMA BEGOÑA Y EL NIÑO SE LLAMA JAVIER

- Begoña es más alta que Javier.

Javier es.....

- Javier tiene menos años que Begoña.

Begoña tiene.....

- Javier está delante de Begoña.

Begoña está.....

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 58

- Begoña tiene tres años más que Javier.

Javier tiene.....

- Javier pesa menos que Begoña.

Begoña.....

La siguiente tarea pretende desarrollar en los alumnos la capacidad de recordar en orden dos o tres acciones encadenadas, contadas siguiendo una secuencia, así como que sean capaces de contarlas al revés, deshaciendo lo hecho. En principio se pueden contar colocando a los alumnos en corro y representando o vivenciando las secuencias.

❑ CONTAR LA HISTORIA DANDO MARCHA ATRÁS

Josu se levantó de la cama. Se puso las zapatillas y entró en la cocina.

Josu.....

.....

La niña entró en clase.

Se sentó en la silla y sacó el libro.

La niña.....

.....

Mi papá entró en el coche.

Lo arrancó y lo sacó del garaje.

Mi papá.....

.....

Joseba cogió un CD.

Entró en su habitación y encendió el ordenador.

.....

.....

María se juntó con su amiga.

Se puso los patines y salió a la calle.

.....

.....

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 59

En el siguiente bloque de actividades, los alumnos deben analizar qué es lo que se puede calcular a partir de los datos que se presentan en el enunciado. Se proponen dos tipos de problemas:

- Aquellos en los que los alumnos deben formular preguntas, en principio oralmente y después también por escrito, que se respondan a partir de los datos recogidos en el enunciado.
- Problemas en los que, dados unos datos y varias preguntas, los alumnos deben determinar cuáles de ellas pueden contestarse a partir de la información proporcionada.

❑ ¿QUÉ PUEDE CALCULARSE CON LOS DATOS CONOCIDOS?

DATOS

- En el parque había 5 niños y 7 niñas.
- Tres niñas se fueron a casa.

PREGUNTAS

❑ ¿.....?

❑ ¿.....?

DATOS

- Jone tiene 5 hermanos.
- Asier tiene 2 hermanos.

PREGUNTAS

❑ ¿.....?

❑ ¿.....?

DATOS

- Ayer tenía nueve canicas en el bolsillo.
- Hoy en el recreo he ganado algunas canicas y después de camino a casa se me han perdido 3.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 60

PREGUNTAS

- ¿Me quedan más de cuatro canicas en el bolsillo?
- ¿Puedo calcular las canicas que he ganado en el recreo?
- ¿Si cuento las canicas que tengo en el bolsillo, puedo saber las canicas que he ganado?

Avanzando algo más en esta línea, otras actividades con las que trabajar son aquellos problemas en los que se dan algunos datos y una pregunta formulada de tal manera que los alumnos deben pensar qué datos, además de los dados, son necesarios para poder contestar a dicha pregunta. Después tendrán que expresar esta información por escrito.

Estos problemas se podrían alternar con otros en los que se de más información que la necesaria para poder responder a la pregunta. En este caso los alumnos deben discriminar los datos que son necesarios de los que no lo son y tachar estos últimos.

¿QUÉ DATOS SON NECESARIOS PARA PODER CONTESTAR A LA PREGUNTA?

DATOS

- Pedro tiene un estuche con pinturas.
- Pedro se ha encontrado 3 pinturas.
- .....

PREGUNTA

- ¿Cuántas pinturas tenía Pedro antes en su estuche?

DATOS

- Estoy viendo por televisión una carrera de coches.
- Cada coche debe dar 18 vueltas al circuito.
- .....

PREGUNTA

- ¿Cuántas vueltas faltan para terminar la carrera?

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 61

- En un frutero había 5 naranjas, 4 manzanas y 3 plátanos.
- Entre Maite y su hermano han comido de postre 2 plátanos y una manzana.
- Para merendar, cada uno ha comido una naranja y una manzana.

❑ ¿Cuántas piezas de fruta han comido en total entre los dos hermanos?

- En el bolsillo tengo 95 céntimos.
- He comprado un caramelo de 15 céntimos y una piruleta que vale 50 céntimos.

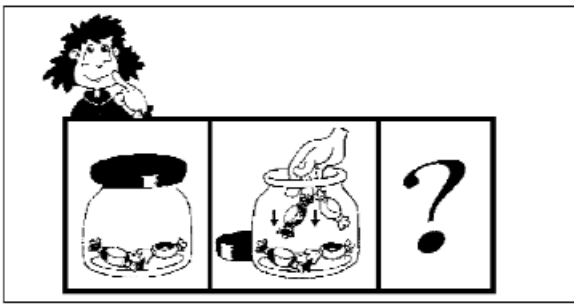
❑ ¿Cuánto dinero he gastado?

Continuando con actividades que ayudan a desarrollar la escucha y lectura analítica y dado que hasta este momento se ha trabajado bastante la reformulación de la información, el análisis de los datos aportados en los enunciados y su discriminación entre lo necesario e innecesario para responder a preguntas planteadas, etc. el siguiente paso será inventarse problemas estableciendo relaciones entre los datos y las preguntas.

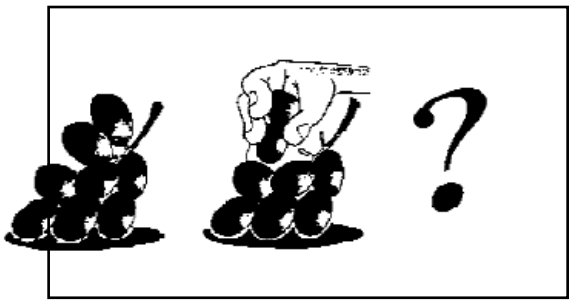
Para empezar, es conveniente presentar a los alumnos unas viñetas en las que se recoge una situación. En primer lugar, ellos deben observarlas y después analizar la información gráfica que les ofrecen. A partir de ahí tendrán que elaborar textos completos, primeramente orales y luego por escrito, que constituyan el enunciado de un problema. Deberán aportar los datos necesarios y además formular correctamente la pregunta.

❑ INVENTAR PROBLEMAS. RELACIONAR DATOS Y PREGUNTAS. CONTARSE UN PROBLEMA ¿QUÉ SÉ? ¿QUÉ ME PREGUNTAN?

INVENTO UN PROBLEMA



INVENTO UN PROBLEMA



matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 62

Dentro de esta tarea se contempla también la posibilidad de darles problemas para que, en primer lugar, los lean despacio, después se lo cuenten unos a otros con sus propias palabras, los reformulen y finalmente separen lo que saben, es decir, los datos de lo que tienen que calcular.

En clase somos 19 alumnos, 6 de ellos están enfermos y se han quedado en casa.

¿Cuántos alumnos han ido hoy a clase?

Resumo el problema:

- SÉ QUE.....
- TENGO QUE CALCULAR.....

Para mi disfraz de carnaval he utilizado 8 globos azules y 6 globos amarillos.

¿Cuántos globos he utilizado en total?

Resumo el problema:

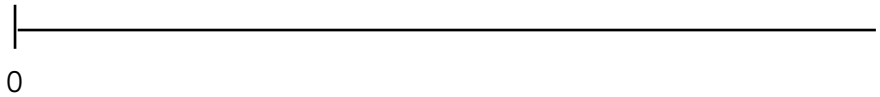
- SÉ QUE.....
- TENGO QUE CALCULAR.....

Las actividades que se han propuesto hasta ahora hacen referencia fundamentalmente a la comprensión de la situación planteada tanto verbalmente como por escrito o gráficamente, en cuyo caso se está trabajando la comprensión lectora. A partir de este momento, en el taller se va a dar mayor importancia al proceso de resolución de problemas, destacando de un modo especial el proceso heurístico de la realización de esquemas gráficos que ayuden no solo a comprender la situación planteada, sino además a establecer relaciones entre los datos aportados en el enunciado para poder llegar a la solución.

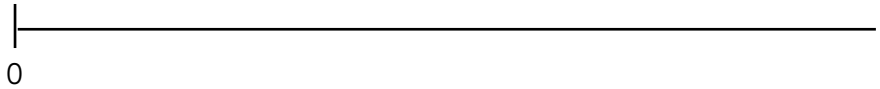
Se empezará con actividades sencillas en las que se trata de identificar esquemas sagitales con las operaciones que llevan asociadas.

- **PRESENTAR EN LA RECTA LAS SIGUIENTES OPERACIONES**

"Tenía 8 y me dan 7"



"Había 75 y se fueron 30"

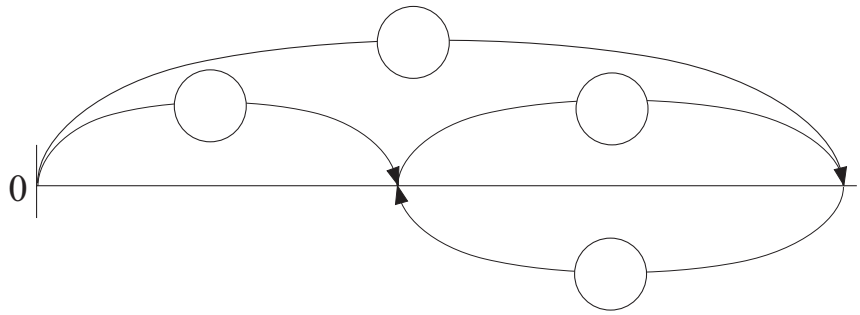


matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 63

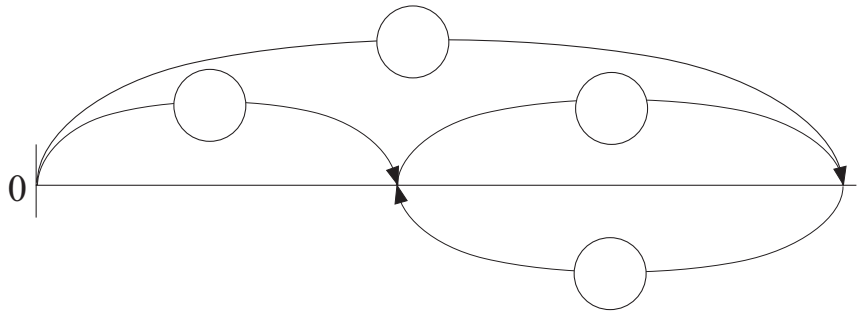
Poco a poco las actividades se irán complicando. Siguiendo este proceso se les pedirá a los alumnos que relacionen los datos y la pregunta del problema y completen el esquema que lo representa.

❑ COMPLETAR EL ESQUEMA PARA VISUALIZAR GLOBALMENTE LOS DATOS Y LA PREGUNTA DEL PROBLEMA

Al salir del cine Andoni tenía 7 caramelos. Durante la película se comió 5. ¿Cuántos caramelos tenía Andoni al entrar al cine?



¿Cuántas páginas tiene el libro que me regalaron, si he leído ya 35 y todavía me faltan 24 páginas para terminar el libro?

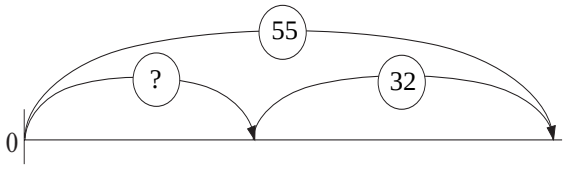


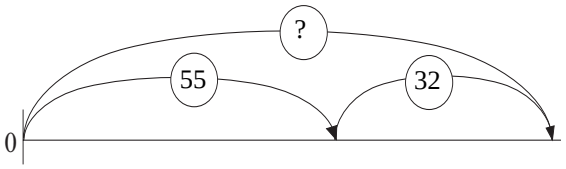
En otras ocasiones se les puede presentar un problema con dos esquemas y que ellos deduzcan cuál de los dos está mal porque no responde a la situación planteada y por qué.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 64

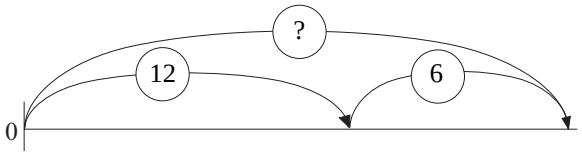
❑ ¿CUÁL DE LOS DOS ESQUEMAS ESTÁ MAL EN CADA CASO? ¿POR QUÉ?

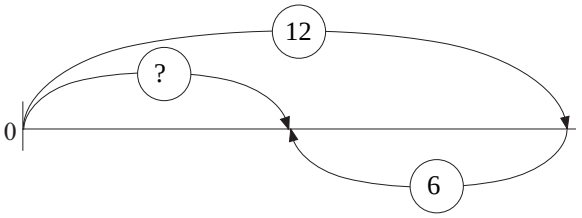
En un autobús que tiene 55 asientos viajan 32 personas. ¿Cuántos asientos deben quedar libres?





En una obra de teatro participan 12 niños y 6 niñas. ¿Cuántos alumnos actúan en esa obra?



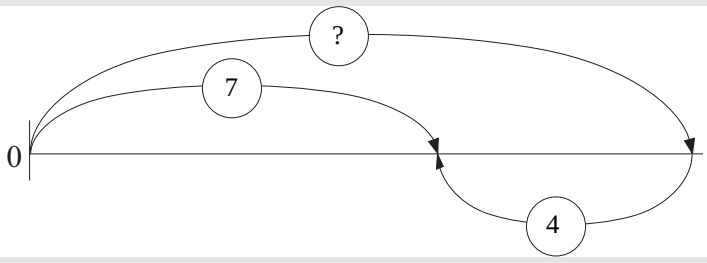


Las actividades más complejas dentro de este bloque las constituyen aquellas en las que se les presenta un esquema y el texto incompleto del enunciado del problema. Su tarea consiste en analizar la información que se les da y completar el enunciado de manera que responda al esquema resolutor.

❑ FIJARSE EN EL ESQUEMA Y COMPLETAR LOS DATOS QUE FALTAN EN EL ENUNCIADO DEL PROBLEMA

- A Elena le faltan por hacer 4 sumas de la tarea.
- .....

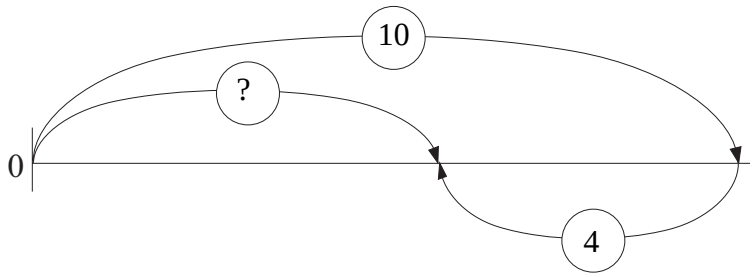
❑ ¿Cuántas operaciones tenía que hacer hoy Elena de tarea?



matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 65

- La tarta de mi cumpleaños estaba dividida en 10 trozos iguales.
- .....

❑ ¿Cuántos trozos de tarta hemos comido para merendar?



Para terminar el taller de este curso, quedaría presentar a los alumnos lo que será el plan general de resolución, que les servirá para aplicarlo a cualquier problema de tipo aditivo-sustractivo. Es conveniente insistir, desde el principio, en la importancia de seguir todos los pasos. En muchas ocasiones es necesario ejercer de modelos de resolutores, "verbalizar" todos aquellos procesos mentales que se considere necesario para que los alumnos tomen conciencia de ello. No hay que olvidar que el ser humano aprende por imitación y que nuestra misión es acompañarles en el proceso.

❑ ESTRATEGIA GENERAL PARA RESOLVER PROBLEMAS. INICIACIÓN, INTERIORIZACIÓN Y EJERCITACIÓN

1.- LEO DESPACIO EL PROBLEMA DOS O TRES VECES...

DESPUÉS...

❑ CIERRO LOS OJOS Y ME CUENTO EL PROBLEMA...

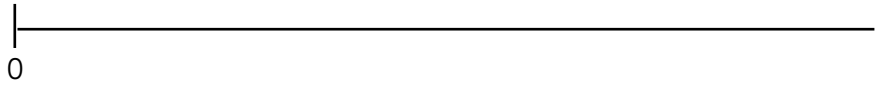
▶ SÉ.....

▶ QUIERO CALCULAR.....

2.- TRATO DE RELACIONAR LO QUE SÉ CON LO QUE QUIERO CALCULAR...

❑ HAGO UN ESQUEMA SOBRE LA RECTA NUMÉRICA....

RELACIONO EN EL ESQUEMA LOS DATOS Y LA PREGUNTA DEL PROBLEMA...



matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 66

3.- PLANTEO LA OPERACIÓN QUE RESUELVE EL PROBLEMA.

- ❑ EL ESQUEMA INDICA CUÁL ES ESA OPERACIÓN.
  - ▶ ESCRIBO LA OPERACIÓN A REALIZAR...
  - ▶ HALLO EL RESULTADO DE LA OPERACIÓN...
  - ▶ ESCRIBO LA RESPUESTA A LA PREGUNTA DEL PROBLEMA...

4.- COMPRUEBO LA RESPUESTA OBTENIDA...

- ▶ LLEVO LA SOLUCIÓN, COMO UN DATO MÁS, AL TEXTO DEL PROBLEMA... YA NO HAY PREGUNTA...
- ▶ LEO LA HISTORIA QUE RESULTA... ¿TODO ENCAJA?...

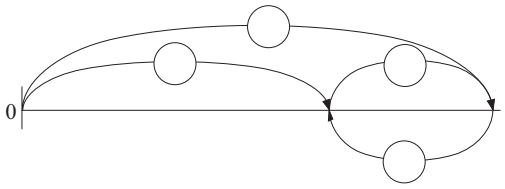
Es conveniente que los problemas matemáticos que se les propongan a los alumnos hasta el final del taller recojan los cuatros pasos del plan de resolución y tengan su espacio en la presentación de la actividad a realizar. Es una manera de ayudarles para que memoricen y practiquen la estrategia. El esquema que acompaña al problema debe completarlo el alumno, en principio, con ayuda del profesor, que actuará como modelo, dejando claro que de las cuatro flechas que inicialmente se les presentan, sólo el conjunto de tres de ellas responderá a la representación de la situación planteada.

Amaia tiene 15 años. Su hermano Koldo tiene 4 años menos. ¿Cuántos años tiene Koldo?

❑ Leo el problema dos o tres veces. Cierro los ojos y me lo cuento.

Datos... Pregunta...

❑ ESQUEMA



❑ OPERACIÓN: ? = ...= .....

SOLUCIÓN: .....

❑ COMPROBACIÓN. Me cuento la historia que resulta. ¿Todo encaja?

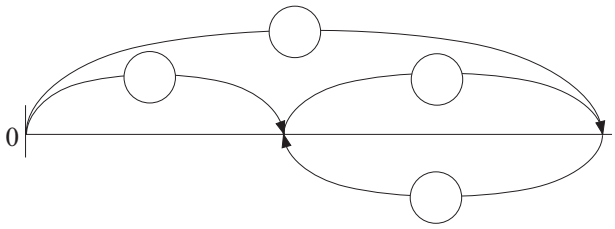
matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 67

Entre mi amigo José y yo tenemos 19 películas. Si yo tengo 8, ¿cuántas películas tiene mi amigo?

❏ Leo el problema dos o tres veces. Cierro los ojos y me lo cuento.

Datos... Pregunta...

❏ ESQUEMA



❏ OPERACIÓN: ? = ...= .....

SOLUCIÓN:…….……..

❏ COMPROBACIÓN. Me cuento la historia que resulta. ¿Todo encaja?

Evaluación

Nuestro sistema educativo está estructurado por etapas y dentro de estas por ciclos. Si bien la valoración del progreso del alumnado se lleva a cabo a través de evaluaciones que son más determinantes al finalizar cada ciclo, conviene que al término del taller, en cada curso, seamos capaces de constatar el avance realizado por los alumnos en el proceso de resolución de problemas. Las pruebas que se diseñen para tal fin deben ser acordes con los contenidos tratados a lo largo del curso y al mismo tiempo no hay que olvidar que deben servir para evaluar cuantitativamente el grado de consecución de los objetivos propuestos al inicio. Es necesario tener muy claro cuál es el nivel que se pretende alcanzar con los alumnos, qué tipologías de problemas se consideran específicas y qué estrategias generales o procesos heurísticos se quiere que los alumnos practiquen. Sobre la base de todo esto se seleccionan los ítems que se crean convenientes y se determina cómo se ha de valorar cada pregunta.

Una vez que las pruebas de evaluación del taller estén diseñadas, habría que mantenerlas sin introducir cambios durante un periodo de al menos cuatro años con el fin de ver y contrastar resultados.

A modo de ejemplo se proponen dos modelos de pruebas que podrían pasarse al final del taller en dos momentos diferentes y después hacer una valoración conjunta. En ellas se recogen cuatro tipos de actividades:

- De reformulación.
- Actividades sencillas de cálculo mental.
- Problemas de texto incompleto en los que, a partir de los datos dados, se deben formular preguntas.
- Problemas aditivo-sustractivos.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 68

1º PRUEBA A NOMBRE:……

❑ Di lo mismo, pero de otra forma:

- En verano los días son más largos que en invierno. (1,5 puntos)

  En invierno los días son……que en verano.

- Begoña tiene más cromos que Javier. (1,5 puntos)

  Javier tiene ……que Begoña.

❑ Lee despacio, piensa y contesta

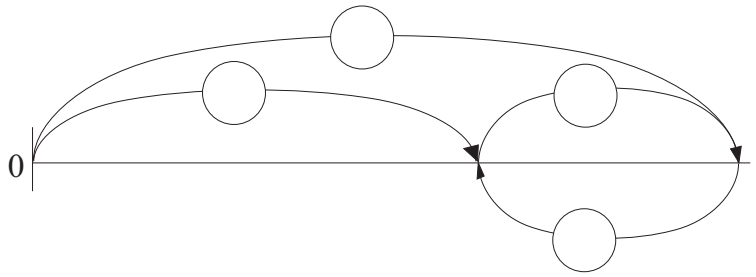
- ¿Cuántas patas tienen en total dos perros y dos gallinas?..... (1 punto)
- Poner 8 y después quitar 5, es lo mismo que poner …….. (1 punto)

❑ Problema

En clase de Laura son en total 27 niñas. Hoy no han venido a clase 5 niñas.

¿Cuántas niñas han estado hoy en la clase de Laura?

- Subraya en rojo lo que sabes y en azul lo que quieres calcular. (1 punto)
- Relaciona en el esquema los datos y la pregunta. (2 puntos)



- Escribe la operación y la solución del problema

OPERACIÓN:

(1 punto)

Solución:……

(1 punto)

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 69

1º PRUEBA B NOMBRE:……

❑ Di lo mismo, pero de otra forma:

▶ Paul ha comido tres caramelos menos que Ana. (1,5 puntos)

Ana ha comido ……..……que Paul.

▶ Pedro tiene menos libros que Leyre. (1,5 puntos)

Leyre tiene ……que Pedro.

❑ Lee despacio, piensa y contesta

▶ Estás pensando en un número. Si le sumas 3, obtienes 7.

Estás pensando en el número ☐ (1 punto)

▶ Si te dan tres caramelos, tendrás ocho caramelos.

Ahora tienes ☐ caramelos. (1 punto)

▶ Te han quitado 4 cromos. Ahora tienes sólo 5 cromos.

Antes tenías ☐ cromos. (1 punto)

❑ Escribe una pregunta que pueda contestarse. Sabemos que:

▶ Mikel está leyendo un libro que tiene 30 páginas.

▶ A Mikel le faltan 17 páginas para acabar de leer el libro

¿……..? (2 puntos)

❑ Escribe dos preguntas que puedan contestarse. Sabemos que:

▶ Hoy Begoña ha regalado a Javier 4 de sus cromos.

▶ Javier tiene ahora 8 cromos y Begoña 5 cromos.

¿……..? (1 punto)

¿……..? (1 punto)

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 70

1.2. Segundo curso

Actividades

En este curso, uno de los objetivos importantes del taller es practicar el modelo de resolución de problemas para conseguir en los alumnos un dominio que les capacite para abordar los problemas aditivo-sutractivos con garantías de éxito. Además se pretenderá que aprendan a trabajar en parejas, desarrollen su capacidad lógica y profundicen en comprensión lectora.

Al comenzar el taller es aconsejable plantear alguna sesión en gran grupo, con el fin de recordar aspectos trabajados durante el curso anterior. Esta forma de trabajo se propone también al introducir nuevas tipologías de problemas. Después se pasará al agrupamiento por parejas, proponiéndoles en principio actividades bastante similares a las trabajadas en situación de gran grupo. Será el profesor la persona que determine en cada momento la forma de agrupamiento, decidiendo en su caso la composición de las parejas cuando crea conveniente trabajar de este modo, manteniéndolas además estables durante bastante tiempo con el fin de que se vayan ajustando al ritmo, familiarizando con el modo de resolver las dificultades que vayan surgiendo, aceptándose entre ellos y proporcionándose la ayuda necesaria en cada momento... Hay que insistir mucho en la idea de que deben resolver el problema entre los dos y que no se copien si no entienden.

Al presentarles la hoja de trabajo en cada sesión, lo primero que deben hacer, en total silencio, es dedicar cinco minutos a la lectura individual del problema que han de resolver. Pensar sobre él para, después, en parejas, contárselo unos a otros, decidir conjuntamente el esquema a realizar y la operación asociada. Una vez que hayan consensuado su decisión, resolverán individualmente el problema cada uno en su hoja y comprobarán el resultado. Durante este tiempo el profesor se desplazará por la clase, para escuchar los razonamientos de los alumnos e intervenir cuando lo crea conveniente intentando reconducir a aquellas parejas que no estén bien encaminadas. Se trata en este caso de hacerles preguntas… con el fin de que se percaten de su error.

Conviene que cada alumno tenga una carpeta en la que irá guardando las fichas realizadas. De ese modo, el profesor las revisará periódicamente y tomará nota del tipo de errores cometidos, para trabajar sobre ellos en otro momento bien con todo el grupo, con grupos más reducidos o con algún alumno en concreto e intentar subsanarlos.

A continuación se presentan algunos ejemplos de sesiones que pueden ser adecuadas para este curso. En cada ficha se propone trabajar de forma combinada un problema, en el que se pondrá en práctica el plan general de resolución presentado, y algún ejercicio de refuerzo en la línea de lo trabajado durante el taller de primer curso. El número de fichas, una o dos, para cada sesión del taller es también una decisión que debe tomar el profesor. Se puede empezar abordando solo una y conforme avanza el curso y los alumnos se familiarizan con la metodología ampliar a dos.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 71

EJEMPLOS DE FICHAS A TRABAJAR EN LAS SESIONES

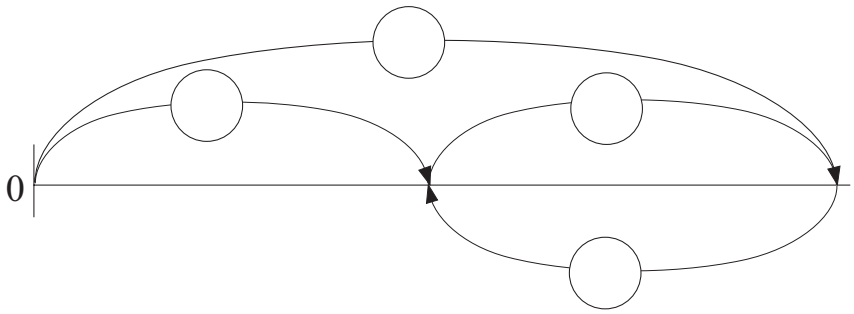
FICHA 1

En un partido de fútbol escolar, el equipo que viste con camiseta verde ha metido 14 goles. Ha metido 7 goles más que el equipo de camiseta azul. ¿Cuántos goles ha metido el equipo que viste de azul?

- Leo el texto del problema dos o tres veces. Cierro los ojos. Me lo cuento.

  ¿Qué sé? ¿Qué me preguntan?

- Relaciono los datos y la pregunta en el esquema.



- Planteo la operación y escribo la solución.

  ? = ...= ..... Solución:.....

- Compruebo. Llevo la solución al texto del problema. Leo la historia que resulta. ¿Todo encaja?

Ejercicios

1.- Calcula mentalmente.

Los 25 alumnos de clase nos hemos puesto en fila por orden alfabético. Yo soy la número 18.

Eso significa que hay …….. personas detrás de mí.

2.- Calcula mentalmente.

Mi madre ha comprado 4 camisetas que le han costado 18 euros cada una.

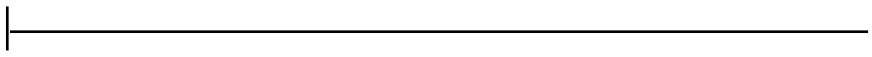
¿Crees que le llegará para pagar con un billete de 50 €? SÍ NO

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 72

FICHA 2

Javier tiene en la hucha 18 euros. Aimar tiene en la suya dos veces el dinero que tiene Javier. ¿Cuánto dinero tiene Aimar?

- ❑ Leo el texto del problema dos o tres veces. ¿Qué sé? ¿Qué me preguntan?
- ❑ Relaciono los datos y la pregunta. Hago un esquema.



0

- ❑ Planteo la operación y escribo la solución.

? = ...= ..... Solución:.....

- ❑ Compruebo. Llevo la solución al texto del problema. ¿Todo encaja?

Ejercicios

1.- Averigua, en cada caso, en qué número estoy pensando.

- Después de sumarle 8, obtengo 19. Solución: .....
- Le he restado 15 y me quedan 13. Solución: .....

2.- Maite ha hecho la operación | ? = 12 + 9 | para resolver un problema que habla de una bolsa de caramelos.

Escribe el problema que puede estar resolviendo Maite.

.....

.....

¿.....?

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 73

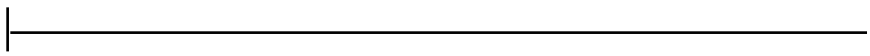
FICHA 3

He entrado a una tienda de chucherías con 95 céntimos. He comprado algunos dulces y al salir tenía 34 céntimos. ¿Cuánto dinero he gastado?

- Leo el texto del problema dos o tres veces. Cierro los ojos. Me lo cuento.

¿Qué sé? ¿Qué me preguntan?

- Relaciono los datos y la pregunta. Hago un esquema.



0

- Planteo la operación y escribo la solución.

? = ...= ..... Solución:.....

- Compruebo. Llevo la solución al texto del problema. Leo la historia que resulta. ¿Todo encaja?

Ejercicios

1.- Escribo dos preguntas que puedan contestarse con los datos conocidos.

En la estantería de mi habitación hay 37 libros de cuentos. En la de mi hermano hay 23 libros de cuentos.

¿ .....?

¿ .....?

2.- Tacho el dato que no es necesario para poder contestar a la pregunta..

Yo tengo 8 DVD de una colección sobre la naturaleza. La colección completa son 25 DVD. Mi amigo Julen tiene 3 más que yo.

¿Cuántos DVD tenemos entre los dos?

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 74

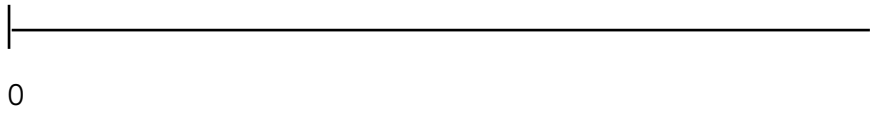
FICHA 4

Esta mañana en el recreo he ganado 6 canicas. Cuando he salido de clase al mediodía, tenía 19. ¿Cuántas canicas he llevado al colegio esta mañana?

- Leo el texto del problema dos o tres veces. Cierro los ojos. Me lo cuento.

  ¿Qué sé? ¿Qué me preguntan?

- Relaciono los datos y la pregunta. Hago un esquema.



- Planteo la operación y escribo la solución.

? = ...= ..... Solución:.....

- Compruebo. Llevo la solución al texto del problema. Leo la historia que resulta. ¿Todo encaja?

Ejercicios

1.- En cada caso, haz una pregunta que pueda responderse con los datos conocidos.

Para la merienda de mi cumpleaños, mi mamá compró 15 pastelitos.

Han quedado en la bandeja 3 pastelitos.

¿.....?

Quiero comprar un juego para mi "game boy".

Tengo ahorrados 24 euros.

Todavía me faltan por ahorrar 12 euros.

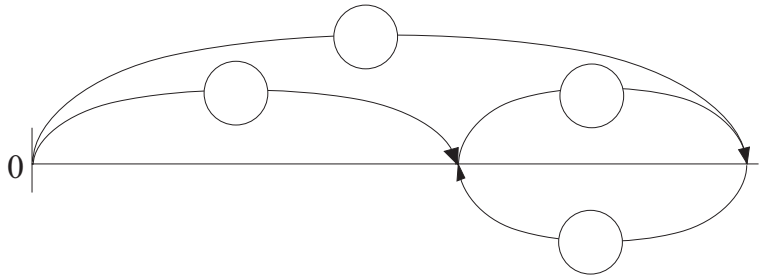
¿.....?

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 75

FICHA 5

Esta mañana hemos cogido un tren en la estación para ir a Madrid. Desde la estación hasta Madrid, hay 378 kilómetros. Hemos recorrido ya 215 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros debemos recorrer todavía hasta llegar?

No te olvides de comprobar tu solución.



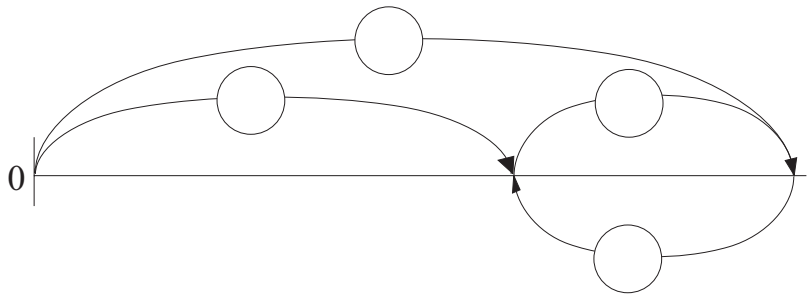
Operación: ? = ...= ..... Solución: .....kilómetros

He leído ya 57 páginas de un libro.

Todavía me faltan 36

¿Cuántas páginas tiene el libro?

No te olvides de comprobar tu solución.



Operación: ? = ...= ..... Solución:. .....páginas

Ejercicios

Mi papá ha comprado un jersey y unos calcetines. El jersey valía 86 euros y los calcetines 15.

Escribe lo que se quiere calcular al hacer:

? = 86 + 15 .....

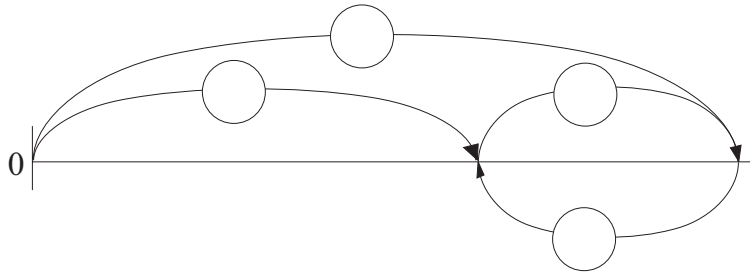
? = 86 - 15 .....

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:25 PÆgina 76

FICHA 6

Unos esquiladores deben esquilar a 250 ovejas blancas y 137 negras.
Han esquilado ya a todas las blancas y a 86 negras.
¿Cuántas ovejas han esquilado?

No te olvides de comprobar tu solución.



Operación: ? = ...= .....

Solución: .....

Ejercicios

1.- Di lo mismo, pero de otra forma.

- El armario está delante de la pared.
- .....

2.- Escribe un número de dos cifras que cumpla estas condiciones:

- Es impar.
- Sus cifras suman 13.
- La cifra de las decenas es mayor que la de las unidades.

SOLUCIÓN

3.- Da marcha atrás. Cuenta la historia al revés, de atrás hacia delante.

- Laura entra en clase. Se sienta en su silla. Abre el libro de matemáticas.

.....

.....

.....

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 77

Como puede comprobarse, la mayoría de los problemas aditivo-sustractivos tratados en el taller de este curso van acompañados de un esquema gráfico que los alumnos deberán completar. Sin embargo, en algunos casos, cuando se considere que ya se les han aportado suficientes ejemplificaciones, se deja para que los alumnos lo dibujen y luego lo completen.

En la primera parte de esta publicación, al hablar sobre tipologías de problemas que se debieran tratar en Educación Primaria, se ha mencionado además de los aritméticos, propios de la etapa, los de razonamiento lógico y aquellos problemas o cuestiones que se refieren al tratamiento del azar y la probabilidad entre otros. Pues bien, es en este curso donde hay que iniciar a los alumnos en este tipo de actividades. Se podrían mencionar como ejemplos los siguientes:

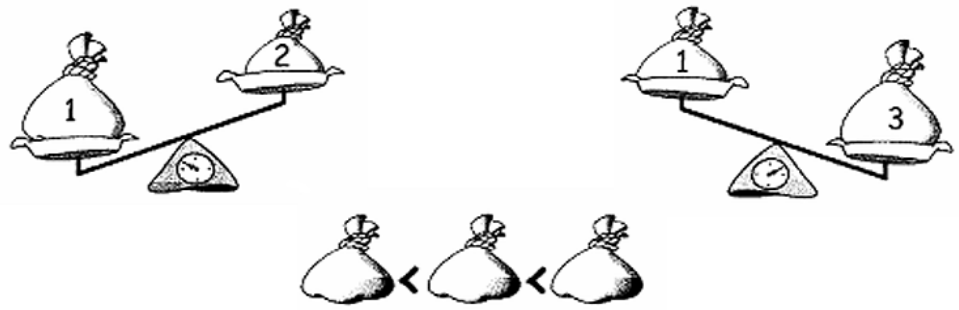
PROBLEMAS DE RAZONAMIENTO LÓGICO

Sustituye cada figura por un número, de forma que las sumas verticales y horizontales sean correctas. La misma figura corresponde siempre al mismo número

		8
		18
		7
18	15	

=
=
=
=

Observa las dos pesadas. Ordena según su peso los tres sacos



matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 78

CUESTIONES Y PROBLEMAS SOBRE AZAR

Has lanzado una moneda al aire 5 veces y te han salido todas las veces cara.

Si lanzas otra vez la moneda ¿qué crees que te saldrá? _____

Haz la prueba, ¿has acertado? _____

Repítelo varias veces.

¿Crees que es fácil acertar lo que va a salir? _____

¿Por qué? _____

Escribe al lado de cada oración si crees que es fácil que ocurra o por el contrario crees que es difícil.

- Que mañana vayas a la piscina al aire libre a nadar _____
- Que esta tarde celebres un cumpleaños _____
- Que juegues con tus amigos al salir de clase _____
- Que vayas hoy al cine a ver una película de dibujos animados _____
- Que comas un bocadillo para merendar _____
- Que leas un ratito antes de ir a dormir _____

Escribe en un papel el número de veces que crees que te saldrá el número 3 al lanzar un dado al aire 10 veces.

Después haz la experiencia y anota en la tabla los resultados:

Nº Tirada	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª
Resultado										

- ¿Cuántas veces te ha salido el número 3? _____
- ¿Coincide el número de veces que te ha salido el 3 con el que habías anotado en el papel? _____
- Mira los resultados de tus compañeros.
- ¿Hay muchos resultados parecidos al que te ha salido a ti? _____
- ¿Son muy diferentes? _____
- ¿Te parece que es fácil adivinar el número que saldrá si vuelves a lanzar el dado? _____

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 79

Evaluación

En este curso se presentan también dos pruebas para pasarlas en días diferentes al final del taller. Deben realizarse individualmente por lo que es muy conveniente que de vez en cuando una sesión de las del taller se realice siguiendo esta modalidad de agrupamiento. A través de las pruebas recogeremos información sobre cuál es la situación de los alumnos en el aspecto de resolución de problemas al finalizar el ciclo.

Las actividades que aparecen son similares a las trabajadas a lo largo del curso y recogen tanto aspectos referidos a la comprensión lectora y al desarrollo de competencias en este campo, como problemas en los que tienen que aplicar el plan general de resolución.

Las estrategias generales que se aplican durante este taller: lectura analítica, separación de datos e incógnitas, realización de gráficos… son también una continuación de lo trabajado con los alumnos el curso anterior, si bien en este caso estarán ya más familiarizados con ellas.

Las otras tipologías de problemas que se han iniciado durante el curso no aparecen en la evaluación del taller por no considerarse lo suficientemente representativas del mismo, pero eso no quiere decir que deban eludirse en su tratamiento.

Para que estas pruebas u otras similares diseñadas por el profesorado tengan validez como pruebas finales del taller, es necesario mantenerlas durante al menos cuatro años para poder comparar resultados antes de introducir modificaciones.

Los modelos que vienen a continuación pretenden dar una idea sobre los contenidos de la prueba de evaluación. Las actividades podrían modificarse si así se considera, pero es recomendable que la estructura y tipología permanezcan, ya que es lo fundamental en este curso:

- Dados los datos de un problema, escribir una o más preguntas que se podrían responder a partir de la información presente en el enunciado.
- Dados algunos datos y una pregunta, escribir los datos que son necesarios y no están en el enunciado, para poder responder a la pregunta formulada.
- Problemas para responder a través de cálculo mental. Son bastante discriminativos.
- Problemas aditivo-sustractivos.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 80

2º PRUEBA A NOMBRE: ……

❑ Escribe una pregunta que pueda contestarse.

Sabemos que:

- Alex tiene 16 cromos de una colección de animales.
- La colección completa son 45 cromos.

¿……..…..? (1 punto)

❑ Escribe el dato que falta para poder contestar a la pregunta.

- Mikel ha comprado un libro en la librería.
- El librero le ha devuelto a Mikel 4 euros.
- ……

¿Cuántos euros costaba el libro que ha comprado Mikel? (1 punto)

❑ Lee despacio, piensa y contesta: (1 punto cada apartado)

1.- Laura tiene 9 cromos. Laura tiene 2 cromos más que yo.
Yo tengo …… cromos.

2.- Sumar 25 y después restar 10, es lo mismo que ……

3.- Me faltan 4 euros para tener 7.
Ahora tengo ……euros.

4.- María compró 12 caramelos, 2 caramelos menos que Javier.
Javier compró ……caramelos.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 81

PROBLEMA

(4 puntos)

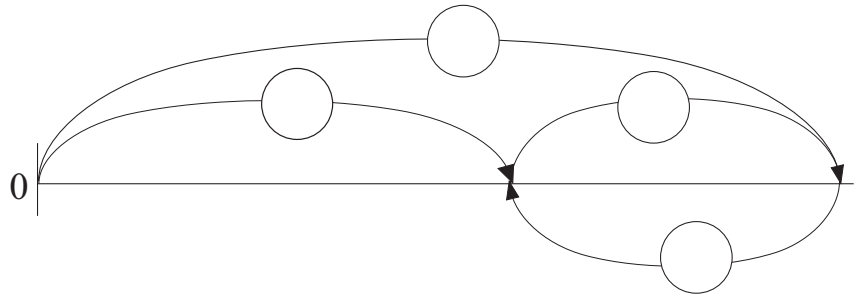
Una frutera tenía 58 kilos de manzanas y 42 kilos de peras.

Ha vendido todas las peras y 36 kilos de manzanas.

¿Cuántos kilos de fruta ha vendido la frutera?

► Subraya de rojo lo que sabes y de azul lo que quieres calcular.

► Completa el esquema con los datos y la pregunta del problema.



► Escribe la operación y la solución del problema.

OPERACIÓN:

SOLUCIÓN: .....

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 82

2º PRUEBA B NOMBRE: ……

❑ Escribe dos preguntas que puedan contestarse.

Sabemos que:

- En la hucha grande hay 120 monedas.
- En la hucha pequeña hay 75 monedas.

¿……..? (0,5 puntos)

¿……? (0,5 puntos)

❑ Escribe el dato que falta para poder contestar a la pregunta (1 punto)

- Marta es mayor que Juan.
- Marta tiene 10 años.
- ……..

¿Cuántos años menos que Marta tiene Juan?

❑ Lee despacio, piensa y contesta: (4 puntos)

1. En la bolsa de Juan hay 10 gominolas más que en la bolsa de Marta.
   Marta se come 3 gominolas de su bolsa.
   Ahora Juan tiene …….. gominolas más que Marta.
2. Irene dice: "Tengo 10 años y mi madre tiene 40 años".
   Ahora mi madre tiene ……años más que yo.
   Dentro de 10 años mi madre tendrá …….. más que yo.
3. Pedro tiene 8 caramelos y yo tengo 5 caramelos.
   Pedro se come 5 de sus caramelos.
   Yo tengo que comer …… de mis caramelos para tener tantos como él.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 99

FICHA 2

Para la fiesta del colegio, se hacen campeonatos entre clases. Como en cada clase somos muchos niños, formamos tres equipos. Hoy hemos jugado a baloncesto. Los equipos de mi clase hemos conseguido los siguientes puntos:

- Equipo rojo: 25 puntos.
- Equipo azul: 16 puntos más que el equipo rojo, pero tres menos que el equipo verde.

¿Cuántos puntos hemos conseguido entre los tres?

- Cuéntate el problema ¿Cuáles son los datos?
- ¿Qué puedes calcular? Piensa en qué orden vas a hacer los cálculos. ¿Tienes un plan?

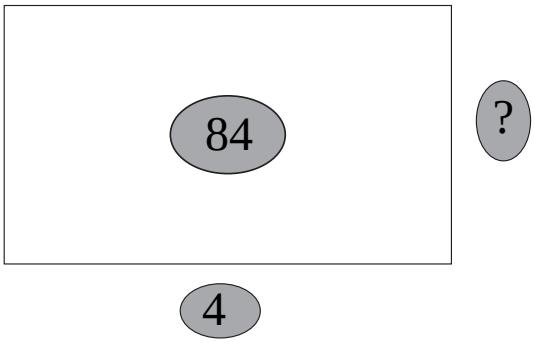
EJECUTA TU PLAN Y COMPRUEBA TU SOLUCIÓN

- Primero calculo.....
- Después calculo.....
- Por último calculo.....

SOLUCIÓN:.....

EJERCICIO PARA PENSAR

Iranzu está resolviendo un problema sobre el regalo de cumpleaños de una amiga y ha hecho el siguiente esquema:



Escribe tú cuál podría ser el texto del problema.

.....

.....

.....

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 100

FICHA 3

Para la fiesta de mi cumpleaños invité a 3 amigos. Entre todos me regalaron un puzzle que valía 17 euros y un libro. Cada niño puso 10 euros para comprar mi regalo. ¿Cuánto valía el libro que me regalaron?

- Cuéntate el problema... ¿Cuáles son los datos?.....
- ¿Qué puedes calcular? Piensa en qué orden vas a hacer los cálculos. ¿Tienes un plan?

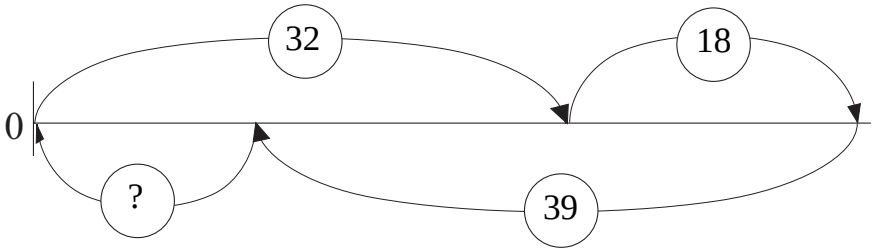
EJECUTA TU PLAN Y COMPRUEBA TU SOLUCIÓN

- Primero calculo.....
- Después calculo.....

SOLUCIÓN: .....

EJERCICIOS

Sabiendo cuál es el esquema que ha hecho Christian para resolver un problema que trata de dinero ahorrado, pagas de cumpleaños y gastos y sabiendo también cuál es la solución, escribe el texto del posible problema que ha resuelto Christian.



SOLUCIÓN : Ahorro 11 euros.

Texto del problema

.....

.....

.....

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 101

PROBLEMAS DE RAZONAMIENTO LÓGICO

Buscamos un número formado por cuatro cifras. Las cifras que lo forman son consecutivas, aunque pueden no estar en orden. Sabemos que:

- Es mayor que seis mil.
- La cifra de las unidades de millar es la más pequeña.
- La cifra mayor no está en las unidades.
- La cifra de las centenas es par.

Completa los cuadros de la figura con los números que faltan entre el 1 y el 9, de forma que tanto vertical como horizontalmente sumen 15.

8			15
		9	15
	7	2	15
15	15	15	

Rosalía y Montserrat son hermanas. Rosalía tiene dos sobrinos que no son sobrinos de Montserrat. ¿Cómo puedes explicar eso?

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 102

CUESTIONES SOBRE AZAR

Al lanzar un dado al aire:

- ¿Cuáles son los resultados posibles?.....
- ¿De cuántas formas puedes obtener un número par? Escríbelas.....

  .....
- ¿De cuántas formas puedes obtener un número impar menor que cinco? Escríbelas.....
- ¿De cuántas formas puedes obtener un número impar mayor que cinco?

  .....
- ¿Qué es lo contrario de que salga 3?.....

Escribe al lado de cada oración si es **muy probable** que ocurra, si es **probable**, si es **poco probable**, si es **seguro** o si es que **nunca** ocurrirá.

- Que el fin de semana no tengas que ir a clase .....
- Que el mes de Junio tenga 31 días .....
- Que llueva en primavera en Pamplona .....
- Que al lanzar un dado al aire salga 7 .....
- Que toque el gordo de la lotería de Navidad a tu familia .....
- Que te despiertes mañana a las 5 de la mañana .....
- Que mañana juegues con tus amigos .....
- Que hoy te hagan un regalo .....
- Que al hacer una multiplicación te equivoques .....

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 103

Evaluación

Al igual que en los demás cursos, se presentan dos pruebas para pasarlas en dos días diferentes al final del taller. Puesto que deben realizarse individualmente, conviene que alguna sesión del taller se desarrolle de esta manera, para que, luego, los días que se decida aplicarlas, los niños las perciban como una sesión más del taller y no se sientan evaluados.

El tipo de actividades que en ellas aparecen son del estilo de las sugeridas para trabajar en el taller; no obstante, son un modelo que puede ser modificado por el profesorado, aunque se recomienda mantener la estructura. Cada una de ellas consta de:

- Un ejercicio en el que deben rellenar huecos, para lo que es necesaria tanto la comprensión lectora (una de las competencias básicas de la etapa) como el cálculo mental.
- Una actividad en la que se presenta una situación y determinadas operaciones indicadas, a partir de las cuales el alumno debe analizar y determinar qué se quiere calcular en cada caso.
- Un problema representativo de este curso.

En la evaluación de tercero no se recogen problemas aritméticos de segundo nivel ya que han sido solamente iniciados y son más objeto de cuarto curso.

Por último, quisiera señalar que los objetivos, así como las estrategias generales trabajadas a lo largo de este tercer curso, quedan reflejados en cada una de las pruebas: lectura analítica y realización de esquemas.

Del mismo modo que se ha hecho constar en otros cursos, conviene mantener estas pruebas u otras similares que el profesorado pueda diseñar, durante un periodo de tiempo no inferior a cuatro años, para poder analizar y comparar los resultados generales obtenidos como evaluación del taller.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 104

3º PRUEBA A **NOMBRE: ……**

❑ Completa los datos que faltan.

► María dice:

"En mi clase somos 10 niñas. En mi clase hay 4 niñas más que niños".

En la clase de María hay ……. niños. (0,5 puntos)

Entre niños y niñas en la clase de María son ……. (0,5 puntos)

► En la caja roja hay 40 bolas.

En la caja roja hay la mitad de bolas que en la caja azul.

En la caja azul hay …….. bolas. (1 punto)

❑ Escribe lo que quiere calcular Juan al hacer la operación indicada.

Tenía 75 € en la hucha. Meto 25 € y después saco 12 €.

Operación: 25 - 12

Juan quiere calcular……

……

(1 punto)

❑ Piensa y responde:

► Todos los días Begoña suele ir al colegio caminando muy despacio.

Pero hoy Begoña ha ido al colegio tres veces más deprisa.

Hoy ha tardado …….. en llegar al colegio.

(1 punto)

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 105

❑ PROBLEMA

En el campamento, Juan y Begoña están pelando patatas.
Juan ha pelado 35 patatas y dice que ha pelado 12 patatas más que Begoña.
¿Cuántas patatas ha pelado Begoña?

▶ Subraya de rojo lo que sabes y de azul lo que quieres calcular. (1 punto)

▶ Relaciona los datos y la pregunta del problema en un esquema. (2 puntos)

▶ Plantea la operación que resuelve el problema y escribe la solución. (1 punto)

Solución : ……..……

Nota: No te olvides de comprobar tu solución.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 106

3º PRUEBA B **NOMBRE: ……**

❑ Completa los datos que faltan.

▶ Una butaca y una silla pesan en total 50 kilos.

Sabemos que la butaca pesa 45 kilos.

Dos de esas sillas pesarán ……..kilos. (1 punto)

Tres de esas butacas y tres de esas sillas pesarán en total …kilos. (1 punto)

▶ Un libro cuesta 20 € y una caja de pinturas 5 €.

La caja de pinturas cuesta……..euros menos que el libro. (1 punto)

El libro cuesta …….veces más que la caja de pinturas. (1 punto)

❑ Escribe lo que quiere calcular Juan en cada caso: (4 puntos)

Una pecera cuesta 20 € y una jaula 60 €.

▶ Operación: 60 - 20

Juan quiere calcular……

▶ Operación: 60 + 20

Juan quiere calcular……

▶ Operación: 60 : 20

Juan quiere calcular……

▶ Operación: 4 x 20

Juan quiere calcular……

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 107

❑ PROBLEMA

El día de su cumpleaños, Marta ha ido al cine y ha invitado a doce de sus amigas. La entrada del cine cuesta siete euros.

¿Cuánto ha pagado Marta?

▶ Subraya de rojo lo que sabes y de azul lo que quieres calcular. (1 punto)

▶ Relaciona los datos y la pregunta del problema en un esquema. (2 puntos)

▶ Plantea la operación que resuelve el problema. Opera y escribe la solución. (1 punto)

Solución : .....

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 108

2.2. Cuarto curso

Actividades

Este taller es el que cierra el segundo ciclo y uno de sus objetivos importantes es el dominio de la estrategia o plan general de resolución de los problemas aritméticos de segundo nivel, también llamados combinados de las cuatro operaciones. Esta tipología se inició ya en tercer curso, pero tal y como se comentó al comienzo de este capítulo en el apartado sobre los contenidos del taller de segundo ciclo, es en cuarto cuando estos problemas se trabajan con mayor profundidad. Dentro de la aplicación de la estrategia general de resolución, cobra especial importancia la fase de planificación. Es preciso exigir a los alumnos de este curso que, al resolver el problema, escriban, aunque sea de manera muy sencilla, qué piensan hacer en primer lugar y en los pasos sucesivos, por medio de qué operación y con qué finalidad. Esto les ayudará a estructurar el proceso de resolución.

Como novedad en el ciclo, se introducen los problemas de recuento sistemático. Se caracterizan porque tienen muchas soluciones y se pide que las averigüen todas. Por eso es importante organizar bien la búsqueda de las mismas, para estar seguro de no repetirlas y tener la certeza de no dejarse ninguna.

Se continuará además con los problemas ya iniciados en cursos precedentes como es el caso de los de razonamiento lógico y los de azar y probabilidad.

La metodología del taller sigue siendo similar a la de los otros cursos. Algunas actividades se resuelven en gran grupo, otras individualmente y la mayoría de ellas en parejas. En esta última modalidad de agrupamiento se comienza con una lectura y reflexión individual, luego, a través del diálogo con el compañero, se llega a un consenso sobre la planificación para la resolución del problema. A partir de ese momento, el trabajo vuelve a ser individual y, en algunos casos, una vez planificado el proceso, su finalización se podría plantear como trabajo para casa.

Es conveniente que en el tablón de clase, de vez en cuando, se coloquen soluciones significativas de problemas aportadas por los alumnos, con el fin de proporcionar modelos a algunos compañeros de clase a los que quizá les cueste más resolver este tipo de actividades.

Es necesario empezar el taller recordando el plan o estrategia general de resolución de problemas aritméticos de segundo nivel, que se expuso ya en la última parte del tercer curso. Dicho plan deberá estar muy presente prácticamente a lo largo de todo el curso. La mayor parte del taller versará sobre esta tipología de problemas, por eso se presentan solamente algunos ejemplos.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 109

PROBLEMAS Y EJERCICIOS ARITMÉTICOS DE SEGUNDO NIVEL

FICHA 1

Un librero compró 12 paquetes de 25 cuadernos cada uno. Pagó por todos 225 euros. Los guardó en el almacén, pero una pequeña fuga de agua le estropeó 35 cuadernos. El resto los vendió a 1 euro. ¿Cuánto dinero ganó en la venta de los cuadernos?

❑ Piensa en lo que puedes calcular. Idea un plan de solución, paso a paso.

❑ EJECUCIÓN DEL PLAN

- ▶ Primero calculo.....

  OPERACIÓN: ..... (indicada)

- ▶ Después.....

  OPERACIÓN: ..... (indicada)

- ▶ Por último.....

  OPERACIÓN: ..... (indicada)

  SOLUCIÓN:.....

4º curso

EJERCICIOS:

1.- Calcula mentalmente.

- ▶ La sexta parte del doble de 15 es .....
- ▶ La mitad del triple de 6 es .....
- ▶ El doble de la mitad de 8 es .....
- ▶ El triple del doble de 3 es .....
- ▶ La cuarta parte del doble de 10 es .....

2.- Calcula mentalmente si Marta está mintiendo o no. Justifica tu respuesta.

"El domingo salí de casa con 10 €. La entrada del cine me costó 5 €. Después compré 25 gominolas grandes y cada una costaba 10 céntimos. Volví a casa con más de 3€."

.....

.....

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 110

FICHA 2

Para una fiesta de cumpleaños hemos encargado en la tienda de chucherías que nos preparen 25 bolsas de caramelos. Cada bolsa debe llevar 15 caramelos y cada caramelo vale 12 céntimos. Si una bolsa de un kilo de caramelos tiene aproximadamente 125 caramelos, ¿cuántas bolsas de un kilo se necesitarán?

❑ Piensa en lo que puedes calcular. Idea un plan de solución, paso a paso.

► Primero calculo.....

OPERACIÓN: ..... (indicada)

► Después.....

OPERACIÓN: ..... (indicada)

SOLUCIÓN:.....

Inventa el texto de un problema que trate del número de alumnos y alumnas de un colegio y de la capacidad de los autobuses, sabiendo las operaciones que ha hecho Edurne y la respuesta a la pregunta del problema.

225 + 270 = 495	495 : 55= 9	SOLUCIÓN: 9 autobuses

.....

.....

.....

¿.....?

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 111

FICHA 3

Del dinero que tenía en la hucha he sacado 15 euros para comprarme un balón. Todavía tengo 23 euros más que mi hermano pequeño. Si él tiene 38 euros, ¿cuánto dinero tenía yo en la hucha antes de comprar el balón?

❑ Piensa en lo que puedes calcular. Idea un plan de solución, paso a paso.

► Primero calculo.....

OPERACIÓN: ..... (indicada)

► Después.....

OPERACIÓN: ..... (indicada)

SOLUCIÓN:.....

EJERCICIOS

1.- Completa: "Hoy es mi cumpleaños y mis tíos me han dado la paga. Si ayer tenía en la cartera 8 euros y hoy tengo 32…"

Hoy tengo .....euros más que ayer.

Ayer tenía .....de euros que hoy.

Hoy tengo .....de euros que ayer.

Ayer tenía .....euros menos que hoy.

2.- ¿Cuál es el número mágico?

❑ Es un número par de dos cifras.

❑ Sus cifras suman 15.

❑ La cifra de las decenas es mayor que la de las unidades.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 112

FICHA 4

Los 32 alumnos de 3º y los 45 alumnos de 4º hemos ido al cine a ver una película. En total hemos pagado por las entradas 308 euros. ¿Cuánto hemos pagado entre todos los alumnos de 4º?

Piensa en lo que puedes calcular. Idea un plan de solución, paso a paso.

Mi madre me ha comprado una raqueta de tenis que vale el doble que el balón de baloncesto que le ha comprado a mi hermano. En total ha pagado 72 euros. ¿Cuánto vale cada cosa?

Piensa en lo que puedes calcular. Idea un plan de solución, paso a paso.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 113

FICHA 5

Desde una editorial deben distribuir un libro a los 320 colegios de la provincia. Cada colegio debe recibir un paquete con 25 libros. En la editorial han producido ya 2.575 ejemplares. ¿Cuántos libros quedan todavía por editar?

❑ Piensa en lo que puedes calcular. Idea un plan de solución, paso a paso.

❑ EJECUCIÓN DEL PLAN

▶ Primero calculo.....

OPERACIÓN: ..... (indicada)

▶ Después.....

OPERACIÓN: ..... (indicada)

SOLUCIÓN:.....

En una sesión de una obra de teatro se recaudaron 1.067 euros. El precio de las entradas era de 3 € la de adultos y 2 € la de niños. Asistieron a la sesión 316 niños y el resto adultos. ¿Cuántas personas adultas fueron al teatro ese día?

Piensa en lo que puedes calcular. Idea un plan de solución, paso a paso.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 114

PROBLEMAS DE RECUENTO SISTEMÁTICO

Estos problemas no tienen una única solución. Se caracterizan justamente porque tienen varias respuestas posibles.

Lo importante en estos problemas es proceder con mucho cuidado, siguiendo alguna estrategia para poder estar seguros de haber hallado todas las soluciones.

Para llegar a ser un buen resolutor de este tipo de problemas hay que tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

❑ RECUERDA

1.- LEE DESPACIO EL PROBLEMA. CUÉNTATELO.

ENUMERA LAS REGLAS O CONDICIONES QUE TE IMPONE EL PROBLEMA.

- ❑ HALLA ALGUNA SOLUCIÓN QUE RESPETE TODAS LAS CONDICIONES DEL PROBLEMA.
- ❑ TE DARÁS CUENTA DE QUE PUEDES HALLAR MÁS SOLUCIONES.

2.- BUSCA UN PLAN, UNA ESTRATEGIA, QUE TE PERMITA IR HALLANDO TODAS LAS SOLUCIONES, DE UNA EN UNA.

3.- APLICA SISTEMÁTICAMENTE TU PLAN.

AGOTA TODAS LAS POSIBILIDADES QUE PUEDAN DARSE.

4.- REVISA LO QUE HAS HECHO.

- ❑ ¿HAS SIDO SISTEMÁTICO?
- ❑ ¿ESTÁS SEGURO DE QUE NO FALTA NINGUNA SOLUCIÓN?
- ❑ ¿PODRÍAS HABER SEGUIDO OTRA ESTRATEGIA DIFERENTE PARA HALLAR TODAS LAS SOLUCIONES?

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 115

FICHA 1

En mi hucha tengo monedas de 20 céntimos, 50 céntimos y 1 euro. Para comprarme un estuche debo sacar de la hucha 2 euros.

¿De cuántas formas diferentes puedo coger los 2 €?

Indica en la tabla cómo cogerías los 2 €.

Nº monedas de 20 céntimos	Nº monedas de 50 céntimos	Nº monedas de 1 €

¿Cuántos cuadrados de igual o diferente tamaño eres capaz de ver en este dibujo?

A	B	C
D	E	F
G	H	I

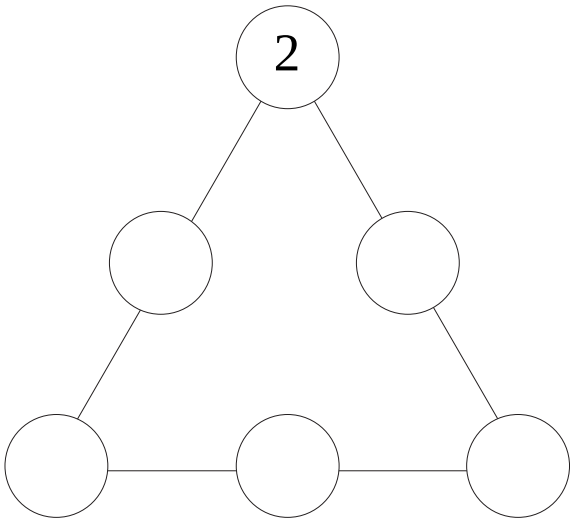
matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 116

PROBLEMAS DE RAZONAMIENTO LÓGICO

En un baúl tengo 9 pares de calcetines rojos y 7 pares de calcetines blancos. Con los ojos cerrados voy sacando calcetines uno a uno. ¿Cuántos calcetines tengo que sacar para estar segura de haber obtenido dos calcetines del mismo color?

¿Cuántos tendré que sacar para estar segura de haber obtenido dos calcetines blancos? ¿Y dos rojos?

Coloca los números 3, 4, 5, 6 y 7 dentro de los círculos de forma que cada lado del triángulo sume 12.



matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 117

PROBLEMAS SOBRE AZAR Y PROBABILIDAD

Una camisa tiene dos bolsillos. En uno de ellos hay dos fichas azules y otra amarilla. En el otro bolsillo hay tres fichas azules y dos de color amarillo. Para conseguir un helado, debes sacar con los ojos cerrados una ficha azul del bolsillo que elijas.

¿De qué bolsillo sacarías la ficha? _____

¿Por qué? _____

Haced la prueba varias veces con cada bolsillo y anotad los resultados.

¿Seríais capaces de sacar alguna conclusión entre todos los compañeros de clase?

_____

Entre todos los alumnos de clase hemos elegido a tres representantes para que sean delegado/a, primero y segundo ayudante. Han salido Íñigo, Miren y Paula. Ahora debemos decidir por sorteo quién de ellos ocupará cada cargo.

Haz una tabla con todas las posibilidades.

DELEGADO	1er AYUDANTE	2º AYUDANTE

Después completa las oraciones escribiendo:

menos probable, más probable, seguro, imposible

según te parezca más adecuado en cada caso.

- Es _____ que el delegado de clase sea chico.
- Es _____ que la delegada de clase sea chica.
- Es _____ que el delegado de clase sea Ander.
- Es _____ que el delegado/a de clase sea una persona de los elegidos.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 118

Evaluación

Los dos modelos o ejemplos de pruebas que se presentan son para pasarlas en días diferentes al final del taller de cuarto curso. Su realización es individual, por lo que conviene que de vez en cuando alguna sesión del taller se plantee bajo esta modalidad.

En ellas se recogen actividades de cálculo mental, en las que la lectura comprensiva juega un papel importante, ya que el alumno/a debe fijarse y reflexionar sobre las expresiones lingüísticas con contenidos matemáticos que en ellas aparecen. Se presentan también cuatro problemas entre las dos pruebas, uno de ellos es de recuento sistemático y los otros tres, aritméticos de segundo nivel, puesto que son los que mejor reflejan el contenido del taller.

Los procesos heurísticos planteados para trabajar a lo largo de este ciclo pueden y deben ponerse en práctica en la ejecución de estas pruebas, las cuales sirven también para valorar el nivel de consecución de los objetivos propuestos para el taller.

El contenido de las pruebas, es decir, las actividades concretas, puede modificarse según el criterio del profesorado del ciclo que ponga en práctica los talleres, pero es recomendable mantener la estructura (tipo de actividades) de las mismas, ya que es buen reflejo del contenido que debería trabajarse a lo largo del curso.

Para llevar a cabo una valoración de los materiales y la dinámica del taller es conveniente mantener las mismas pruebas, una vez diseñadas, durante tres o cuatro cursos sin que estas sean modificadas. De este modo, podrán establecerse comparaciones de los resultados obtenidos a lo largo de los años y entonces introducir en ellas las modificaciones que se crean oportunas. Debemos tener también en cuenta que no son unas pruebas de contenidos mínimos, como tampoco lo son los materiales del taller.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 119

4º PRUEBA A NOMBRE: ……

❑ Lee, piensa, calcula mentalmente y completa: (3 puntos)

- Tener 8 billetes de 5 € es lo mismo que tener …….. billetes de 20 €.
- Javier tiene 40 cromos y Juan tiene 25 cromos.
  Javier necesita …….. cromos más para tener el doble que Juan.
- Javier tiene 6 años.
  Dentro de …….. años tendrá el triple de edad.

❑ Indica las operaciones que harías para calcular: (3 puntos)

- Cuántas semanas son 84 días. ☐
- Cuántos minutos hay en cuatro horas. ☐
- Cuántas horas hay en un año. ☐

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 120

PROBLEMA

(4 puntos)

En el pueblo de Miren están construyendo 8 casas de 24 viviendas cada una. En cada vivienda hay 9 ventanas. Esta semana han colocado los cristales, pero les han faltado para 27 ventanas. ¿Cuántos cristales han colocado, si en cada ventana va un solo cristal?

- Piensa el plan que vas a seguir para resolver el problema.

- Ejecuta tu plan paso a paso.

Solución: ……..

PROBLEMA

(4 puntos)

Un comerciante compró 350 botellas de aceite para venderlas a 4 euros cada una, pero durante el traslado se estropearon algunas botellas. Después de vender el resto al mismo precio, recaudó 1.352 €. ¿Cuántas botellas se estropearon durante el traslado?

- Piensa el plan que vas a seguir para resolver el problema.

- Ejecuta tu plan paso a paso.

Solución: ……

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 121

4º PRUEBA B NOMBRE: ……

❑ Lee, piensa, calcula mentalmente y completa. (5 puntos)

▶ María tiene 30 €. Si María tuviera 10 € más, entonces tendría el doble de euros que Begoña.

Begoña tiene ……. euros.

▶ Yo tengo 35 caramelos y tú tienes 55 caramelos.

Tienes que darme …… caramelos para que los dos tengamos igual.

▶ 200 gramos del queso que le gusta a María cuestan 2 €.

Un kilo de ese queso costará …….. euros.

▶ La tercera parte del doble de 30 es igual a …….

▶ Multiplicar un número por 8 y después dividir el resultado por 2,

es lo mismo que …… ese número por …….

PROBLEMA (4 puntos)

Juan tenía un paquete de 500 folios.
Con esos folios, primero ha hecho 8 montones iguales de 25 folios.
Con el resto de los folios ha hecho montones iguales de 50 folios.
¿Cuántos montones ha hecho en total Juan con sus 500 folios?

▶ Piensa el plan que vas a seguir para resolver el problema.

▶ Ejecuta tu plan paso a paso.

Solución: ……

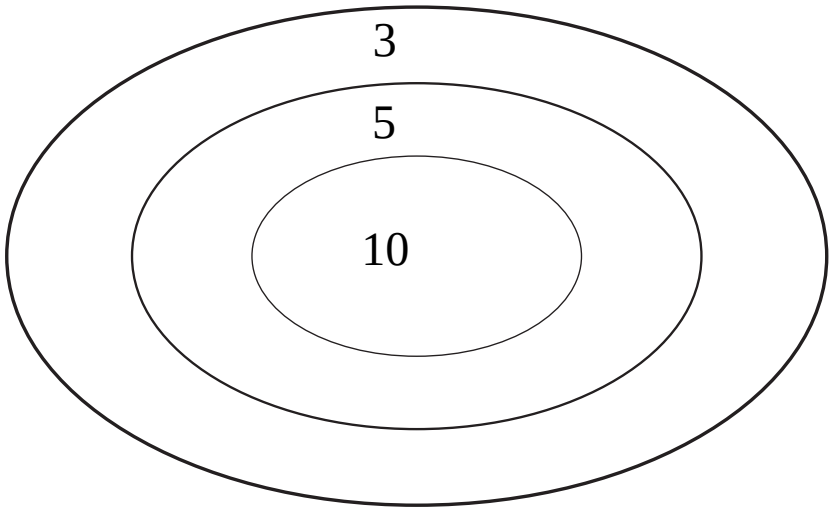
matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 122

PROBLEMA

(2 puntos)

María ha lanzado dos dardos y con los dos dardos ha puntuado en la diana.

Halla todas las puntuaciones que ha podido sacar María.



matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 123

3. TERCER CICLO

Este ciclo supone el término de la etapa; por ello, y después de haber trabajado la resolución de problemas de esta manera, los alumnos poco a poco habrán interiorizado el proceso. El hecho de afrontar este tipo de actividades en parejas les facilitará apropiarse de las estrategias utilizadas y considerar diferentes puntos de vista en la planificación previa a la resolución. Serán más capaces de expresarse matemáticamente en sus razonamientos y habrán construido su propio juicio para la valoración del resultado obtenido al final del proceso. Todo esto es el fruto del planteamiento de trabajo llevado a cabo y de la aplicación de la metodología propuesta. Los resultados se van viendo de forma gradual a lo largo de esta etapa educativa y ahora nos encontramos en su último tramo.

Objetivos

Durante este ciclo el alumno/a debe:

- Identificar situaciones de su entorno, que requieran el uso de operaciones elementales de cálculo.
- Utilizar estrategias personales (bien de las trabajadas en clase o inventadas por los alumnos) y hábitos que contribuyan a aumentar el porcentaje de éxito al abordar el estudio-resolución de problemas.
- Consolidar la estrategia general de resolución de problemas aritméticos de segundo nivel.
- Escribir con claridad, orden y limpieza el plan pensado y su ejecución.
- Resolver problemas aritméticos de tercer nivel.
- Resolver problemas de recuento sistemático.
- Resolver problemas sencillos de razonamiento lógico-argumentativo.
- Resolver problemas sencillos de razonamiento inductivo.
- Aprender a trabajar en parejas o pequeños grupos.

Al finalizar sexto, los alumnos deberán resolver sin dificultad la mayor parte de los problemas aritméticos. Esta tipología es la propia de la etapa y por eso pertenecen a este grupo un gran número de los problemas que se proponen a lo largo de estos seis cursos.

Contenidos

Durante una parte importante del taller, debería continuarse con problemas combinados de las cuatro operaciones (aritméticos de segundo nivel). Estos fueron iniciados al término del ciclo anterior, pero es necesaria su consolidación, ya que su resolución puede entrañar dificultades.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 124

Tampoco suponen una novedad en este ciclo los problemas de recuento sistemático, ni los de razonamiento lógico. Sin embargo, dentro de este grupo van a presentarse situaciones más novedosas en las que es necesario comunicar y justificar la solución de forma clara y precisa. Requieren dominar ciertos matices del lenguaje. Por su parte, los problemas de recuento sistemático tienen la mayor dificultad en descubrir la estrategia a utilizar, para proceder a la búsqueda de todos los casos que resuelven el problema sin olvidarse de ninguno. Conviene entrenar al alumno para que cuente con recursos en el momento de enfrentarse a estas situaciones.

Los problemas o cuestiones de azar y probabilidad se vienen trabajando también desde cursos anteriores. La finalidad es que se familiaricen con algunas expresiones, técnicas de recogida, tratamiento y organización de la información. En este tipo de actividades es imposible predecir con certeza el resultado, por ello se trata de hacer conjeturas, defenderlas o justificarlas; en algunos casos realizar la experiencia varias veces y, tras el análisis de los resultados obtenidos, volver nuevamente a revisar el nivel de cumplimiento o veracidad de sus previsiones.

En lo referente a las tipologías que se introducen o inician en este ciclo podemos hablar de:

- Problemas aritméticos de tercer nivel. Aunque las situaciones que en ellos se plantean pueden resultar similares a las del resto de problemas aritméticos, la complejidad se encuentra en la categoría numérica de los datos que aparecen en el enunciado, así como en su tratamiento operativo. En este tipo de problemas intervienen los números decimales, fraccionarios y porcentuales.
- Problemas de inducción-generalización. Son aquellos en los que hay que relacionar las variaciones que se observan entre los valores dados de dos magnitudes, con el fin de intentar deducir la ley general que regula tales variaciones. A partir de casos particulares se llega a la generalización. Este tipo de problemas llevará en Educación Secundaria al campo de las funciones. Resultan de bastante dificultad ya que la obtención de la ley general por la que se rigen los cambios en las variables, en algunos casos, puede resultar complicado. No obstante, deben plantearse como una toma de contacto inicial.

Metodología

Puede remitirse a lo expuesto en su correspondiente apartado del segundo ciclo, ya que no hay novedades importantes que resaltar. El taller se centra exclusivamente en problemas; ya no aparecerán ejercicios en los que se insista especialmente en la comprensión lectora a través de la conclusión de enunciados o la realización de giros lingüísticos… Esto debe quedar suficientemente trabajado en los ciclos anteriores y, por tanto, se considera asentado en los alumnos.

Respecto al agrupamiento, al igual que en los talleres de cursos anteriores, en aquellas tipologías que puedan presentar especial dificultad, el número de actividades a abordar en

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 125

gran grupo será mayor, ya que no debe olvidarse que la función del profesor es acompañar a los alumnos en su proceso de aprendizaje, ofreciéndoles oportunidades para que consigan mayor seguridad en sí mismos; especialmente en esta difícil tarea que es la resolución de problemas.

Dentro de las fases del plan general de resolución, en este ciclo sigue teniendo especial importancia la planificación. Los problemas aritméticos que se sugieren para trabajar en estos cursos necesitan de unos pasos intermedios (subproblemas) que deben aplicarse para llegar a la solución final. Dichos pasos deben quedar bien explicitados y justificados. Además ayudarán al alumno no solo a estructurar mejor el problema, sino también a avanzar en el proceso de resolución.

Procesos heurísticos

A lo largo de este ciclo, se utilizarán y se aplicarán a diferentes problemas los procesos heurísticos que se han ido presentando y trabajando en cursos anteriores. Así se podría volver a hablar por ejemplo de:

- Lectura analítica, la cual debe estar presente siempre que se lleve a cabo esta actividad intelectual.
- Representación de esquemas gráficos, estrategia que es recomendable utilizar al resolver problemas con datos fraccionarios, ya que pueden ayudar a comprender mejor la situación planteada.
- La determinación de problemas auxiliares, puesto que la mayor parte de problemas se resolverán con la aplicación de más de una operación.
- La técnica del tanteo inteligente, ya que a veces no está muy claro cómo empezar a proceder en la búsqueda de posibles soluciones.

Como novedad se puede hablar de:

- Resolver el problema empezando de atrás hacia delante. Se utiliza cuando es necesario actuar sobre los datos iniciales con muchos operadores y se conoce el estado final al que hay que llegar.

  En ese caso, lo aconsejable es partir de la situación final e ir aplicando sobre ella, por orden, los operadores correspondientes. Dichos operadores actúan de forma inversa a como tuvieran lugar si se resolviera el problema comenzando por la situación inicial para llegar a la final.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 126

Ejemplo de problema en el que podría aplicarse esta técnica:

Mayte quiere ir al cine a ver una película y ha quedado en reunirse con sus amigos en la puerta del cine a las 7:15. Antes de eso debe hacer las siguientes tareas:

- ducharse, lavarse la cabeza y secarse el pelo, lo que le llevará 45 minutos en el cuarto de baño,
- vestirse y recoger su habitación en 20 minutos,
- su madre le llevará en coche hasta el cine, pero desde su casa tardará 10 minutos.

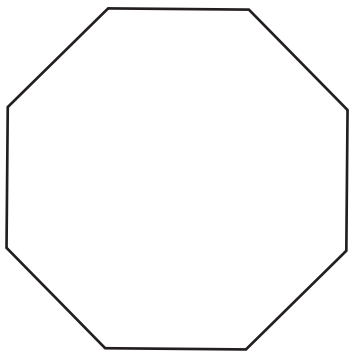
¿A qué hora debe empezar Mayte a hacer todas esas cosas para llegar a tiempo a la cita con sus amigos?

Si se conociera la hora inicial en la cual Mayte empieza a organizarse, habría que sumarle el tiempo que dedica a cada acción hasta llegar a la puerta del cine. Como la situación no es esa sino la contraria, lo que se conoce es la hora a la que debe llegar a reunirse con sus amigas, la forma de proceder es ir restando a partir de ese momento el tiempo necesario para desplazarse, vestirse, ducharse,… hasta llegar a la hora en la que debe empezar realizar todas estas cosas.

- Trabajar a partir de datos más sencillos. Es una técnica que se utiliza habitualmente en los problemas de generalización-inducción. A veces los datos que aparecen en el enunciado son números grandes y eso puede suponer una dificultad añadida. Se recomienda en esos casos simplificar su valor para centrar más la atención en comprender el problema, idear el plan de resolución y evitar posibles distractores.

Ejemplo de problema en el que se podría aplicar esta técnica:

Averigua el número de diagonales que tiene el siguiente polígono.



Una vez resuelto, ¿podrías decir cuántas tendría un polígono regular de 12 lados?

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 127

Para resolver este problema, sería necesario recurrir a situaciones análogas más sencillas. Se podría comenzar por la investigación del número de diagonales que tiene un polígono cuyo número de lados sea menor, ayudándose de representaciones gráficas y comparaciones; por ejemplo: cuadrado, pentágono, hexágono, etc. El objetivo es deducir la ley que relaciona el número de lados del polígono con el de las diagonales que posee. Una vez conseguido eso, la dificultad del problema es menor, ya que sólo habría que aplicar la ley en los dos polígonos a los que hace referencia el enunciado.

A continuación se sugieren unas actividades secuenciadas, referidas a los dos cursos que componen este tercer ciclo. Se plantean como ejemplos de problemas que pueden formar parte de los talleres correspondientes.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 128

3.1. Quinto curso

Actividades

Uno de los objetivos importantes del taller es asegurar el dominio del plan general de resolución de problemas, teniendo especial relevancia la fase de planificación. Los alumnos deben reflejar por escrito cuáles van a ser los pasos a seguir para llegar hasta la solución del problema. La comprobación de la validez de la respuesta obtenida cierra el proceso. Los alumnos de estas edades deben tener autonomía y formación suficiente como para reconocer si el resultado es pertinente.

El número de problemas por sesión puede variar así como su nivel de dificultad. De vez en cuando se podrían proponer problemas cuya solución sea precisamente que no se puedan resolver dadas las características del enunciado, bien porque carezca de sentido o porque no haya datos suficientes. En los ejemplos que se presentan a continuación estos problemas están señalados con un asterisco (*). En algunas sesiones puede quedar como tarea para casa terminar algunos problemas, siempre que se hayan trabajado previamente (en parejas, gran grupo o individualmente) y se hayan consensuado los pasos y el orden a seguir.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 129

PROBLEMAS ARITMÉTICOS DE SEGUNDO NIVEL

FICHA 1

Un repartidor de zumos naturales lleva en su camión 360 botellas de zumo después de haber entregado 25 cajas. Cada una de las cajas contiene 12 botellas. ¿Cuántas botellas de zumo llevaba inicialmente ese repartidor?

Cuéntate el problema. Idea un plan. Redacta con claridad, paso a paso, tu solución.

SOLUCIÓN: ……..

Sumando las edades de Jordi y de su tío salen 36 años. Si Jordi tiene la tercera parte de años que su tío, ¿cuántos años tiene cada uno?

Cuéntate el problema. Idea un plan. Redacta con claridad, paso a paso, tu solución.

SOLUCIÓN: ……..

Resuelve el problema mentalmente.

Tenemos 300 manzanas, debemos colocarlas en bandejas de quince manzanas cada una. ¿Cuántas bandejas necesitaremos?

SOLUCIÓN: ……..

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 130

FICHA 2

Un peregrino del Camino de Santiago anda aproximadamente 7 horas al día. Cada hora recorre por término medio 4 kilómetros. Si se encuentra a 616 kilómetros de Santiago ¿cuántos días le costará llegar?

Cuéntate el problema. Idea un plan. Redacta con claridad, paso a paso, tu solución.

SOLUCIÓN: .....

En unos campeonatos deportivos que se celebraron a nivel nacional, todos los equipos participantes se alojaban en el mismo hotel. Cada 3 días se hospedaban 4 equipos diferentes. Cada equipo lo formaban 9 personas. ¿Cuántas personas se hospedaron en el hotel al cabo de 15 días con motivo de esos campeonatos?

Cuéntate el problema. Idea un plan. Redacta con claridad, paso a paso, tu solución.

SOLUCIÓN: .....

(*)

Esta mañana he estado revisando un rollo de 24 fotografías para elegir entre ellas las que más me gustaban y hacerme copias. Si cada copia sale a 55 céntimos, ¿cuánto tendré que pagar por las fotografías?

SOLUCIÓN: .....

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 131

FICHA 3

Un libro cuesta lo mismo que 5 bolígrafos. Si tres libros cuestan 30 euros, ¿cuánto costarán 5 libros y 8 bolígrafos?

Cuéntate el problema. Idea un plan. Redacta con claridad, paso a paso, tu solución.

SOLUCIÓN: .....

En una tienda que estaba de rebajas, los pantalones costaban la mitad de su precio. He ido con mi madre y mis dos hermanos y nos han comprado a cada uno un pantalón. Los precios de los tres pantalones son iguales. Mamá ha pagado en total 54 euros, ¿cuánto valía cada pantalón antes de las rebajas?

Cuéntate el problema. Idea un plan. Redacta con claridad, paso a paso, tu solución.

SOLUCIÓN: .....

(*)

El mes pasado, me faltaban por leer 13 libros de la biblioteca de clase. Si esta semana he leído dos, ¿cuántos me faltan todavía por leer?

.....

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 132

PROBLEMAS DE RECUENTO SISTEMÁTICO

Queremos guardar tres fichas de diferentes colores en tres cajas de distintos tamaños, una grande, una mediana y otra pequeña. ¿De cuántas formas lo podemos hacer? Utiliza la tabla.

GRANDE	MEDIANA	PEQUEÑA

Escribe y ordena de menor a mayor todos los números impares de tres cifras que pueden escribirse con las cifras 1, 2, 3, 4.

Las cifras no pueden repetirse en cada número.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 133

PROBLEMAS DE RAZONAMIENTO LÓGICO

FICHA 1

En una bolsa hay 8 bolas numeradas del 3 al 10. Saco tres bolas con los ojos cerrados y me salen dos cuyos números son primos y la otra que tiene un número impar.

Responde si estas afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F)

- La suma de los tres números será un número impar.
- Si multiplico los números obtenidos, el resultado será un número impar.
- Si resto dos números de los que aparecen en las bolas que he sacado, obtendré un número impar.
- Su suma será como mínimo 16.
- Si restamos dos de los números y multiplicamos el resultado por el otro, tendremos un número par.

Lee atentamente estas frases sobre el número de niños que asistieron a unos campamentos de verano.

A. Había como mínimo 20.
B. Había más de 18.
D. Había menos de 30.
E. Había como mucho 20.
G. Había al menos 20.
H. No había más de 20.
F. No había 20.
C. No había menos de 20.

Indica, en cada caso, cuáles de las frases anteriores son verdaderas, sabiendo que:

- Al campamento asistieron 20 niños .....
- Al campamento asistieron 24 niños .....
- Al campamento asistieron 15 niños .....

Explica por qué estas condicionales son falsas:

- Si las cifras de un número suman 2, entonces tiene dos cifras

  .....

- Si me mojo, entonces es que llueve

  .....

- Si va al cine, entonces ha pagado su entrada

  .....

- Si es un ave, entonces vuela

  .....

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 134

FICHA 2

En una calle hay 100 portales. Hay que poner los números en todos ellos empezando desde el número 1. ¿Cuántos nueves se necesitarán?

Un lechero dispone únicamente de dos jarras de 3 y 5 litros para medir la leche que vende a sus clientes. ¿Cómo podría medir un litro sin desperdiciar nada de leche?

Explica con claridad tu razonamiento.

Adivina en qué número estoy pensando:

- Es un número par formado por tres cifras diferentes.
- Es mayor que 700.
- Sus cifras suman 19.
- La cifra de las decenas es doble que la de las unidades.

Explica con claridad tu razonamiento

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 135

PROBLEMAS DE INDUCCIÓN/GENERALIZACIÓN

❑ ESTRATEGIA GENERAL DE RESOLUCIÓN

1.- COMPRENDER EL PROBLEMA.

- ❑ DIFERENCIAR CUÁLES SON LAS DOS VARIABLES QUE EL PROBLEMA PIDE RELACIONAR.

2.- ANALIZAR SISTEMÁTICAMENTE CASOS PARTICULARES.

- ❑ RELLENAR LA TABLA, EMPEZANDO POR LOS CASOS MÁS SENCILLOS.

1ª variable	*	*	*	*	*	*	*
2ª variable	---	---	---	---	---	---	---

3.- BUSCAR LA LEY QUE PARECE CUMPLIRSE.

- ❑ FIJARSE EN LAS DIFERENTES COLUMNAS DE LA TABLA. ¿QUÉ RELACIÓN HAY ENTRE LA 1ª Y 2ª VARIABLE?

- ❑ MUCHAS VECES EL PROCEDIMIENTO SEGUIDO PARA HALLAR LOS CASOS PARTICULARES PERMITE DESCUBRIR LEYES.

4.- ESCRIBIR LA LEY GENERAL.

- ❑ CUANDO SE CREA HABER ENCONTRADO ALGO, TRATAR DE ESCRIBIR LO EN FORMA GENERAL.

- ❑ COMPROBAR QUE LA LEY SE CUMPLE PARA LOS CASOS SIGUIENTES.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 136

FICHA 1

Continúa las series añadiendo los términos que se piden:

- 7, 14, 21, ☐ , 35, ☐ , ☐ , ☐

- 5, 10, ☐ , 40, ☐ , 160, ☐ , ☐

- 8, 11, 9, 12, 10, ☐ , ☐ , ☐ , ☐

- ☐ , ☐ , 27, 81, 243, 729, ☐ , ☐

Rellena la tabla siguiente:

PUESTO	1	2	3	4			
NÚMERO	0	9	18	27			

Sin escribir los anteriores, ¿cuál es el término que ocupará el puesto número 20 en esta serie?

A comienzo de curso, en unos grandes almacenes pusieron el siguiente mensaje:

"Por cada 5 cuadernos que compre, le regalamos un cuaderno"

¿Serías capaz de rellenar la tabla que viene a continuación?

PAGAS	5	8	15	…		…	48	
LLEVAS	6	9		…	24	…		120

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 137

PROBLEMAS SOBRE AZAR

Matías y Elena juegan a lanzar al aire tres veces una moneda. Si sale dos veces cara o dos veces cruz, gana Elena. En caso contrario gana Matías.

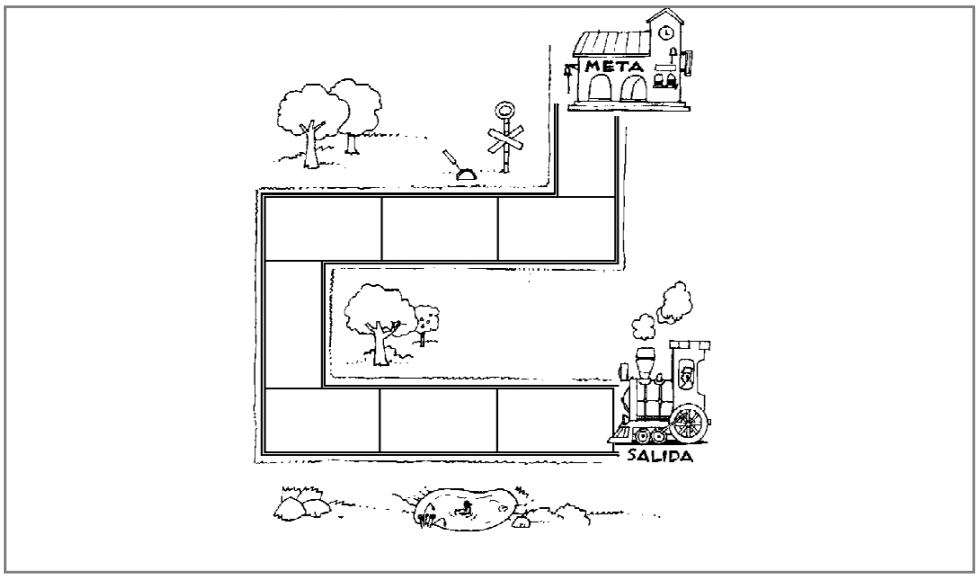
¿Por quién apostarías tú?

Avanza el tren

Es un juego para 2, 3 ó 4 jugadores.

Material:

Una ficha de diferente color para cada jugador, un dado con una cara marcada de rojo y las otras en blanco y un tablero como el siguiente:



Reglas del juego:

- Los jugadores colocan sus fichas en la casilla de salida y sortean el orden de juego.
- Cada jugador elige un color (rojo o blanco), que será el suyo para toda la partida.
- Por turnos se lanza el dado, si al jugador que ha elegido el color rojo le sale este color en el dado avanza cuatro casillas, en caso contrario se queda donde está. Si al jugador que ha elegido el color blanco le sale este color en el dado avanza una casilla, en caso contrario se queda donde está.
- El ganador es el primero en llegar a la meta.

Juega varias veces. Analiza los resultados. ¿Puedes sacar alguna conclusión?

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 138

Evaluación

Las dos pruebas que se presentan a continuación recogen problemas de las tipologías trabajadas durante el taller. Los aspectos a comentar sobre la evaluación han quedado ya expuestos en los cursos anteriores, por eso no se considera necesario volver a insistir sobre ellos.

5º PRUEBA A **NOMBRE: ……**

PROBLEMA (3 puntos)

Juan y María están haciendo una colección de cromos de animales.

Juan tiene 152 cromos y María sólo tiene 74.

¿Cuántos cromos le tiene que dar Juan a María para que los dos tengan igual?

- Piensa el plan que vas a seguir para resolver el problema.
- Ejecuta tu plan paso a paso.

Solución : ……

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 139

PROBLEMA (3 puntos)

Marta tiene que pagar un regalo que cuesta 55 €.

Indica con claridad todas las formas con las que Marta puede pagar el regalo, utilizando solamente billetes.

❑ EXPLICA POR QUÉ ESTAS FRASES SON FALSAS. (1,5 puntos)

▶ Todos los animales que vuelan tienen dos patas.

.....

▶ Si tiro un dado seis veces, entonces sacaré un cinco.

.....

▶ Algunos números que no son pares acaban en 4.

.....

PROBLEMA (2,5 puntos)

Sabes que cada cuatro años hay Olimpiadas.

En el año 2004 se celebraron Olimpiadas.

▶ Rodea los años en que se han celebrado o van a celebrarse Olimpiadas.

1980 1994 2014 2030

▶ ¿Cómo terminan todos los años en los que hay Olimpiadas?

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 140

5º PRUEBA B **NOMBRE: .....**

PROBLEMA (3 puntos)

El padre de Miguel va a comprar un coche que cuesta 22.496 €.

Tiene que pagar de entrada 6.800 € y el resto lo tiene que pagar, mes a mes, durante tres años.

¿Cuántos euros tendrá que pagar cada mes durante tres años?

- Piensa el plan que vas a seguir para resolver el problema.
- Ejecuta tu plan paso a paso.

Solución : .....

PROBLEMA

❑ Acaba de rellenar la tabla, teniendo en cuenta la oferta. (3 puntos)

OFERTA "DOS POR TRES"

PAGA DOS BOTELLAS Y LLÉVATE TRES

Número de botellas pagadas	2	4	8	9	18
Número de botellas llevadas	3				

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 141

❑ EXPLICA POR QUÉ ESTAS FRASES SON FALSAS. (1,5 puntos)

► Si no tienes traje de baño, entonces no te puedes bañar en el mar.

.....

► Es suficiente tener un folio para poder escribir.

.....

► Es necesario tener un folio para poder escribir.

.....

PROBLEMA

❑ Ordena, de menor a mayor, **todos** los números de **tres cifras** que son **mayores que 500** y cuya **suma de cifras es 10.** (2,5 puntos)

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 142

3.2. Sexto curso

Actividades

Este es el curso que cierra el ciclo y la etapa. Los problemas aritméticos que son los propios de Educación Primaria debieran ser resueltos ya sin mayores complicaciones al término del taller. Al igual que en el curso anterior, el profesor/a valorará el número de problemas a trabajar por sesión, variando su nivel de dificultad. Podría también considerarse que, a medida que avanza el curso, en una misma sesión, se intercalen problemas de diferentes tipologías (aritméticos de segundo y tercer nivel, de recuento sistemático, de razonamiento lógico, de inducción y de azar), siempre y cuando se trabajen todas en el taller.

La metodología de trabajo y la temporalización a lo largo de la sesión serán como las planteadas en otros cursos. Empezar con unos minutos de silencio para la lectura personal de las actividades, posteriormente trabajo en parejas para la planificación del proceso y luego nuevamente trabajo individual para llevar a cabo lo planificado.

Las actividades que vienen a continuación podrían ser un ejemplo de problemas propios de los talleres a aplicar con alumnos de estas edades.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 143

PROBLEMAS ARITMÉTICOS DE SEGUNDO NIVEL

FICHA 1

En una casa de ocho vecinos, van a hacer obras en el portal. El coste asciende a 72.120 euros. Además quieren poner un espejo grande que cuesta 210 euros y adornar el portal con flores, lo que supone otros 92 euros. Tenían ahorrados 27.150 euros. ¿Cuánto debe abonar cada vecino?

SOLUCIÓN: .....

Para una función del circo se vendieron 850 entradas. Sabemos que el número de niños que estuvo en la sesión fue el cuádruple que el número de adultos y que de ellos 150 obtuvieron regalos. ¿Cuántos niños no consiguieron regalo?

SOLUCIÓN: .....

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 144

FICHA 2

En una bolsa de 1 kilo de caramelos surtidos de tres sabores, naranja, fresa y limón hay en total 219 caramelos. El número de caramelos de fresa es 18 más que el número de caramelos de limón, pero 12 menos que el número de caramelos de naranja. ¿Cuántos caramelos hay de cada tipo?

SOLUCIÓN: .....

Los 25 alumnos de clase ganamos el año pasado un premio literario y nos dieron 3.000 €. En un campamento gastamos 1.600 €. Compramos una enciclopedia para el colegio que nos costó 1.050 €, y, con el dinero que quedaba, el profesor nos compró un libro para cada alumno. Suponiendo que todos los libros valían lo mismo, ¿cuál era el precio de cada libro?

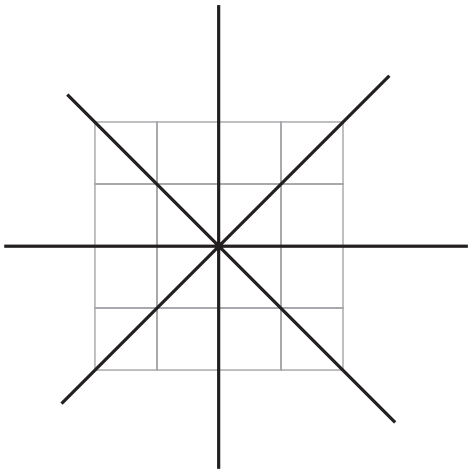
SOLUCIÓN: .....

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 145

PROBLEMAS DE RECUENTO SISTEMÁTICO

FICHA 1

Pinta las 16 casillas de rojo y de verde, de todas las formas posibles, para que haya 4 ejes de simetría.



Halla todos los números que cumplen a la vez las siguientes condiciones:

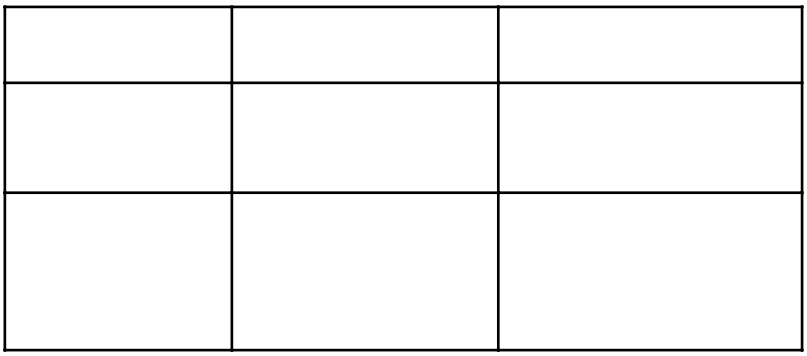
- Tienen 4 cifras y son todas pares.
- Son números capicúas.
- Son múltiplos de 3.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 146

FICHA 2

En cierto país existen solo tres tipos de monedas: una de 1 kirt, otra de 2 kirt, y la otra de 3 kirt. ¿De cuántas maneras puede pagar una persona en ese país la cantidad de 9 kirt?

Calcula cuántos rectángulos hay en la figura. Hazlo de forma ordenada para asegurarte que cuentas todos. Hay muchos.



matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 147

PROBLEMAS DE INDUCCIÓN-GENERALIZACIÓN

FICHA 1

Cinco personas acuden a una reunión. Al encontrarse en la sala, se saludan amigablemente dándose la mano. ¿Podrías decir cuántas veces se dan la mano estas personas? ¿Y si estuvieran 10 personas?

Recoge los resultados en la tabla que viene a continuación. Empieza con un número reducido de asistentes y vete aumentándolo poco a poco.

Personas	2	3	4	5	…	…	…	…	10	…	…	…
Saludos					…	…	…	…		…	…	…

¿Eres capaz de completar estas series?

- 1, 2, 4, 7, ☐ , ☐ , ☐ , 29, ☐

- 1, 4, 9, ☐ , 25, ☐ , 49, ☐ , ☐

- 7, 8, 14, 10, 21, 12, ☐ , ☐ , ☐ , ☐

- 2/15, 18/4, 6/21, 24/8, 10/27, ☐ , ☐ , ☐ , ☐

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 148

PROBLEMAS ARITMÉTICOS DE TERCER NIVEL

FICHA 1

Esta tarde, viendo una película por televisión, he abierto una tableta de chocolate y como soy muy golosa me he comido los 3/4 de la tableta. Cuando ha terminado la película ha venido una amiga y ha comido la mitad de lo que quedaba. Ha dejado sólo dos pastillas. ¿Cuántas pastillas de chocolate hemos comido cada una?

SOLUCIÓN: .....

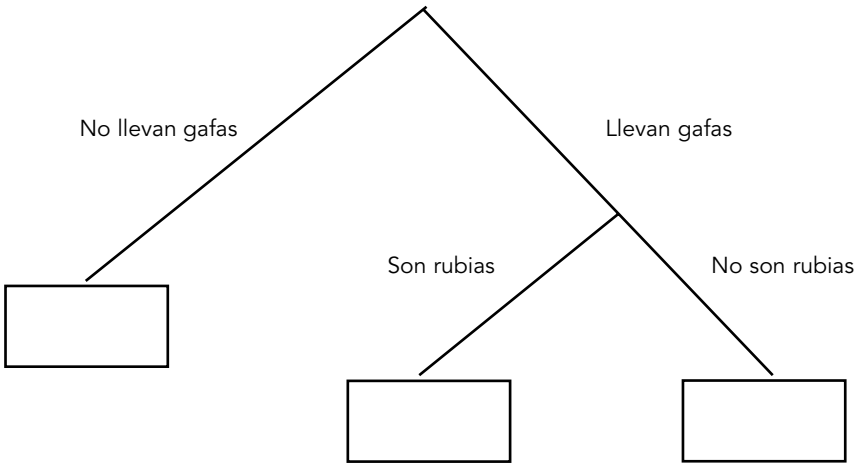
Laura fue a una tienda de ropa y compró un pantalón y tres camisetas. En total gastó 91,80 euros. Si sabe que las camisetas estaban todas al mismo precio y que el pantalón costaba lo mismo que las tres camisetas juntas, ¿cuál era el precio de cada cosa?

SOLUCIÓN: .....

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 149

FICHA 2

A una sesión de cine acuden 300 personas. De ellas el 45% llevan gafas. Además podemos decir que el 20% de las personas que llevan gafas son rubias. Completa el gráfico a partir de estos datos.



Si una botella de 3/4 de litro de un refresco vale 1,20 euros, ¿cuánto valdrá una caja de 10 botellas de un litro cada una?

SOLUCIÓN: ……..

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 150

PROBLEMAS DE RAZONAMIENTO LÓGICO-ARGUMENTATIVO

FICHA 1

Antonio y sus dos hijos, Pablo y Maitane, desean pasar el río en una barca que puede cargar como máximo 90 Kilos. El padre pesa 80 kilos, Pablo 45 y Maitane 40 kilos. Además llevan una maleta que pesa 46 kilos. Explica cómo pueden pasar el río las tres personas y la maleta, teniendo en cuenta que la maleta no debe quedar sola en ninguna de las orillas del río.

Tres profesores de matemáticas están en el recreo. Un alumno atrevido les pregunta cuál es el mayor de los tres. Ellos para que se dé cuenta de su impertinencia, le contestan con la siguiente información:

- Pepe: "Yo no soy el mayor".

- Fernando: "Pepe nació el primero".

- Luis: "Fernando nació el primero".

Sabiendo que uno de ellos miente, ¿podrías ayudarle a averiguar quién es el mayor de los tres?

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 151

FICHA 2

Un ladrón tiene que saltar tres vallas para llegar a un huerto a robar naranjas. Una vez terminada su fechoría, de vuelta a la calle, al saltar la primera valla, le parece que ha robado demasiadas naranjas y deja en el suelo la mitad de las naranjas que ha cogido más media naranja. Al llegar a la segunda valla piensa que todavía lleva demasiadas y vuelve a dejar la mitad más media naranja de su carga. En la tercera repite la operación y al llegar a la calle se encuentra con que no le queda más que una naranja.
Teniendo en cuenta que en ningún momento pudo el ladrón fraccionar ninguna naranja, ¿cuántas había robado inicialmente?

Una persona, ante un determinado retrato, explica:

"No tengo hermanos ni hermanas. El padre del retratado es el hijo de mi padre". ¿Quién es el retratado?

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 152

PROBLEMAS SOBRE AZAR

FICHA 1

Completa la tabla de la izquierda para que se recojan todas las posibilidades que pueden darse al lanzar dos dados sobre el tapete de una mesa y restar los números obtenidos. Haz el recuento y completa la tabla de la derecha.

¿Cuál es la probabilidad de que el resultado sea tres o mayor que tres?

¿Cuál crees que es el resultado que tiene más probabilidades de salir?

¿Qué probabilidad hay de que el resultado sea dos?

Si jugaras con tu compañero a adivinar el resultado cada vez que lanzas los dados, ¿qué número no elegirías? ¿Por qué?

-	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Resultados	Nº de posibilidades
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Una profesora va a sortear un premio entre sus diez alumnos. Cada uno debe elegir un número del 0 al 9.

Para saber a quién le va a corresponder el premio, la profesora abre al azar dos páginas de un libro y multiplica los números de las páginas que han salido. La última cifra del resultado del producto será la que determine qué alumno ha ganado el premio.

Haz la tabla en la que se recojan los resultados.

Si tú fueras uno de los diez alumnos de clase, ¿qué número elegirías? ¿por qué?

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 153

Evaluación

Del mismo modo que en los cursos anteriores, se plantean dos modelos de pruebas de evaluación, cada uno de ellos valorado con una puntuación total sobre diez. Es necesario tener muy presente que no son pruebas de contenidos mínimos; al contrario, el nivel de dificultad es alto. Las actividades siempre son modificables, aunque conviene mantener la estructura (tipo de actividades). Al igual que en los otros cursos, las pruebas se pasarán en días diferentes al final del taller.

6º PRUEBA A **NOMBRE: ……**

PROBLEMA (3 puntos)

Asier ha jugado a cromos con sus amigos en el recreo.
En la primera partida ha ganado 18 cromos, pero en la segunda partida ha perdido 47.
Al final del recreo cuenta sus cromos y tiene 96.
¿Cuántos cromos tenía Asier cuando empezó a jugar?

- Piensa el plan que vas a seguir para resolver el problema.
- Ejecuta tu plan paso a paso.

SOLUCIÓN: ……..

❑ CONTINÚA ESTA SERIE: (1 punto)

1, 4, 8, 13, 19, 26, ☐ , ☐ , ☐ , ☐

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 154

❑ ¿QUÉ NÚMERO OCUPARÁ EL PUESTO 100 EN ESTA SERIE? (1 punto)

1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, ... ☐

PROBLEMA (3 puntos)

Se lanzan cuatro dados iguales.

Halla de cuántas formas puede ocurrir que la suma de los puntos obtenidos sea 15.

PROBLEMA (2 puntos)

Para llenar una piscina pueden utilizarse dos grifos.

El grifo pequeño tarda en llenarla 120 horas y el grifo grande tarda solamente 60 horas.

¿Cuánto tiempo tardarán en llenar la piscina los dos grifos si funcionan a la vez?

Razona tu respuesta

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 155

6º PRUEBA B NOMBRE: ……

PROBLEMA (4 puntos)

Un pavo cuesta lo mismo que tres gallinas y una gallina cuesta lo mismo que dos pollos. El precio de un pavo es de 12 €.

¿Cuánto costarán dos pavos, dos gallinas y dos pollos?

- Piensa el plan que vas a seguir para resolver el problema.
- Ejecuta tu plan paso a paso.

PROBLEMA (2 puntos)

La suma de las edades de Juan y de sus tres amigos es de 42 años.

¿Cuánto sumarán sus edades dentro de 5 años?

Razona tu respuesta

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 156

PROBLEMA (2 puntos)

Un televisor cuesta 900 €. Me han hecho un descuento del 15%. ¿Cuánto he pagado por el televisor?

PROBLEMA (2 puntos)

Una lata de guisantes de 3/4 de kilo cuesta 2,70 €. ¿Cuánto costará una lata de 2,5 kilos?

Razona tu respuesta

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 157

CONCLUSIONES

Esta manera de abordar la resolución de problemas a partir de la aplicación del método o plan general, favorece también el desarrollo de una serie de capacidades no exclusivamente matemáticas. El proceso es lento y los resultados se irán viendo de forma progresiva. Lo importante es que el alumno/a vaya adquiriendo recursos o estrategias que le ayuden a asentar bases para, en el futuro, resolver con éxito las situaciones matemáticas que la vida diaria le plantee.

Durante la etapa de Educación Primaria, el profesor/a debe acompañar a sus alumnos/as en el proceso de aprendizaje, ayudándoles a estructurar su mente para analizar situaciones, planificarlas, resolverlas y estudiar la pertinencia de la solución obtenida. Para ello se presentará ante la clase, en muchas ocasiones, como modelo de buen resolutor/a.

La modalidad de trabajo por parejas les habrá ofrecido, a lo largo de la etapa, muchas oportunidades de expresarse oralmente y de intercambiar opiniones sobre diferentes modos de resolver problemas. Eso ayuda a conseguir una mayor seguridad personal, unas veces reforzando los propios pensamientos y otras considerando nuevas formas de percibir la situación planteada debido a la intervención de otros compañeros.

Gracias al buen hacer del profesorado, durante la etapa se habrá trabajado la resolución de problemas de modo sistemático, organizado y progresivo. Esto, unido al conocimiento y la experimentación de procesos heurísticos, en un ambiente de clase que favorezca la investigación y cooperación entre iguales, contribuye al desarrollo de capacidades que mejorarán la disposición del alumnado para afrontar en el futuro este tipo de actividades.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 158

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 159

BIBLIOGRAFÍA

- **ABRANTES, P. , BARBA, C., BATLLE, I. y otros** (2002): *La resolución de problemas en matemática,* Barcelona, Graó.
- **ALSINA, C. y otros** (1998): *Enseñar matemáticas*, Barcelona, Graó.
- **Autores varios** (1996): *La resolución de problemas.* Revista UNO (Revista de Didáctica de las Matemáticas. Nº 8), Barcelona, Graó.
- **BERMEJO, V.** (2004): *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*, Madrid, Ed. CCS.
- **CAPÓ DOLZ, M.** (2005); *El país de las mates. 100 problemas de ingenio 1.* Ed. El rompecabezas.
- **CAPÓ DOLZ, M.** (2005); *El país de las mates. 100 problemas de ingenio 2.* Ed. El rompecabezas.
- **CHAMORRO, C.** (2003): *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*, Madrid, Pearson.
- **DEULOFEU, J.** (2003): *Gimnasia mental 2*, Madrid, Ed. Martínez Roca (MR).
- **FERNÁNDEZ BAROJA, Mª F. y otras** (1991): *Niños con dificultades para las matemáticas*, Madrid, Ed. CEPE.
- **FERNANDEZ BRAVO, J. A.** (2000): *Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos*, Barcelona, Cisspraxis.
- **GIMENEZ, J. , SANTOS, L. y otros** (2004): *La actividad matemática en el aula*, *Homenaje a Paulo Abrantes*, Barcelona, Graó
- **HERNÁNDEZ PINA, F. y SORIANO AYALA, E.** (1999): *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria, Madrid*, La Muralla.
- **LARRY E. WOOD** (1988): *Estrategias de pensamiento. Ejercicios de agilidad men-tal*, Barcelona, Labor.
- **LUCEÑO CAMPOS, J.L.** (1999): *La resolución de problemas aritméticos en el aula*, Málaga, Aljibe.
- **MASON, J., BURTON, L. y STACEY, K.** (1988): *Pensar matemáticamente,* Barcelona, Labor.
- **PEREDA, L.** (2003): *Talleres de resolución de problemas. 1º, 2º y 3er Ciclo*, Donostia, Erein.
- **POLYA, G.** (1995): *Cómo plantear y resolver problemas*, México, Trillas.
- **PUIG, L. y CERDÁN, F** ((1988): *Problemas aritméticos escolares*, Madrid, Síntesis.
- **PUJOLÀS MASET, P.** (2001): *Atención a la diversidad y aprendizaje cooperativo en la Educación Obligatoria*, Málaga, Aljibe.
- **SEGARRA, L.** (2001): *Enigmática. Enigmas y juegos matemáticos*, Círculo de Lectores.
- **SEGARRA, L**. (2001): *Juega y sorpréndete con las matemáticas.* Círculo de Lectores.
- **SEGARRA, L.** (2002): *Juegos matemáticos para estimular la inteligencia*, Barcelona, Ed. CEAC.
- **SEGARRA,L.** (2001): *Problemates. Colección de problemas matemáticos para todas las edades*, Barcelona, Graó.
- **STACEY, K. y GROVES, S.** (1999): *Resolver problemas: estrategias*, Madrid, Narcea.
- **SUMMERS, G. J.** (2002):*Juegos de ingenio 2*, Madrid, Martínez Roca.
- **VILA, A. y CALLEJO Mª L.** (2004) *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas*, Madrid, Narcea.

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 160

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 161

matematica2 copi.qxp 31/08/2006 13:26 PÆgina 162