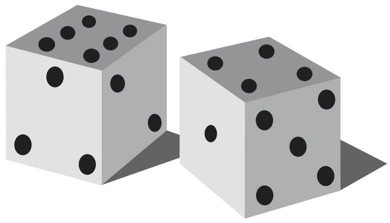
Matemáticas y su Didáctica para Maestros

Manual para el Estudiante Edición Febrero 2002

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

ESTOCÁSTICA Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS



Carmen Batanero
Juan D. Godino

ESTOCÁSTICA Y SU DIDÁCTICA

PARA MAESTROS

Carmen Batanero
Juan D. Godino

ESTOCÁSTICA Y SU DIDÁCTICA PARA
MAESTROS

© Los autores
Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada
18071 Granada

ISBN: 84-932510-0-3
Depósito Legal: gr339-2002

Impresión: ReproDigital. C/ Baza, 6.
La Mediana. Polígono Juncaril. Albolote.
18220-Granada.

Distribución en Internet:
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Publicación realizada en el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología, BSO2002-02452.

Índice

Página

Capítulo 1: ESTADÍSTICA

Página

Capítulo 2: Probabilidad

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Estocástica y su Didáctica para Maestros

Capítulo 1:

ESTADÍSTICA

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE ESTADÍSTICA EN PRIMARIA

Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

1) Resuelve los problemas propuestos.
2) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
3) Clasifica los enunciados en tres grupos según el grado de dificultad que les atribuyes (fácil, intermedio, difícil).
4) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
5) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
6) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

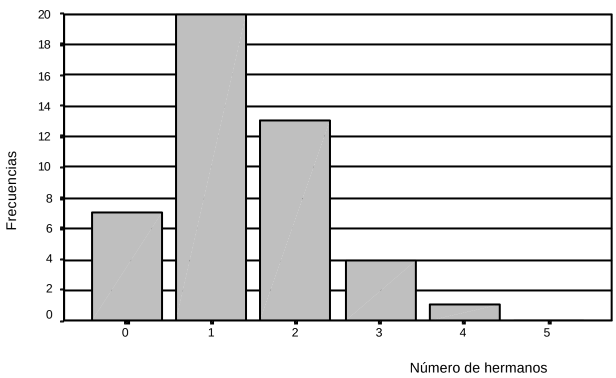
Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria

1. Lee este texto y completa la tabla, en tu cuaderno, con el número de veces que aparece cada letra vocal. "UN SOL PARA CONOCER. UNA LUNA PARA SENTIR. UN LIBRO PARA APRENDER. UN MUNDO PARA VIVIR"

- Representa los datos en un diagrama de barras.
- ¿Cuántas letras vocales tiene el texto?
- ¿Qué letra vocal es la moda en el texto?
- Haz otra tabla para las consonantes y complétala
- ¿Cuántas letras son consonantes?
- ¿Qué letra consonante es la moda?

VOCALES	FRECUENCIA

2. En este diagrama de barras se ha representado el número de hermanos que tienen los alumnos y alumnas de la clase de 6º. ¿Cuántas personas tienen un solo hermano? ¿Y cinco hermanos? ¿Cuántos alumnos y alumnas hay en 6º?



3. El gasto mensual en electricidad de una familia en el último año ha sido el siguiente:

E	F	M	A	My	J	Jl	Ag	S	O	N	D
3.500	3.278	4.251	3.740	3.125	3.470	2.432	2.560	3.680	2.549	4.578	4.689

¿Cuál ha sido el gasto medio mensual? ¿Y el gasto medio diario?

4. La familia López ha recorrido esta semana las siguientes distancias: 3 km, 4 km, 5 km, 7 km, 6 km, 10 km u 8 km. ¿Qué media de kilómetros diarios ha hecho?

5. Construye un diagrama de barras para cada una de estas tablas de frecuencias

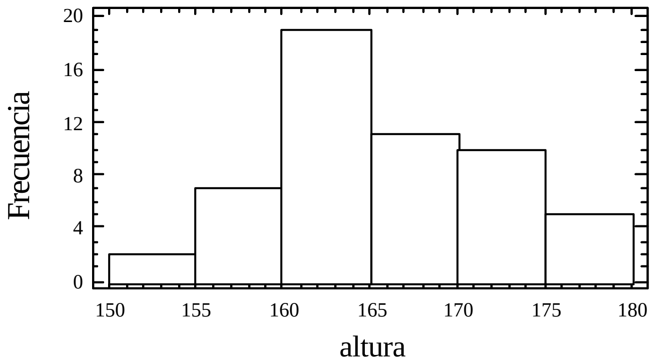
Colores	Nº de coches
ROJO	38
BLANCO	50
NEGRO	26
GRIS	20
AMARILLO	6

Equipos	Puntos
LEONES	20
OSOS	35
GUEPARDOS	25
GACELAS	40

6. Este histograma representa las alturas de un grupo de personas.

- ¿Cuántas personas miden menos de 155 cm? ¿Y más de 155 cm?

- ¿Cuántas personas forman el intervalo de mayor altura?



7. Los resultados, en centímetros, de la prueba de salto "a pies juntos" fueron:

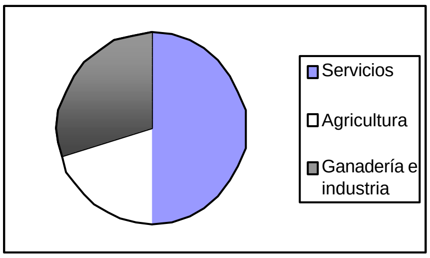
167	150	190	153	120	186	130	142
181	163	146	183	171	136	184	151
149	136	146	139	142	107	167	155

`	Nº de personas
ENTRE 0 y 120	
ENTRE 121 y 150	
ENTRE 151 y 180	
MÁS DE 180	

Completa la tabla y construye un histograma.

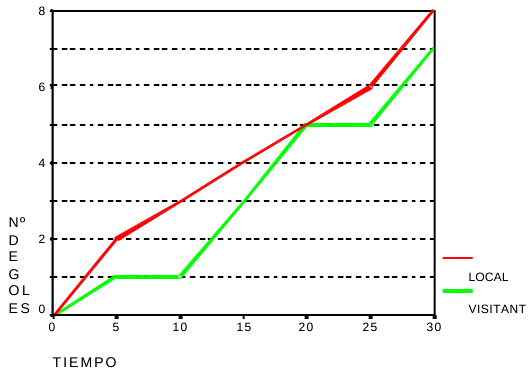
8. La actividad profesional de las personas de una ciudad se ha representado en este gráfico de sectores.

- ¿A qué actividad profesional se dedica el mayor número de personas de esa ciudad?
- Si las personas que trabajan son 20.000, 8.000 y 12.000, dí qué número corresponde a cada actividad.



9. En esta gráfica están representados los goles marcados en el primer tiempo de un partido de balonmano.

- ¿Cuál era el resultado en el minuto 5?
- ¿En qué minuto iban empatados a goles?
- ¿Qué equipo iba ganando en el primer tiempo?



B: Conocimientos Matemáticos

1. ESTADÍSTICA Y SUS APLICACIONES

1.1.¿Qué es la estadística?

Son muchas las definiciones posibles de estadística, y entre ellas hemos elegido las dos siguientes que reflejan bien las características de esta ciencia:

> *"La estadística estudia el comportamiento de los fenómenos llamados de colectivo. Está caracterizada por una información acerca de un colectivo o universo, lo que constituye su objeto material; un modo propio de razonamiento, el método estadístico, lo que constituye su objeto formal y unas previsiones de cara al futuro, lo que implica un ambiente de incertidumbre, que constituyen su objeto o causa final.*[1]
>
> *La estadística es la ciencia de los datos. Con más precisión, el objeto de la estadística es el razonamiento a partir de datos empíricos. La estadística es una disciplina científica autónoma, que tiene sus métodos específicos de razonamiento. Aunque es una ciencia matemática, no es un subcampo de la Matemática. Aunque es una disciplina metodológica, no es una colección de métodos.*[2]

1.2. Breves notas históricas

Los orígenes de la estadística son muy antiguos, ya que se han encontrado pruebas de recogida de datos sobre población, bienes y producción en las civilizaciones china (aproximadamente 1000 años a. C.), sumeria y egipcia. Incluso en la Biblia, en el libro de *Números* aparecen referencias al recuento de los israelitas en edad de servicio militar. No olvidemos que precisamente fue un censo lo que motivó del viaje de José y María a Belén, según el Evangelio. Los censos propiamente dichos eran ya una institución el siglo IV a.C. en el imperio romano.

Sin embargo, sólo muy recientemente la estadística ha adquirido la categoría de ciencia. En el siglo XVII surge la *Aritmética política*, desde la escuela alemana de Conring, quien imparte un curso con este título en la universidad de Helmsted. Posteriormente su discípulo Achenwall orienta su trabajo a la recogida y análisis de datos numéricos, con fines específicos y en base a los cuales se hacen estimaciones y conjeturas, es decir se observan ya los elementos básicos del método estadístico. Para los aritméticos políticos de los siglos XVII y XVIII la estadística era el arte de gobernar; su función era la de servir de ojos y oídos al gobierno.

La proliferación de tablas numéricas permitió observar la frecuencia de distintos sucesos y el descubrimiento de leyes estadísticas. Son ejemplos notables los estudios de Graunt sobre tablas de mortalidad y esperanza de vida a partir de los registros estadísticos de Londres desde 1592 a 1603, o los de Halley entre 1687 y 1691 para resolver el problema de las rentas vitalicias en las compañías de seguros. En el siglo

[1] Cabriá, S. (1994). *Filosofía de la estadística*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Valencia.
[2] Moore, D. S. (1991). Teaching Statistics as a respectable subject. En F. Gordon y S. Gordon (eds.), *Statistics for the Twenty-First Century*, (pp. 14-25). Mathematical Association of America.

XIX se descubren las leyes de los grandes números con Bernouilli y Poisson.

Otro problema que recibe gran atención por parte de los matemáticos de su tiempo, como Euler, Simpson, Lagrange, Laplace, Legendre y Gauss es el del ajuste de curvas a los datos. La estadística logra con estos descubrimientos una relevancia científica creciente, siendo reconocida por la British Association for the Advancement of Science, como una sección en 1834, naciendo así la Royal Statistical Society. En el momento de su fundación se definió la estadística como *"conjunto de hechos, en relación con el hombre, susceptibles de ser expresados en números, y lo suficiente numerosos para ser representados por leyes".*

Se crearon poco a poco sociedades estadísticas y oficinas estadísticas para organizar la recogida de datos estadísticos; la primera de ellas se creó en Francia en 1800. Como consecuencia, fue posible comparar las estadísticas de cada país en relación con los demás, para determinar los factores determinantes del crecimiento económico y comenzaron los congresos internacionales, con el fin de homogeneizar los métodos usados. El primero de ellos fue organizado por Quetelet en Bruselas en 1853. Posteriormente, se decidió crear una sociedad estadística internacional, naciendo en 1885 el *Instituto Internacional de Estadística (ISI)* que, desde entonces celebra reuniones bianuales. Su finalidad específica es conseguir uniformidad en los métodos de recopilación y obtención de resultados e invitar a los gobiernos al uso correcto de la estadística en la solución de los problemas políticos y sociales. En la actualidad el ISI cuenta con 5 secciones, una de las cuales, la IASE, fundada en 1991, se dedica a la promoción de la Educación Estadística.

1.3. Panorama actual

Aunque es difícil dividir la estadística en partes separadas, una división clásica hasta hace unos años ha sido distinguir entre *estadística descriptiva y estadística inferencial.*

La *estadística descriptiva* tiene como fin presentar resúmenes de un conjunto de datos y poner de manifiesto sus características, mediante representaciones gráficas. Los datos se usan para fines comparativos, y no se usan principios de probabilidad. El interés se centra en describir el conjunto de datos y no se plantea el extender las conclusiones a otros datos diferentes o a una población.

La *inferencia estadística,* por el contrario, estudia los resúmenes de datos con referencia a un modelo de tipo probabilístico. Se supone que el conjunto de datos analizados es una muestra de una población y el interés principal es predecir el comportamiento de la población, a partir de los resultados de la muestra.

Las capacidades de cálculo y representación gráfica de los ordenadores actuales permiten la obtención de una amplia variedad de gráficos y cálculos estadísticos de una forma sencilla y han hecho posible la aparición de una nueva filosofía en los estudios estadísticos: el *análisis exploratorio de datos,* introducido por Tukey. Es una perspectiva intermedia entre la estadística descriptiva y la inferencia y se da un papel importante a la visualización por medio de diferentes gráficos.

1.4. Estudios estadísticos

La estadística se ocupa del diseño de estudios en los que sea necesario la recogida de datos, el análisis de estos datos, y la predicción o toma de decisiones a partir de los resultados.

El siguiente ejercicio muestra un ejemplo de los tipos de predicciones que podemos hacer usando la estadística.

Ejercicios

1. Se toma una caja con 100 bolas blancas y el profesor sustituye r de ellas por bolas negras sin que los alumnos vean cuántas ha sustituido. Por turno cada uno de los alumnos con los ojos cerrados toma 10 bolas de la caja y rellena la ficha siguente:
Nombre------------
Nümero de bolas negras en la muestra
Porcentaje de bolas negras en la muestra
Estimación del número de bolas negras en la caja

2. El profesor en la pizarra completa con ayuda de los alumnos el siguiente gráfico de puntos. Se coloca un punto encima del valor del número de bolas negras en la muestra de 10, para cada uno de los alumnos.

Nümero de bolas negras en la muestra de 10 bolas

____
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

3. ¿Cuál será la mejor estimación del porcentaje de bolas negras en una muestra típica de 10 bolas? ¿Cuál será la mejor estimación del número de bolas negras en la caja? Finalmente se comprueba la fiabilidad de la estimación contando las bolas negras en la caja.

2. VARIABLES ESTADÍSTICAS. TABLAS Y GRÁFICOS

2.1. Población individuos y caracteres

Proyecto 1. ¿Cómo son los alumnos de la clase?
Objetivo: Se trata de elaborar un perfil de los alumnos, identificando el alumno típico y analizando si hay diferencias entre el chico y la chica típicos.
Datos: Se preparará una lista de las características de los alumnos que queremos estudiar analizando las diferentes formas en que podrían obtenerse los datos:
- Por simple observación: como el sexo, color de pelo y ojos, si usa o no gafas;
- Se requiere una medición: como el peso, talla o longitud de brazos extendidos;
- Habría que preguntar a los alumnos; es decir realizar una pequeña encuesta: número de hermanos, cómo viene al instituto; cuánto deporte practica, etc.

Los datos serán recogidos por los propios alumnos, mediante las diversas técnicas señaladas. Se requerirá un metro y una báscula, para tomar datos de los alumnos con un mismo instrumento. Se prepara una ficha como la siguiente para recoger datos de cada uno de los alumnos de la clase:

SEXO:
¿HACES DEPORTE? (Nada, poco, mucho):
PESO (kg.):
ALTURA (cm.):
LONGITUD DE LOS BRAZOS EXTENDIDOS EN CRUZ (cm.):
NUMERO DE CALZADO:
PESETAS QUE LLEVA EN ESTE MOMENTO EN EL BOLSILLO:

Una *población (o universo)* es el conjunto total de objetos que son de interés para un problema dado. Los objetos pueden ser personas, animales, productos fabricados, etc. Cada uno de ellos recibe el nombre de *elemento (o individuo)* de la población.

En el proyecto 1 recogemos datos de diferentes *variables* para los alumnos de la clase. Cada alumno de la clase es un *elemento* de la población *clase*.

Generalmente, en un estudio estadístico, estamos interesados en analizar algún aspecto parcial de los individuos que componen la población; por ejemplo, si se trata de personas, puede que nos interese, la altura, el peso, el color del pelo, el sueldo mensual que recibe, la opinión que le merece el partido que gobierna, etc. Estos aspectos parciales reciben el nombre de *caracteres* de los elementos de una población y son, por su naturaleza, *variables*, de forma que en distintos individuos pueden tomar valores o *modalidades* diferentes. Las variables de los estudios estadísticos reciben el nombre de *variables estadísticas.*

Ejercicios:

4. ¿Cuáles son las posibles modalidades de las variables recogidas en la clase, cuyos datos se incluyen en la tabla 1?
5. Sugiere otras variables que podrías recoger en este proyecto y analiza sus modalidades.

2.2. Tipos de estudios estadísticos. Censos y muestras extraídas de una población

El principal objetivo del análisis estadístico es conocer algunas de la propiedades de la población que interesa. Si la población es finita, el mejor procedimiento será la inspección de cada individuo (siempre que esto sea posible). Un estudio estadístico realizado sobre la totalidad de una población se denomina *censo*. Como todos recordais el último censo se ha llevado a cabo el año 2001.

Sin embargo, la mayoría de los problemas de interés, implican, bien poblaciones infinitas, o poblaciones finitas que son difíciles, costosas o imposibles de inspeccionar. Esto obliga a tener que seleccionar, por procedimientos adecuados, un subconjunto de *n* elementos de la población, que constituyen una *muestra de tamaño n*, examinar la característica que interesa y después generalizar estos resultados a la población. Esta generalización a la población se realiza por medio de la parte de la Estadística que se conoce con el nombre de *Inferencia Estadística*. Por ejemplo, el día que se hizo la recogida de datos de la clase, se obtuvieron datos de 60 alumnos, aunque había en total 94 alumnos matriculados. El análisis de los datos de esta muestra puede servir, sin embargo, para sacar conclusiones de toda la clase.

Para que estas conclusiones ofrezcan las debidas garantías es preciso comprobar que se cumple el requisito básico de que la muestra sea representativa. Los distintos métodos de selección de muestras representativas de una población se conocen con el nombre de *métodos de muestreo*.

La infomación estadística se puede usar también para estimar probabilidades de sucesos relativos a la población de interés.

Tabla 1: Datos sobre los alumnos

n.	sexo	deporte	peso	altura	longitud	calzado	ptas	n.	sexo	deporte	peso	altura	longitud	calzado	ptas
1	2	2	59	161	160	37	770	31	2	2	58	164	166	38	125
2	1	1	62	178	181	41	385	32	1	3	86	191	180	46	60
3	2	2	50	159	153	36	500	33	1	1	70	161	185	44	625
4	1	2	69	176	179	42	325	34	1	1	64	166	171	40	310
5	1	2	74	175	179	43	740	35	2	3	64	166	155	38	0

6	2	3	62	169	165	37	2600	36	2	1	70	156	152	35	175
7	2	2	56	162	158	36	250	37	2	2	51	165	160	37	100
8	2	2	58	162	163	37	225	38	2	2	62	167	159	38	1200
9	2	1	52	170	171	38	501	39	2	2	58	160	160	37	215
10	1	1	68	170	172	42	5450	40	1	3	71	185	187	43	700
11	1	3	72	184	185	43	7500	41	1	3	68	175	172	42	475
12	1	2	74	180	182	42	1785	42	1	3	74	183	178	45	1600
13	1	2	66	175	177	41	0	43	2	3	55	160	154	37	400
14	2	2	60	170	168	38	200	44	1	3	68	185	185	42	125
15	2	1	60	165	161	38	4400	45	2	1	57	161	155	37	450
16	2	3	55	163	160	36	700	46	2	3	57	169	164	38	1115
17	2	2	60	167	165	37	120	47	2	1	68	158	150	36	400
18	2	2	50	167	165	37	700	48	1	2	69	172	172	41	0
19	2	2	52	160	157	35	2016	49	2	3	50	155	155	37	500
20	2	1	53	164	160	37	875	50	2	1	58	163	162	38	1290
21	2	2	58	163	166	38	285	51	2	1	66	168	168	39	125
22	2	2	74	175	178	40	560	52	2	2	50	163	161	36	480
23	2	2	63	173	180	39	3010	53	1	2	81	184	188	43	5120
24	2	2	60	161	164	38	500	54	2	1	60	165	160	36	255
25	2	2	53	162	162	37	1000	55	2	2	50	155	155	35	500
26	1	3	82	174	180	41	275	56	1	2	65	179	171	35	90
27	1	2	68	178	180	42	175	57	1	2	65	164	158	36	700
28	2	1	64	172	175	37	690	58	2	2	62	174	179	40	0
29	2	2	65	165	165	40	605	59	2	2	58	162	160	36	200
30	2	1	46	160	158	37	5135	60	2	2	63	172	171	41	2000

Sexo: 1= hombre; 2= mujer;

Deporte: 1=nada, 2=poco; 3= mucho

Ejercicios:

6. A partir de los datos de toda la clase, haz un recuento de las frecuencias en las diferentes modalidades para las variables sexo y hacer deporte. Si tomo una ficha al azar, ¿cuál sería la probabilidad de que corresponda a una chica? ¿y la de que el alumno en cuestión haga mucho deporte?

2.3. Variables estadísticas

Para representar los distintos tipos de datos empleamos variables. Una variable es un símbolo que puede tomar valores diferentes. Cuando estos valores son los resultados de un recuento estadístico, la llamamos *variable estadística*, y representa generalmente un cierto carácter de los individuos de una población.

Usualmente, las variables estadísticas se clasifican en *cualitativas* y *cuantitativas*, según que las modalidades del carácter que representan sean o no numéricas (Algunos autores no consideran las variables cualitativas, al considerar que también se puede asignar un número diferente a cada una de las modalidades de las variables cualitativas, con lo que quedarían asimiladas a las cuantitativas). Ejemplos de variables cualitativas son el grupo sanguíneo o la religión de una persona.

Dentro de las variables cuantitativas se distingue entre variables *discretas* y *continuas*, siendo discretas aquellas que por su naturaleza sólo pueden tomar valores aislados -generalmente números enteros- y continuas las que pueden tomar todos los valores de un cierto intervalo.

Así, los experimentos que consisten en el recuento de objetos, como pueden ser: número de miembros de una familia, número de nidos de aves en una parcela, etc. dan lugar a variables discretas, mientras que al medir magnitudes tales como el peso, el tiempo, capacidad, longitud, etc. se obtienen variables continuas.

Ejercicios:
7. Clasificar las variables del estudio realizado en la clase, según su tipo.
8. Pon otros ejemplos de variables estadísticas cualitativas, cuantitativas discretas y cuantitativas continuas.

2.4. Tablas de frecuencias

El listado de los distintos valores o modalidades de una variable estadística, junto con las frecuencias (absolutas o relativas) de aparición de cada valor es el resumen más primario de una colección de datos y recibe el nombre de *distribución de frecuencias*. Las distribuciones de frecuencias de datos cualitativos pueden representarse mediante una tabla de frecuencias, como se muestra en la Tabla 2. La *frecuencia absoluta* es el número de veces que aparece cada modalidad. La *frecuencia relativa* se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el total de casos en la muestra. El *porcentaje* es igual a la frecuencia relativa multiplicada por 100.

Tabla 2 : Distribución del 'color de los ojos' de los alumnos de una clase

Modalidad	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje
Negro	15	0.50	50.0
marrón	7	0.233	23.3
azul	3	0.100	10.0
otros	5	0.166	16.6
Total	30	1.00	100

Cuando la variable es numérica interesa también calcular las frecuencias acumuladas. Para cada valor de la variable, la *frecuencia acumulada* es el número de elementos con un valor de la variable menor o igual que el dado. Se obtienen sumando a la frecuencia de un valor todas las anteriores. Las frecuencias relativas acumuladas se obtienen dividiendo las frecuencias absolutas acumuladas por el número de datos. También pueden obtenerse sumando a la frecuencia relativa ordinaria todas las anteriores, como se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3. Distribución de frecuencias del número de calzado

Número de calzado	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa acumulada
35	4	0.0667	4	0.0667
36	8	0.1333	12	0.2000
37	14	0.2333	26	0.4333
38	10	0.1667	36	0.6000
39	2	0.0333	38	0.6333
40	4	0.0667	42	0.7000
41	5	0.0833	47	0.7833
42	6	0.1000	53	0.8833
43	4	0.0667	57	0.9500
44	1	0.0167	58	0.9667
45	1	0.0167	59	0.9833
46	1	0.0167	60	1.0000

Ejercicios:

9. ¿Cuál es el valor o valores más frecuentes del número de calzado? ¿Qué tanto por ciento de alumnos calzan el 40 o un número mayor de calzado?
10. ¿Cuáles son las principales diferencias en la distribución de frecuencias del número de calzado de chicos y chicas? (Usa la información dada en la tabla 1)

2.5. Gráficos estadísticos

Las distribuciones de frecuencias de las variables estadísticas pueden representarse mediante tablas y gráficos. A menudo es preferible un gráfico, porque permite resaltar las principales características de la distribución. El denominado *gráfico de barras* permite ilustrar visualmente ciertas comparaciones de tamaño, especialmente cuando se precisa comparar dos muestras. En el diagrama de barras, cada uno de los valores de la variable correspondiente se representa en el eje de abscisas de un gráfico cartesiano, a intervalos igualmente espaciados. Para cada valor se dibuja una barra (o rectángulo) cuya altura ha de ser proporcional a la frecuencia absoluta o relativa de dicho valor.

Otro tipo de representación es el gráfico de *línea poligonal*, usado con ventaja para mostrar cambios de una variable a lo largo del tiempo. El gráfico de barras se puede usar para variables cualitativas pero el gráfico de líneas no.

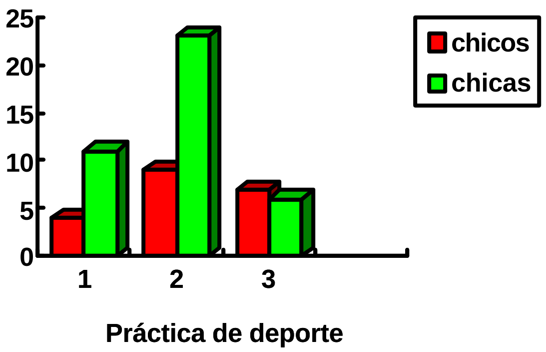


Figura 1: Diagrama de barras ('práctica de deporte' según sexo)

El *gráfico de sectores* (que informalmente se denomina a veces gráfico de la 'tarta' o 'pastel') muestra claramente cómo una cantidad total se reparte, así como el tamaño relativo de las distintas partes. El área de cada sector es proporcional a la frecuencia de la modalidad que representa. En el gráfico de sectores cada modalidad o valor de la variable se representa por un sector circular cuyo ángulo central y, por lo tanto también su área, es proporcional a la frecuencia. Una forma sencilla de construirlo es multiplicando la frecuencia relativa por 360; de este modo se obtiene la amplitud del ángulo central que tendrá cada una de las modalidades observadas.

En la elaboración de gráficos estadísticos es fundamental la precisión, la claridad en los títulos, la elección del tipo de gráfico y el uso de escalas adecuadas. Si uno de estos aspectos no se tiene en cuenta, el gráfico puede dar una idea inadecuada de la información que se trata de comunicar.

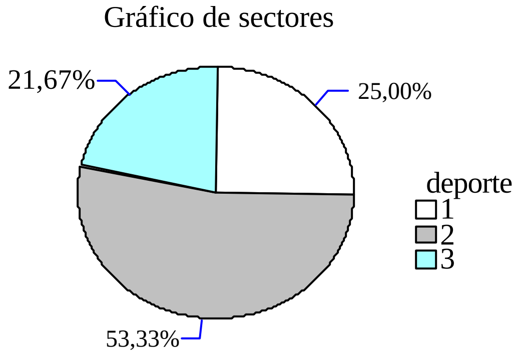


Figura 2: Gráfico se sectores de 'práctica de deporte'

Ejercicios:

11. Representa mediante un diagrama de barras la distribución de la variable "práctica de deporte" y analiza las ventajas de cada una de las dos representaciones.
12. Busca en la prensa ejemplos de gráficos estadísticos realizados inadecuadamente, razonando dónde se hallan los errores en su elaboración.
13. Completa los datos de la Tabla 4 y represéntalos gráficamente.

Tabla 4: Frecuencia de la variable 'número de hermanos'

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa acumulada
1	1	0.033		
2	10	0.333		
3	5	0.166		
4	7	0.233		
5	3	0.100		
6	1	0.033		
7	3	0.100		
Total	30	1.00		

2.6. Agrupación de variables en intervalos

Cuando la variable estadística que estudiamos es continua, como la altura de los alumnos, los valores observados suelen ser distintos unos de otros, o las frecuencias pequeñas, con lo cual una tabla de frecuencias y su correspondiente representación gráfica no constituyen buenos resúmenes estadísticos. Por dicho motivo se procede a definir unos intervalos de valores y se recuentan las frecuencias de los valores en cada *intervalo de clase* (Tabla 5). Los extremos de este intervalo se denominan *extremos de clase* y el punto medio *marca de clase*.

El histograma de frecuencias es la gráfica apropiada para representar estas tablas de frecuencias de datos agrupados en intervalos. En el histograma la frecuencia de cada intervalo se representa por medio de un rectángulo cuya área es proporcional a la frecuencia en dicho intervalo. Los histogramas pueden representar frecuencias absolutas o relativas. También podemos comparar una misma variable en dos muestras, utilizando histogramas con la misma amplitud de intervalos, como se muestra en la figura 4.

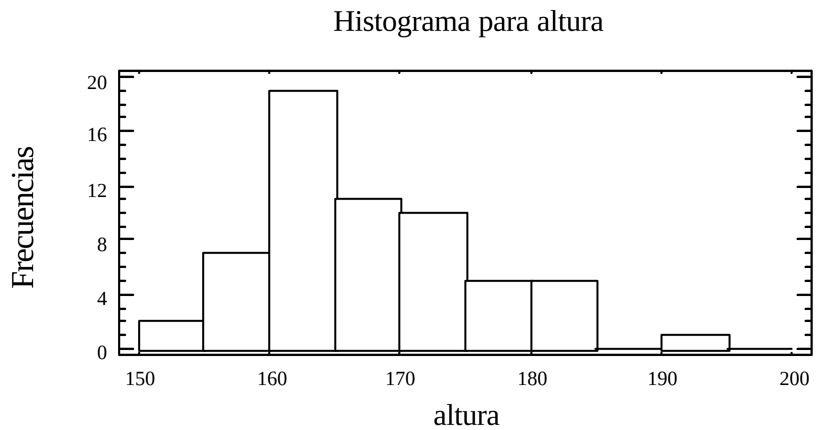


Figura 3: Histograma de frecuencias absoluta de la altura de los alumnos

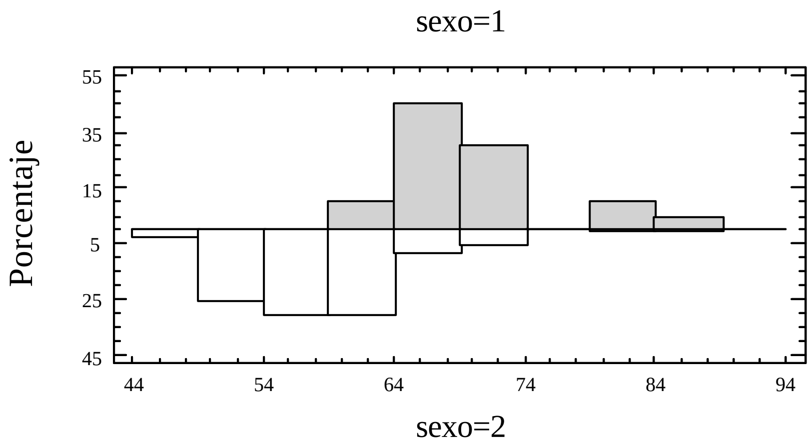


Figura 4: Histograma de frecuencias relativas de peso de alumnos según sexo

Tabla 5: Distribución de frecuencias de "pesetas en el bolsillo"

Nº de clase	Límite inferior	Límite superior	Marca de clase	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frec. abs. acumulada	Frec. rel. acumulada
1	0	500	250	33	0.5500	33	0.5500
2	500	1000	750	13	0.2167	46	0.7667
3	1000	1500	1250	3	0.0500	49	0.8167
4	1500	2000	1750	3	0.0500	52	0.8667
5	2000	2500	2250	1	0.0167	53	0.8833
6	2500	3000	2750	1	0.0167	54	0.9000
7	3000	3500	3250	1	0.0167	55	0.9167
8	3500	4000	3750	0	0.0000	55	0.9167
9	4000	4500	4250	1	0.0167	56	0.9333
10	4500	5000	4750	0	0.0000	56	0.9333
11	5000	5500	5250	3	0.0500	59	0.9833
12	5500	6000	5750	0	0.0000	59	0.9833
13	6000	6500	6250	0	0.0000	59	0.9833
14	6500	7000	6750	0	0.0000	59	0.9833
15	7000	7500	7250	1	0.0167	60	1.0000

Ejercicio:

14. Con los datos de la tabla de frecuencias 5, representa gráficamente el histograma de frecuencias absolutas de las "pesetas en bolsillo" con intervalos de amplitud 500.

2. 7. Representación gráfica de frecuencias acumuladas

En las figuras 5 y 6 representamos gráficamente las frecuencias acumuladas de las variables “número de calzado” y “pesetas en bolsillo”. En los dos casos obtenemos una gráfica creciente, pues las frecuencias acumuladas son mayores a medida que aumentamos el valor de la variable. Sin embargo, las gráficas son ligeramente diferentes. En la variable sin agrupar “número de calzado” tiene forma de escalera, correspondiendo a cada valor de la variable una altura igual a su frecuencia acumulada.

En la variable agrupada marcamos en el extremo superior de cada intervalo de clase una altura igual a su frecuencia acumulada, uniendo a continuación los puntos obtenidos mediante una línea poligonal que se llama *polígono acumulativo de frecuencias.*

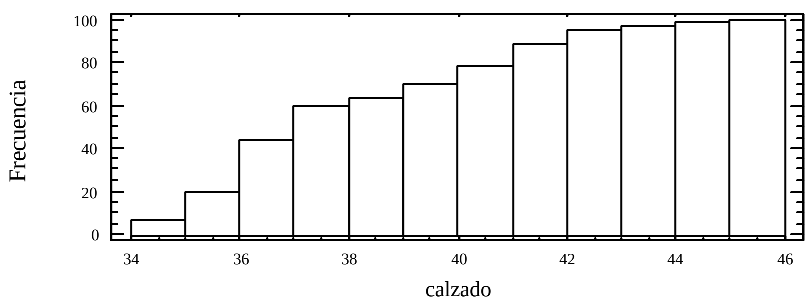


Figura 5: Diagrama de frecuencias acumuladas del “número de calzado”

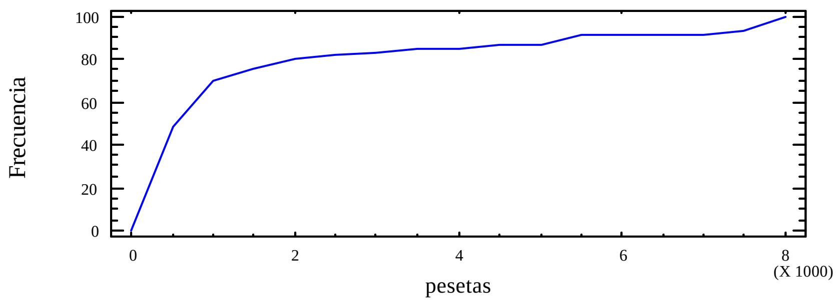


Figura 6: Polígono acumulativo de frecuencias de las “pesetas en bolsillo”

2. 8. Gráfico del tronco

El gráfico del tronco (en inglés -stem and leaf-) es utilizado para la representación de distribuciones de variables cuantitativas, consiguiendo con él, además de una gráfica de la distribución, la visualización de los valores de los datos que estamos estudiando. Para ejemplificarlo trabajaremos con el conjunto de datos que se muestra en la Figura 7, y que supondremos ha sido recogido en clase por los propios alumnos.

Peso en Kg.

Varones	Hembras
55 64 70 74 75 70	60 45 46 50 47 55
64 93 60 62 70 80	49 52 50 46 50 52
61 60 62 68 65 65	52 48 52 63 53 54
66 68 70 72 72 71	54 54 53 55 57 44
56 56 56 53 60 65	67 61 68 55 64 60

Figura 7

Para realizar este gráfico procederemos de la siguiente forma:

- Se redondean los datos a dos o tres cifras, expresando los valores con números enteros. En nuestro ejemplo, puesto que los datos disponibles constan sólo de dos cifras, este paso no es necesario.
- Se ordenan de menor a mayor, como se muestra en la Figura 8

44 45 46 46 47 48 49 50 50 50 52 52 52 52 53
53 53 54 54 54 55 55 55 55 56 56 56 57 60 60
60 60 60 61 61 62 62 63 64 64 64 65 65 65 66
67 68 68 68 70 70 70 70 71 72 72 74 75 80 93

Figura 8

- Se separan por la izquierda uno o más dígitos de cada dato, según el número de filas que se quiera obtener, en general no más de 12 ó 15. Cada uno de estos valores se escriben uno debajo del otro, trazando una línea a la derecha de los números escritos. Estas cifras constituyen el "tronco".En nuestro caso tomaremos la primera cifra para formar con ella el "tronco".
- Para cada dato original se buscan los dígitos escritos de su tronco y a la derecha de los mismos se escriben las cifras que nos habían quedado. Estas cifras forman las "hojas".

De este modo obtenemos el gráfico del tronco para nuestros datos (Figura 9).

4	4 5 6 6 7 8 9
5	0 0 0 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 7
6	0 0 0 0 0 1 1 2 2 3 4 4 4 5 5 5 6 7 8 8 8
7	0 0 0 0 1 2 2 4 5
8	0
9	3

Figura 9: Gráfico del trondo del peso de los alumnos

Como se observa, el resultado es, en la práctica, un histograma de amplitud de intervalo 10, que además de mostrarnos la forma de la distribución, presenta todos los datos ordenados. Esta representación puede ser ampliada o condensada para aumentar o disminuir el número de filas, subdividiendo o fundiendo dos o más filas adyacentes. Por ejemplo, para extender el gráfico de la Figura 9, podemos subdividir en dos cada fila de la siguiente forma: marcamos con un asterisco las filas cuyos dígitos de la derecha varian de 0 a 4 y con un punto las filas cuyos dígitos de la derecha varian de 5 a 9. Este nuevo diagrama, que podemos observar en la Figura 10 recibe el nombre de gráfico del "tronco extendido".

```
4* | 4
4. | 5 6 6 7 8 9
5* | 0 0 0 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4
5. | 5 5 5 5 6 6 6 7
6* | 0 0 0 0 0 1 1 2 2 3 4 4 4
6. | 5 5 5 6 7 8 8 8
7* | 0 0 0 0 1 2 2 4
7. | 5
8* | 0
9. | 3
```

Figura 10: Gráfico del tronco extendido del peso de los alumnos

Al comparar el gráfico del tronco con un histograma de frecuencias observamos las siguientes ventajas:

- Su fácil construcción, especialmente con papel cuadriculado.
- Se pueden observar los datos con más precisión que en el histograma, pues los rectángulos pueden ocultar diferencias importantes entre los valores, mientras que en el gráfico del tronco estas lagunas pueden ser fácilmente detectadas y observadas.
- Pueden obtenerse a partir de él rápidamente los estadísticos de orden, como los valores máximo y mínimo, la mediana, cuartiles, percentiles y sus rangos, así como la moda.
- Es fácil comparar dos muestras de datos en el mismo gráfico, como vemos en la figura 11.

Como contrapartida observamos que no podemos elegir la amplitud del intervalo, como en el caso del histograma, sino que viene impuesta por el sistema de numeración. Tampoco podemos escoger la escala de la representación gráfica, que viene impuesta por el espaciado del papel empleado.

```
      CHICOS           CHICAS
                 | 4* | 4
                 | 4. | 5 6 6 7 8 9
                 | 5* | 0 0 0 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4
               5 | 5. | 5 5 5 6 6 6 7
   4 4 2 2 1 0 0 | 6* | 0 0 0 1 3 4
       8 8 6 5 5 | 6. | 5 7 8
   2 2 1 0 0 0 0 | 7* |
               5 | 7. |
               0 | 8* |
               3 | 9. |
```

Figura 11: Gráfico del tronco extendido del peso para chicos y chicas

3. CARACTERÍSTICAS DE POSICIÓN CENTRAL Y DISPERSIÓN DE UNA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

Supongamos que tenemos que elegir en la clase al alumno/a cuyas características representen mejor cada una de las variables recogidas. ¿A quien elegirías? ¿Qué valores elegirías como mejor representante de cada una de las variables analizadas? En lo que sigue estudiaremos la forma de resumir una distribución de datos.

3.1. Medidas de tendencia central

La comparación de dos distribuciones de frecuencias correspondientes, por ejemplo, a muestras distintas de una misma variable (como "número de hermanos", "altura", etc.), puede hacerse de una manera directa por medio de la tabla, o visualmente con ayuda de gráficos estadísticos. Pero también puede hacerse eligiendo un valor representativo de cada muestra. La media, la moda y la mediana son soluciones matemáticas idóneas para este problema según distintas circunstancias. Reciben el nombre de *'estadísticos' o características de posición (o tendencia) central.*

La media aritmética:

Es la principal medida de tendencia central. Es el número que se obtiene sumando todos los valores de la variable estadística (x_i) y dividiendo por el número de valores (N). Si un valor aparece varias veces debe ponderarse por su frecuencia (f_i). Simbólicamente,

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i f_i}{N}$$

La media es *la mejor estimación* de una cantidad desconocida, cuando hemos hecho varias medidas de la misma. Esta es la propiedad de la media que usamos cuando calificamos a un alumno a partir de varias evaluaciones o cuando estimamos el tiempo de espera en la parada de un autobús. Por tanto sirve para resolver problemas como el siguiente:

Un objeto pequeño se pesa con un mismo instrumento por ocho estudiantes de una clase, obteniéndose los siguientes valores en gramos: 6'2, 6'0, 6'0, 6'3, 6'1, 6'23, 6'15, 6'2 ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?

La media es la *cantidad equitativa* a repartir cuando tenemos diferentes cantidades de una cierta magnitud y queremos distribuirla en forma uniforme, como cuando hablamos del número medio de niños por familia o de la renta per cápita, o en el siguiente ejemplo:

Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

Otras propiedades de la media son las siguientes:

1) La media es un valor comprendido entre los extremos de la distribución.
2) El valor medio es influenciado por los valores de cada uno de los datos.
3) La media no tiene por qué ser igual a uno de los valores de los datos. Incluso puede no tener "sentido" para los datos considerados (como decir que el número medio de hijos en las familias españolas es 1.1).
4) Hay que tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media.
5) La media es un "representante" de los datos a partir de los que ha sido calculada.

6) La media se expresa en las mismas unidades de medida que los datos.

Ejercicios:

15. Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 58 kgs y el de los hombres de 72. ¿Cuál es el peso medio de las 10 personas del ascensor?

16. La media en fluidez verbal de una clase de un colegio es de 400. Si extraemos una muestra aleatoria de 5 estudiantes y resulta que la puntuación de los 4 primeros es de 380, 420, 600, 400. ¿Cuál sería aproximadamente la puntuación esperada para el quinto estudiante?

17. Para aprobar cierta asignatura, un estudiante necesita obtener una puntuación media de 6 (o más) entre cuatro exámenes. Las puntuaciones de Pedro en los tres primeros fueron de 3'5, 6'6 y 6'2. ¿Qué puntuación mínima necesita obtener en el cuarto examen para aprobar la asignatura?

18. La edad media de los 175 alumnos de una escuela es de 8 años, y la de los 12 adultos (profesores y personal) es de 40 años. ¿Cuál es la edad media de todas las personas de esa escuela?

La moda

Es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia. Por ejemplo, en la Tabla 3 la moda del número de calzado es el 37.

En una distribución puede haber más de una moda. Si existe una sola moda se llama *unimodal*, si existen dos *bimoda*l, si hay más de dos se llama *multimodal*. En general es una medida de tendencia central poco eficaz ya que si las frecuencias se concentran fuertemente en algunos valores al tomar uno de ellos como representante los restantes pueden no quedar bien representados, pues no se tienen en cuenta todos los datos en el cálculo de la moda. Sin embargo, es la única característica de valor central que podemos tomar para las variables cualitativas. Además su cálculo es sencillo.

La mediana

Si suponemos ordenados de menor a mayor todos los valores de una variable estadística, se llama mediana al número tal que existen tantos valores de la variable superiores o iguales como inferiores o iguales a él.

- Por ejemplo si en una familia los niños tienen 3, 5 y 8 años, la edad del niño mediano es 5 años. La mediana es igual a 5.
- Si nace un nuevo bebé (0 años) ahora tenemos dos niños medianos, uno de 3 y otro de 5 años. En este caso hay una indeterminación y para resolverla tomamos como mediana el valor 4 (media entre 3 y 5).

Para calcular la mediana a partir de una tabla de frecuencias o de un polígono de frecuencias acumuladas, observamos que la frecuencia relativa acumulada que corresponde a la mediana es exactamente igual a 1/2. Por tanto, en la Tabla 3 (número de calzado) y ya que al número de calzado 37 corresponde una frecuencia acumulada 0'43 y al número 38 una frecuencia acumulada 0'60 la mediana es igual a 38. Esto lo podemos ver mejor en el diagrama de frecuencias acumuladas (figura 5).

La mediana presenta ciertas ventajas como medida de tendencia central frente a la media en algunas distribuciones, ya que no se ve afectada por los valores extremos de las observaciones; por ello su uso es particularmente indicado en las distribuciones asimétricas. También se puede aplicar con variables estadísticas ordinales, mientras que la media no se puede aplicar en estos casos.

3.2. Características de dispersión

Las características de dispersión son estadísticos que nos proporcionan una medida del mayor o menor agrupamiento de los datos respecto a los valores de tendencia central. Todas ellas son valores mayores o iguales a cero, indicando un valor cero la ausencia de dispersión.

Una de tales medidas puede ser la diferencia entre el valor mayor y el menor de la distribución de frecuencias, que recibe el nombre de *recorrido (o rango)*. En su cálculo sólo intervienen dos valores (el máximo y el mínimo) por lo que es escasamente representativa de la dispersión del conjunto de datos.

- El rango para la distribución del "número de calzado" es igual a 11 (46 – 35).

La medida de dispersión más utilizada es la *desviación típica* (s), que es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la diferencia entre cada valor y la media dividida dicha suma por el número de valores; su cuadrado recibe el nombre de *varianza* y viene dada, por tanto, por la siguiente expresión:

$$s^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$$

Ejercicios:

19. ¿Qué se puede decir sobre el resultado de un examen, si la distribución de las puntuaciones de los alumnos verifican lo siguiente?:
a) La desviación típica es cero.
b) El rango es grande, pero la desviación típica es pequeña
c) El rango es pequeño, pero la desviación típica es grande.

20. Inventa un problema referido a calificaciones de matemáticas de un curso cuya media sea aproximadamente 5 y cuya desviación típica sea aproximadamente 2.

21. En los exámenes realizados por Lucía, la mediana fue de 8'8, su puntuación media fue de 9'0 y el rango fue 0'8. ¿Cuáles fueron las puntuaciones de los tres exámenes?

4. TALLER DE MATEMÁTICAS

1. En la tabla adjunta presentamos los resúmenes estadísticos de las variables consideradas en la encuesta realizada en clase.

   a) Razona qué promedio es más adecuado para cada variable.
   b) ¿Cuál de las variables tiene mayor /menor dispersión?
   c) ¿Qué alumno (ver Tabla 1 de datos) sería más representativo en cada una de las variables?
   d) ¿Hay algún alumno que sea representativo en todas las variables?

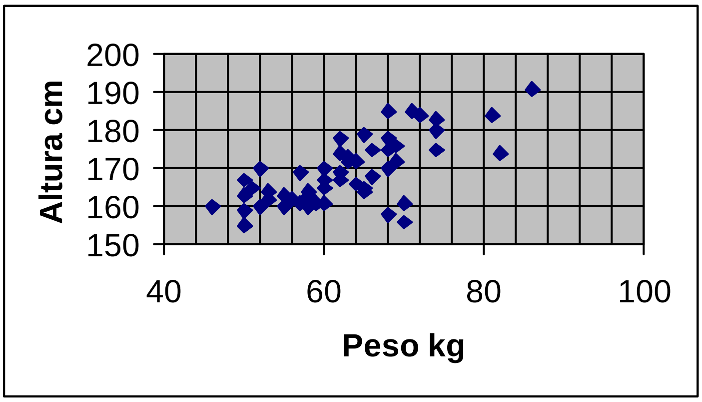
Estadísticos de las variables del muestreo realizado en clase

Variable	Peso	Altura	Longitud	Calzado	Pesetas
Media	62.38	168.46	167.7	38.8	1026.87
Mediana	62	166.5	165	38	500
Moda	58	161	160	37	0
Desviación típica	8.57	8.41	10.29	2.77	1530.50
Mínimo	46	155	150	35	0
Máximo	86	191	188	46	7500
Rango	40	36	38	11	7500
Tamaño de muestra	60	60	60	60	60

2. En relación a los datos recogidos en clase (Tabla 1),
a) ¿Son más altos los alumnos que practican mucho deporte?
b) ¿Reciben las chicas más dinero que sus compañeros?

Razona las respuestas basándote en lo que has aprendido sobre la estadística.

3. En este diagrama de dispersión, indica si existe relación entre la altura y el peso. Estima la altura de una persona que pesa 60 kg.
¿Podrías dibujar una recta que sirva para calcular aproximadamente la altura en función del peso?



4. A partir del gráfico del tronco de la variable "Longitud de brazos extendidos", que se muestra a continuación, calcula
a) el máximo, mínimo, mediana y cuartiles.
b) Calcula el tanto por ciento de alumnos con brazos más largos y más cortos que los tuyos.

15*	0234
15.	555578889
16*	00000001122344
16.	55556688
17*	1111222
17.	5788999
18*	000012
18.	55578

5. Al medir la altura en cm. que pueden saltar un grupo de escolares, antes y después de haber efectuado un cierto entrenamiento deportivo, se obtuvieron los valores siguientes. ¿Piensas que el entrenamiento es efectivo?

	Altura saltada en cm.									
Alumno	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Gia	Hilda	Ines	Juana
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

6. A continuación reproducimos datos sobre número de pulsaciones por minuto en diversas especies animales[3]

[3] Ejemplo tomado de Friel, Mokros y Russell (1992). Statistics: Middles, means and in-between*s*. Palo Alto, CA: Dayle Seymour.

1	6	Ballena
2	5 9	Camello, Tiburón
3	0 5 5 7 8 8	Elefante, Caballo, Trucha, Merluza, Salmón, Dorada
4	0 0 2 4 7 8 8 8	Mula, Burro, León, Foca, Caimán, Cocodrilo, Bacalao, Rana
5	5 5 9 9	Vaca, Oso, Carpa, Perca
6	6	Jirafa
7	0 0 0 0 5	Hombre, Ciervo, Avestruz, Cerdo, Oveja
8	0	Ganso
9	0 2 5	Perdiguero, Mastín. Fox Terrier
10	0	Collie
11	0	Delfín
12	0 5	Canguro, Pekinés
13	0	Gato
14		
15	0	Conejo
16		
17	0	Paloma
18		
19		
20		
21	1	Pavo
22		
23		
24	0	Zorro
25		
26	8	Pavo
27		
28		
29		
30	0 1	Puercoespín, Aguila
31	2	Codorniz
32	0	Pollo
33		
34	2 7	Halcón, Buitre
35		
36		
37	8	Cuervo
38	0 8	Grajo Comadreja
39	0	Ardilla
40	1	Gaviota
.		
.		
58	8	Murciélago
59		
60	0	Ratón

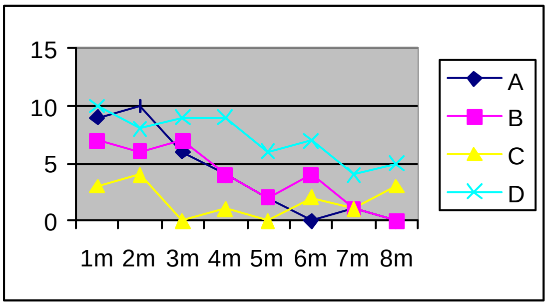
a) ¿Te parece que la media sería un estadístico que representaría bien este conjunto de datos? ¿Y la moda?

b) ¿Encuentras que alguna de las especies es atípica, debido a que su número de pulsaciones está claramente alejada de la mayoría?

7. Cuatro jugadoras de baloncesto se han sometido a la siguiente prueba: Cada una de ellas ha hecho 10 lanzamientos a canasta a una distancia de 1m, otros 10 lanzamientos desde 2m, y así sucesivamente hasta 8m. En cada caso se han anotado los siguientes encestes:

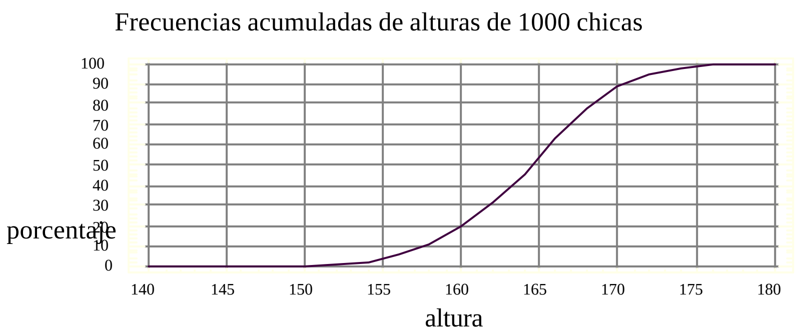
Jugadora	1m	2m	3m	4m	5m	6m	7m	8m
A	9	10	6	4	2	0	1	0
B	7	6	7	4	2	4	1	0
C	3	4	0	1	0	2	1	3
D	10	8	9	9	6	7	4	5

¿Qué jugadora es más eficaz en el enceste?



Razona la respuesta usando resúmenes numéricos de los datos y la gráfica que se adjunta.

8. En la figura presentamos las frecuencias acumuladas de la altura de 1000 chicas.
   a) Calcula aproximadamente la mediana, máximo y mínimo.
   b) ¿Entre qué límites varía el 50 por ciento de los valores centrales?
   c) ¿Cuál es el valor de la altura tal que el 70 % de las chicas tiene una altura igual o inferior (percentil del 70%)?
   d) Si una chica mide 1.65, ¿En qué percentil está?
   e) Compara tu altura con la de estas chicas. ¿Qué porcentaje de chicas son más altas/ bajas que tú?
   f) ¿Qué valores de la estatura considerarías atípicos en esta distribución?



C: Conocimientos Didácticos

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

1.1. La estadística en la sociedad y en la enseñanza obligatoria

La Estadística ha cobrado gran desarrollo en los últimos años, contribuyendo al avance de la ciencia y la técnica y al crecimiento de la economía, por lo que la mayor parte de los países han introducido su enseñanza desde la educación primaria. La estadística es hoy una parte de la educación general deseable para los ciudadanos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios de comunicación. Las principales razones que fundamentan la enseñanza de la estadística son las siguientes:

- Es útil para la vida posterior a la escuela, ya que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos del tema.
- Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva, apoyada en los datos, frente a criterios subjetivos.
- Ayuda a comprender los restantes temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos.

Otro aspecto es el carácter exclusivamente determinista del currículo de matemáticas, y la necesidad de mostrar al alumno una imagen más equilibrada de la realidad, en la que hay una fuerte presencia de fenómenos aleatorios.

Además, puesto que la estadística elemental no requiere técnicas matemáticas complicadas y por sus muchas aplicaciones, proporciona una buena oportunidad para mostrar a los estudiantes las aplicaciones de la matemática para resolver problemas reales. La estadística es también un buen vehículo para alcanzar las capacidades de comunicación, resolución de problemas, uso de ordenadores, trabajo cooperativo y en grupo, a las que se da gran importancia en los nuevos currículos.

Cuando tenemos en cuenta el tipo de estadística que queremos enseñar y la forma de llevar a cabo esta enseñanza debemos reflexionar sobre los fines principales de esta enseñanza que son los siguientes:

- Que los alumnos lleguen a comprender y a apreciar el papel de la estadística en la sociedad, incluyendo sus diferentes campos de aplicación y el modo en que la estadística ha contribuido a su desarrollo.
- Que los alumnos lleguen a comprender y a valorar el método estadístico, esto es, la clase de preguntas que un uso inteligente de la estadística puede responder, las formas básicas de razonamiento estadístico, su potencia y limitaciones.

1.2. Diseño Curricular Base del MEC

La recogida, organización y presentación de datos, así como la interpretación y las posibles predicciones basadas en los mismos, son conocimientos que tienen cada vez más importancia en nuestro medio social lo que hace deseable su aprendizaje y utilización. Las sencillas actividades estadísticas pueden representar para los alumnos de estas edades aplicaciones de las matemáticas al medio real, prestando significado al mismo, haciéndolo más inteligible.

El objetivo general 6 para el área de Matemáticas de secundaria obligatoria formulado por el M.E.C. recoge el siguiente objetivo, relacionado con la estadística: "*Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma*". Este objetivo es desarrollado en el bloque de contenidos referido a organización de la información en los siguientes términos:

Conceptos:

1. La representación gráfica
2. Las tablas de datos.
3. Tipos de gráficos estadísticos: diagramas de barras, diagramas lineales, etc.
4. Carácter aleatorio de algunas experiencias.

Procedimientos:

1) Exploración sistemática, descripción verbal e interpretación de los elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares.
2) Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición.
3) Elaboración de gráficos estadísticos con datos poco numerosos relativos a situaciones familiares.
4) Expresión sencilla del grado de probabilidad de un suceso experimentado por el alumno.

Actitudes:

1) Actitud crítica ante las informaciones y mensajes transmitidos de forma gráfica y tendencia a explorar todos los elementos significativos.
2) Valoración de la expresividad del lenguaje gráfico como forma de representar muchos datos.
3) Sensibilidad y gusto por las cualidades estéticas de los gráficos observados o elaborados.

Respecto a criterios de evaluación sobre los contenidos estocásticos el M.E.C. especifica:

1) Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato.
2) Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado de juegos de azar sencillos, y comprobar dicho resultado.

1.3. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)[4]

Estas orientaciones curriculares proponen, para los niveles K-2 (infantil y primer ciclo de primaria) que el currículo incluya experiencias con análisis de datos para que los alumnos sean capaces de:

- Clasificar objetos de acuerdo a sus atributos y organizar datos sobre los objetos.
- Representar datos usando objetos concretos, dibujos y gráficos.

Se indica que las actividades informales de clasificación y recuento pueden proporcionar un inicio de la comprensión y análisis de los datos por parte de los niños.

[4]National Council of Teachers of Mathematicas (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: Va, NCTM.

Se animara a los niños a plantearse preguntas, organizar las respuestas y crear representaciones para sus datos, así como a razonar y comprobar sus ideas comparándolas con los datos.

En los niveles de 3º a 5º los niños deben ser capaces de:

- Diseñar investigaciones para contestar una pregunta y considerar cómo los métodos de recogida de datos afectan al conjunto de datos.
- Recoger datos de observación, encuestas y experimentos.
- Representar datos en tablas, gráficos de línea, puntos y barras.
- Reconocer las diferencias al representar datos numéricos y categóricos.
- Usar las medidas de posición central, particularmente la mediana y comprender qué es lo que cada una indica sobre el conjunto de datos.
- Comparar distintas representaciones de los mismos datos y evaluar qué aspectos importantes del conjunto de dato se muestra mejor con cada una de ellas.
- Proporcionar y justificar conclusiones y predicciones basadas en los datos y diseñar estudios para estudiar mejor las conclusiones y predicciones.

En estos niveles se pretende que progresivamente los niños sean capaces de ver el conjunto de datos como un todo, describir su forma y usar las características estadísticas, como el rango y las medidas de tendencia central para comparar conjuntos de datos. Deben considerar que los datos son muestras recogidas de poblaciones mayores y llevar a cabo investigaciones y proyectos, considerando el ciclo: formular preguntas, recoger datos y representarlos.

Analizarán si sus datos proporcionan la información necesaria para responder sus preguntas. Podrían recoger datos o usar otros disponibles en la escuela o en la ciudad, por ejemplo, datos del censo o sobre el tiempo o datos disponibles en Internet. La experiencia con una variedad de gráficos les permitirá comprender los valores en los ejes horizontal y vertical, la utilidad de las escalas y cómo representar el cero en una gráfica. Los niños deberían también usar programas de ordenadores que les ayuden a representar gráficos, por ejemplo, la hoja electrónica.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

Apenas hay estudios evolutivos del desarrollo de los conceptos estadísticos, siendo casi los únicos conceptos que no fueron tratados en los estudios de Piaget con sus colaboradores. Ello se debe a que la estadística sólo muy recientemente es objeto de enseñanza en las escuelas.

El único estudio de este tipo es realizado por Watson en Australia con unos 2200 niños desde el tercer curso de primaria para analizar cómo los niños progresan en la comprensión de las ideas de media, mediana y moda. Diferencia las siguientes etapas:

- Uso coloquial de las palabras media mediana y moda: sin asignarles un significado preciso; por ejemplo la palabra “media” pueden entenderla como “normal”, “frecuente”.
- Estructuras múltiples para los conceptos: son capaces de utilizar ideas como “centro” o “sumar y dividir” para describir la media, pero sólo resuelven problemas muy simples.
- Representación de los conceptos: conocen los algoritmos y los asocian con las ideas de media, mediana y moda. Son capaces de reconocer que la media, mediana y moda representan el conjunto de datos, pero no son capaces de usarlas para comparar dos conjuntos de datos o de estimarlas a partir de una representación

gráfica. En los gráficos, los sujetos se concentran en los datos aislados, pero no en las tendencias.
- Aplicación progresiva de la media, mediana y moda a la resolución de problemas, incluyendo problemas de medias ponderadas o comparación de dos grupos. Identificación progresiva de las medidas de tendencia central a partir de la representación gráfica de un conjunto de datos.

Los niños comienzan por la primera etapa y van progresando con la edad y con la instrucción, pero no hay un desarrollo completo si no va acompañado de una enseñanza.

3. SITUACIONES Y RECURSOS

Los resultados de diversas investigaciones proporcionan orientaciones sobre cómo ayudar a los niños en el desarrollo del razonamiento estadístico. Algunas de estas orientaciones son las siguientes:
1. Involucrar a los niños en el desarrollo de proyectos sencillos en los que deban recoger sus propios datos a partir de la observación (¿de qué color son los ojos de los niños de la clase?), encuesta (¿qué tipos de trabajo hacen las madres y los padres de los niños?) y medida (¿tienen los pies, manos, hombros más grandes los niños que las niñas?).
2. Concienciar a los niños de que cada dato aislado forma parte de un todo (distribución de los datos) y que hay preguntas que no pueden contestarse con un sólo dato, sino con una distribución de datos.
3. Concienciar a los niños de las tendencias y variabilidad en los datos y cómo estas pueden usarse para responder preguntas sobre los datos o comparar varios conjuntos de datos.
4. Visualizar progresivamente que los datos recogidos son una muestra de una población más amplia y sobre cuáles son las condiciones para que los datos de la muestra puedan representar los datos de toda la población.
5. Animar a los niños a representar sus datos en tablas y gráficos, cuidando las cualidades estéticas y matemáticas de los gráficos de modo que los datos queden correctamente representados en ellos. Advertirles de la facilidad con que un gráfico puede ser engañoso.

En las siguientes secciones describimos algunos tipos de actividades y recursos para el estudio de la estadística en primaria.

3.1. Investigaciones y proyectos

La estadística es hoy día una materia interdisciplinar que se utiliza no sólo en la clase de matemáticas, sino en otras disciplinas donde se convierte en herramienta de resolución de problemas. Los proyectos están concebidos para introducir en la clase una filosofía exploratoria y participativa, en tendencias con las recomendaciones recientes sobre metodología de enseñanza de la estadística.

Lo deseable sería que los propios alumnos eligieran el tema en el que quieren trabajar y elaborasen sus propios proyectos en grupos de dos o tres alumnos. Para ser realistas, hemos de reconocer que son pocos los alumnos que se interesan por la estadística y que ésta es una materia aburrida para ellos. Por el contrario, los alumnos pueden interesarse en muchos temas diferentes y llegar a valorar la estadística como instrumento de investigación de los problemas que les gustaría resolver. En algunos países como Estados Unidos o Inglaterra es ya tradicional el celebrar en las escuelas competiciones de proyectos estadísticos y es posible que esta tendencia no tarde en llegar a nuestros centros. A continuación sugerimos algunos proyectos que podrían realizarse en los cursos 5º y 6º de educación primaria.

Actividad 1: Intención de voto en las próximas elecciones al consejo escolar

Se propone diseñar, llevar a cabo y analizar los datos de una encuesta en el centro para estudiar la intención de voto en el próximo consejo escolar, una vez que se conocen los candidatos a representantes de los alumnos. Los alumnos deben diseñar el cuestionario, seleccionar una muestra representativa de alumnos del centro, distribuir el cuestionario y analizar los datos. Algunas cuestiones relacionadas son:

- ¿Qué preguntas debemos incluir en el cuestionario? ¿Están claras las preguntas? ¿Qué variables identificativas del alumno podrían influir en su intención de voto?
- ¿Cómo elegimos la muestra de alumnos? ¿Cuál es la población objetivo? ¿Cuál es la población que podemos alcanzar?
- ¿Sería la encuesta fiable si hay un porcentaje alto de no respuesta? ¿Cómo podemos motivar la participación y disminuir la no respuesta? ¿Cómo y cuándo distribuimos el cuestionario y recogemos los datos?
- ¿Qué nos dicen los resultados? ¿Son diferentes en los distintos cursos? ¿En chicos y chicas?

Actividad 2: ¿Se mejora con la práctica?

1. Estimación de tiempos:
Intenta estimar la duración de un minuto. Para ello tu compañero coge un reloj que cuente segundos y te indica cuando debes comenzar a calcular el tiempo. Tú te concentras y cuando creas que ha pasado un minuto dices ¡ya!. Tu compañero mira el reloj y anota los segundos transcurridos. Comprobáis si el tiempo transcurrido es verdaderamente un minuto o en cuántos segundos te has equivocado. ¿Crees que si repites el experimento 10 veces, cada vez estimarás el minuto con más exactitud? ¿Mejoras con la práctica?

2. Estimación de distancias:
Trabaja con un compañero. Uno dibuja un segmento con una regla graduada y mide su longitud;, el otro estima la longitud del segmento. Anotad la diferencia entre el valor estimado y el valor real del segmento. ¿Crees que si repites el experimento varias veces, cada vez estimarás mejor la longitud del segmento? ¿Mejoras con la práctica?

3. Durante la clase de gimnasia se recogen datos de cada alumno el primer día de clase y una vez transcurrido 3 meses. Podrían analizarse, entre otras las siguientes variables, para ver si la práctica ayuda a mejorar, qué alumno mejoró más globalmente y si mejoran más las chicas o los chicos:

- tiempo en segundos para recorrer 50 metros
- pulsaciones por minuto antes y después de correr los 50 metros
- altura máxima que se puede saltar
- longitud máxima que se puede saltar
- Número de abdominales seguidos hasta cansarse
- Número de canastas encestadas en 10 intentos

Actividad 3: ¿Cuántas lentejas tiene un kilo de lentejas?

Se trata de estimar el número aproximado de lentejas en un kilo, sin tener que contarlas todas.

Puesto que el proceso de llenado de un paquete de lentejas tiene un componente aleatorio, este número variará de uno a otro paquete. Se plantea así un problema de estimación que es común a otros muchos contextos, por ejemplo, cuando se estima el número medio de glóbulos rojos en sangre de individuos adultos.

Los alumnos por equipos podrían tratar de estimar el número de lentejas en paquetes seleccionados de varias marcas comerciales. Se presentaría el problema de que hay que especificar con claridad la variedad, pues existen diversos tamaños. Una vez fijada una variedad y comprados paquetes de diversas marcas cada equipo trataría de estimar el número de lentejas de su paquete.

Para ello se pueden tomar datos del número de lentejas en varias muestras de unidades de capacidad pequeñas, como el centímetro cúbico y resolver primero el problema de la estimación del número de lentejas en un cm^3. Los alumnos recogerán datos de las muestras de cm^3 representándolos gráficamente, y estudiando su distribución, media y desviación típica.

Calculado el volumen de los paquetes de kilo de lentejas, para calcular la distribución del número de lentejas en un paquete de kilo, se trata de hacer un cambio de variable en una distribución. Por tanto, la media y desviación típicas quedarán afectadas por el cambio de escala que pasa del cm^3 al volumen del paquete.

3.2. Datos y fuentes de datos

Los proyectos en la clase de estadística se conciben como verdaderas investigaciones asequibles al nivel del alumno, donde tratamos de integrar la estadística dentro del proceso más general de investigación. Es decir, planteamos unos objetivos y preguntas que el alumno debe tratar de contestar. Para ello el alumno necesita recoger datos, que pueden provenir de diversas fuentes, ser obtenidos mediante diferentes técnicas, y corresponder a diversas escalas de medida y tipos de variables estadísticas, como se resume en la tabla siguiente:

Tipos de datos en los proyectos

Procedencia de los datos	**Variables estadísticas incluidas**
Anuarios estadísticos	Cualitativa
Encuestas	Cuantitativa pocos valores
Experimento realizado en la clase	Cuantitativa necesidad de agrupar
Internet	**Técnica de recogida de datos**
Prensa	Observación
Simulación	Encuesta
	Medida

Consideramos importante que el alumno tenga oportunidad de apreciar esta diversidad de datos estadísticos. Algunas veces los datos se encuentran disponibles, pero hay que saber localizarlos de diferentes fuentes, como libros o anuarios

estadísticos. Por ejemplo, el gráfico adjunto, tomado del boletín de Cruz Roja Española, Diciembre, 2001 puede servir para plantear una actividad de comparación de dos conjuntos de datos, que podría apoyarse en otras representaciones gráficas alternativas.

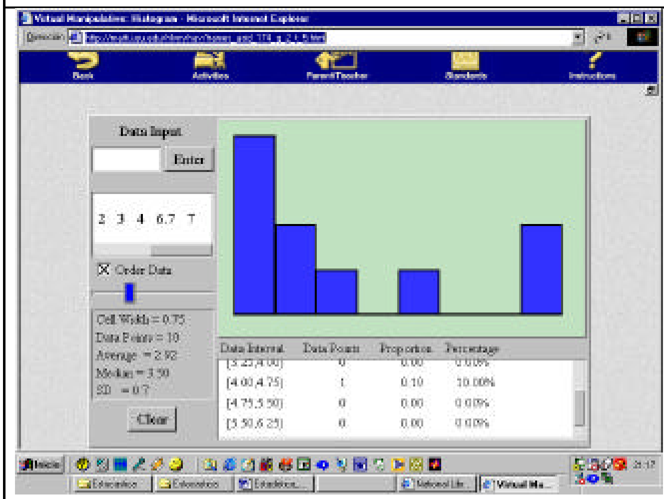
La red Internet proporciona en la actualidad datos para cualquier tema por el que los alumnos estén interesados, bien a partir de servidores estadísticos específicos como Data Sets and Stories Library donde los profesores de estadística han puesto sus datos al servicio de la enseñanza, bien recurriendo a organismos oficiales como el INE, Eurostat, Unesco u otros.

En otras ocasiones los datos son recogidos por los alumnos mediante la realización de una encuesta o a través de un experimento. La encuesta requerirá la elaboración de un cuestionario, fijando los objetivos del mismo, eligiendo las variables explicativas y redactando las preguntas que permitan obtener la información deseada de una forma clara y concisa. La selección de una muestra representativa plantea problemas de tipo teórico y práctico, relacionados con la población objetivo y alcanzada, el marco de muestro, los métodos de selección, la administración del cuestionario y los problemas de no respuesta.

La información que queremos recoger puede corresponder a diversos niveles que se corresponden con diferentes técnicas de obtención de datos: información consciente y conocida (encuesta), información desconocida, pero que puede deducirse de la observación e información no consciente ni observable (medida).

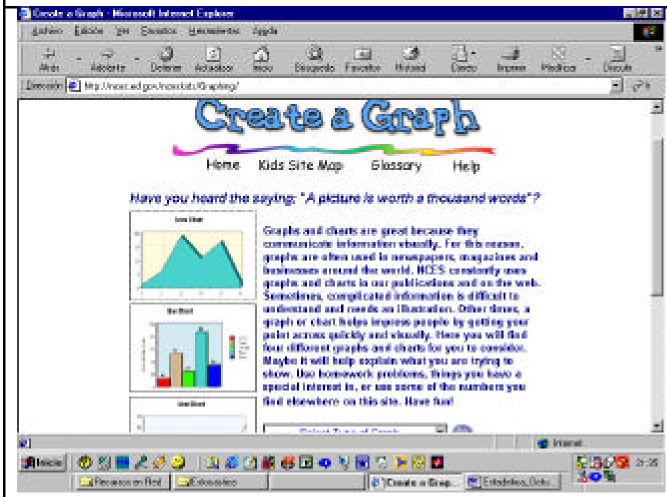
3.3. Recursos en Internet

1. Histogramas:
http://matti.usu.edu/nlvm/nav/frames_asid_174_g_2_t_5.html



Esta página permite explorar el efecto de variar la anchura de los intervalos sobre la forma del histograma, así como de añadir o quitar datos.
Proporciona también tablas de frecuencia para el histograma elegido, así como la media y mediana.
Es posible también visualizar el efecto de los valores atípicos, tanto sobre el histograma como sobre la media y mediana.

Creacion de gráficos interactivamente
http://nces.ed.gov/nceskids/Graphing/



Usando esta página los alumnos pueden crear y modificar a su gusto una variedad de gráficos estadísticos, proporcionando los datos de entrada, que podrían ser datos tomados en clase por los alumnos.
Los gráficos son interactivos y una vez creados es posible cambiar el formato o colores, suprimir o añadir nuevos datos.
Los gráficos pueden ser impresos para ser utilizados en los proyectos por los estudiantes.

4. CONFLICTOS EN EL APRENDIZAJE: INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

4.1. Comprensión de tablas y gráficos estadísticos

Los profesores suponen, a veces, que la elaboración de tablas y gráficos es muy sencilla y dedican poco tiempo a su enseñanza. Sin embargo, elaborar una tabla de frecuencias o un gráfico supone ya una primera reducción estadística, pues se pierden los valores originales de cada uno de los datos individuales pasándose a la distribución de frecuencias. Este concepto es ya complejo, al referirse al conjunto de los datos y no a cada caso particular. Mientras que los niños comprenden bien propiedades que se refieren a individuos, como el color de pelo de una persona o su altura, les resulta más problemático comprender la idea de distribución del color de pelo de un grupo.

La destreza en la lectura crítica de datos es una necesidad en nuestra sociedad tecnológica, ya que encontramos tablas y gráficos en la prensa, comercio, así como en distintas asignaturas del currículo. Podemos distinguir cuatro niveles distintos de comprensión de los gráficos, que pueden aplicarse a las tablas y gráficos estadísticos. El objetivo de la educación estadística sería llevar a cada alumno a adquirir el mayor nivel para el cual esté capacitado:

- *Lectura literal* (leer los datos): este nivel de comprensión requiere una lectura literal del gráfico; no se realiza interpretación de la información contenida en el mismo. Por ejemplo, en la Figura 1, responder a la pregunta, ¿cuántos chicos practican mucho deporte?
- *Interpretar los datos* (Leer dentro de los datos): incluye la interpretación e integración de los datos en el gráfico; requiere la habilidad para comparar cantidades y el uso de otros conceptos y destrezas matemáticas. Por ejemplo, en la Figura 1, responder a la pregunta de si practican más deporte los chicos o las chicas.
- *Hacer una inferencia (*Leer más allá de los datos): requiere que el lector realice

predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico. En la Figura 1, dar un razonamiento sobre si los datos se podrían aplicar a todos los chicos y chicas del colegio.
- *Valorar los datos* (Leer detrás de los datos). Supone valorar la fiabilidad y completitud de los datos, como hacer un juicio sobre si realmente las preguntas de la encuesta miden la práctica de deporte, o cómo podríamos medirlo de una forma más fiable.

Hay varios puntos que afectan a la comprensión de los gráficos y a su dificultad y que deben ser tenidos en cuenta por los profesores:
- conocimiento previo del tema al que se refiere el gráfico; si el alumno está o no familiarizado con el contexto;
- conocimiento previo del contenido matemático del gráfico, esto es, los conceptos numéricos, relaciones y operaciones contenidas en el mismo;
- conocimiento previo del tipo de gráfico empleado (gráfico de barras, pictograma, etc.).

Cuando los alumnos tratan de hacer los gráficos estadísticos cometen errores. Los más habituales son los siguientes:
- elección incorrecta del tipo de gráfico, como usar polígonos de frecuencias con variables cualitativas;
- la elección de las escalas de representación son poco adecuadas, o bien omitir las escalas en alguno de los ejes horizontal o vertical, o en ambos;
- no especificar el origen de coordenadas;
- no proporcionar suficientes divisiones en las escalas de los ejes;
- no respetar los convenios, como al obtener un diagrama de sectores en los que éstos no son proporcionales a las frecuencias de las categorías.
- mezclar datos que no son comparables en un gráfico, como comparar 30 sillas y 50 kg. de carne.

4.2. Medidas de posición central

Además de ser uno de los principales conceptos estadísticos, la media tiene muchas aplicaciones en cuestiones prácticas de la vida diaria. Que este concepto no es tan simple como parece lo puedes comprobar al tratar de resolver el siguiente problema:

> Problema: Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 60 kilos. y el de los hombres de 90. ¿Cuál es el peso medio de las 10 personas del ascensor?

Una reacción frecuente al resolver el problema anterior es decir que la media es 75 kilos. Sin embargo esta solución es errónea porque en el ascensor hay más hombres que mujeres. Las situaciones en las cuales se debe calcular una media ponderada son frecuentes: calcular la puntuación media en un curso, la velocidad media, o el índice de precios. También cuando calculamos la media a partir de una tabla de datos. No se puede olvidar que en este caso cada valor de la variable tiene que ponderarse por su frecuencia.

También se cometen errores al calcular la media, mediana y moda. Algunos de los más frecuentes son:
- Moda: Tomar la mayor frecuencia absoluta, en lugar del valor de la variable.
- Mediana: No ordenar los datos para calcular la mediana; calcular el dato central de las frecuencias absolutas ordenadas de forma creciente; calcular la moda en vez de la mediana; equivocarse al calcular el valor central.

- Media: Hallar la media de los valores de las frecuencias; no tener en cuenta la frecuencia absoluta de cada valor en el cálculo de la media.

En otros casos el cálculo se hace correctamente, pero no se entiende el algoritmo de cálculo. Esto se puede comprobar si le pides a un alumno que te diga 10 números diferentes cuya media sea igual a cuatro o bien que te dé el número que falta entre 5 sabiendo que la suma de los cuatro primeros es 23 y la media es igual a 5. Muchos no sabrán como hacerlo o lo harán con dificultad.

4.3. Características de dispersión

El estudio de una distribución de frecuencias no puede reducirse al de sus promedios, ya que distribuciones con medias o medianas iguales pueden tener distintos grados de variabilidad. Un error frecuente es ignorar la dispersión de los datos cuando se efectúan comparaciones entre dos o más muestras o poblaciones.

> Ejemplo**: ¿**Te parece por ejemplo, que demuestran igual constancia y deberían calificarse igual dos alumnos si en el primero tuvo un 10 en el examen teórico y un 0 en el práctico y otro que tuvo un 6 y un 4?

La desviación típica mide la intensidad con que los datos se desvían respecto de la media, pero muchos libros de texto no resaltan bien esta propiedad y ponen mayor énfasis en la heterogeneidad entre las observaciones que en su desviación respecto de la posición central.

> Ejemplo: ¿Cuál de los dos conjuntos tiene mayor dispersión?
> Conjunto A: 10, 20, 30, 40, 50 y 60 cm.
> Conjunto B :10, 10, 10, 60, 60 y 60 cm.

Otras dificultades se refieren al cálculo, ya que algunos alumnos suponen que no hay que tener en cuenta los ceros para calcular la desviación típica o no ponderan los valores cuando hacen un cálculo a partir de la tabla de frecuencias.

4.4. Itemes de evaluación

A continuación incluimos información sobre algunos ítemes usados en investigaciones sobre la comprensión de la estadística. Indicar cuál es la solución correcta y el tipo de razonamiento que subyace en las respuestas incorrectas.

Item 1. El ayuntamiento de un pueblo quiere estimar el número promedio de niños por familia. Dividen el número total de niños de la ciudad por 50 (que es el número total de familias) y obtienen 2.2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

a) La mitad de las familias de la ciudad tienen más de 2 niños
b) En la ciudad hay más familias con 3 niños que familias con 2 niños
c) Hay un total de 110 niños en la ciudad
d) Hay 2,2 niños por adulto en la ciudad
e) El número más común de niños por familia es 2

Item 2 Supón que quieres comprar un coche nuevo y quieres decidir entre la marca A y B. En una revista de automóviles encuentras un estudio estadístico sobre reparaciones efectuadas el último años que muestra que la marca A tiene menos averías que la B. Sin embargo, te encuentras un amigo que te dice que compró el año pasado un coche B y no ha tenido más que problemas: primero se le estropeó la inyección de gasolina y gastó 25.000 pts, luego tuvo que cambiar el eje trasero y al final, ha vendido el coche porque se le fue la transmisión. ¿Que decisión tomarías, comprar un coche A o B?

Ítem 3. Maria y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada semana una media de 4 horas a hacer deporte.

a. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?.
b. María y Pedro dedican además 1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál es el número medio de horas que escuchan música los 10 estudiantes?
c. ¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican, cada fin de semana, entre las dos actividades: hacer deporte y escuchar música?

5. TALLER DE DIDÁCTICA

5.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 2º y 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizaste personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

1. Busca ejemplos y ejercicios relacionados con las ideas estadísticas.
2. Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
3. Describe los cambios que introducirías en el diseño de las lecciones propuestas para los cursos 5º y 6º de primaria.

5.2. Análisis de respuestas a tareas de evaluación

Un profesor ha pedido a sus alumnos que midan la cantidad de nieve caída cada día de una semana. Han obtenido los datos siguientes: Lunes, 6 cm, Martes, 4 cm, Miércoles, 4 cm, Jueves 1 cm y Viernes 0 cm. El profesor pide calcular la cantidad media de nieve que ha caído al día.
Para cada una de las siguientes situaciones, describe los posibles motivos de las respuestas del alumno y cómo puede ayudarle un profesor a comprender el concepto o el procedimiento implicado:

a) Isabel no entiende por qué la suma de 15 cm se tiene que dividir por 5 en lugar de 4 para saber el promedio de nieve caída.
b) Carlos no comprende por qué la respuesta puede ser 3 en lugar de una de las medidas.
c) Isabel no comprende por qué la suma de las diferencias entre cada puntuación y la media tiene que ser cero.

2. Supón que formas parte de un jurado de un concurso escolar sobre experiencias en la clase de ciencias. Jaime investigó si las plantas de guisantes crecen más bajo la luz solar o con una cantidad igual de luz procedente de una lámpara. La tabla siguiente contiene las mediciones que realizó.

	Altura de las plantas para cada una de las condiciones de iluminación											
Luz solar	0'4	1'3	1'8	1'9	2'2	2'2	2'3	2'5	2'6	2'6	2'8	3
Luz artificial	1'3	1'5	1'8	2	2'	2'2	2'2	2'3	2'4	2'7	2'8	3

Jaime informó que la altura media de las 12 plantas de guisantes expuestas a la luz solar fue de 2.13 y la correspondiente a las otras 12 plantas expuestas a la luz artificial fue de 2.2. Concluyó que las plantas de guisantes crecen más bajo la luz artificial. Evalua la conclusión de Jaime.

3. Para cada uno de los ítemes siguientes analiza las respuestas de los alumnos, indicando si es o no correcta y explica el tipo de razonamiento seguido

Ítem 1. Se han elegido 10 familias y el número medio de hijos entre las 10 familias es 1.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las diez familias sea 1.2 ? Justifica tu respuesta.

Respuestas

a. *"Las otras 8 familias tienen que sumar un total de 7 niños. Porque al hacer esa media necesitamos 12 niños".*
b. *"De las 8 familias, que 7 de ellas tengan 1 hijo y la octava que no tenga hijos, ..."*
c. *" Podrían tener dos niños. Porque la media es de 9'6 niños entre las 8 familias:*

Familia	*1ª*	*2ª*	*3ª*	*4ª*	*5ª*	*6ª*	*7ª*	*8ª*
N. hijos	*2*	*1*	*1*	*1'6*	*1*	*1*	*1*	*1*

d. *"Podrían tener un hijo por familia, pero no sabría explicar por qué. Creo que es porque de 10 familias que elijo, cojo 8 y si los divido me da 1'25".*

Ítem 2. Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaron menos. ¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o igual a la recibida por los que habían traído poca? ¿Por qué piensas eso?

Respuestas

- *"Es igual porque al final se quedaron todos con la misma harina".*
- *"Es igual porque la cantidad de harina que dan los que tienen mucha es igual a la cantidad de harina que los que la reciben".*
- *"Fue menor ya que al final tendrán que tener todos la misma cantidad".*

Ítem 3. Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado es 4. ¿Te parece posible? ¿Por qué?

$$\frac{5+3+4+4+4+4}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

- *" Sí es posible, porque sí se puede hacer. Por ejemplo, cogemos cuatro veces el 5 y una vez el 4, lo sumamos y lo dividimos entre 6 y el resultado es 4".*
- *"No es posible porque entre 6 números donde el mayor es 5 no pueden sumar 24".*
- *"No es posible porque en todo caso saldría –4 y no 4".*

4. Las siguientes tareas se han usado para detectar otros errores de comprensión de la media. Analiza qué propiedad se trata de evaluar y cuál es la respuesta correcta:

1) ¿Qué quiere decir que el número medio de niños por familia en España es 1'2? Danos

un ejemplo de 10 familias de modo que le número medio de niños en las 10 familias sea igual a 1’2.

2) Unos niños traen tierra a clase para plantar macetas. Cada uno trae lo que puede y los que traen más tierra reparten a los que traen menos de modo que al final cada niño tiene 1’3 kilos de tierra. Si un niño nuevo viene a clase y deciden repartir a partes iguales, ¿Qué cantidad tendrá ahora cada niño?
3) La edad media de un grupo de niños es de 7’8 años. Cuál será la edad media de los niños dentro de seis meses?

BIBLIOGRAFÍA

Batanero, C. (2000). *Didáctica de la Estadística.* Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. [Recuperable en, http://www.ugr.es/local/batanero/].

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de tendencia central. *UNO*, 25, 41-58

Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A. (1993). Análisis exploratorio de datos; sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, nº 9, 25-31.

Vallecillos, A. (2001). Análisis exploratorio de datos. En, E. Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 559-589). Madrid: Síntesis.

Estocástica y su Didáctica para Maestros

Capítulo 2:

PROBABILIDAD

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE PROBABILIDAD EN PRIMARIA

Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

1) Resuelve los problemas propuestos.
2) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
3) Clasifica los enunciados en tres grupos según el grado de dificultad que les atribuyes (fácil, intermedio, difícil).
4) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
5) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
6) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

1. Indica cuáles de las siguientes experiencias se consideran como aleatorias y cuáles no:

- Sacar una carta de una baraja española y observar si es de oros.
- Observar si en las próximas 24 horas sale el sol.
- Poner agua a enfriar y observar si se congela a cero grados.
- Lanzar un tiro a una canasta de baloncesto y observar si el balón entra
- Dejar caer un huevo desde un tercer piso y observar si se rompe al chocar con el suelo.

2. En una bolsa hay 3 bolas amarillas, 4 azules y 1 verde. Indica con una cruz en la tabla siguiente el tipo de suceso en la experiencia de *sacar una bola de la bolsa y anotar su color:*

	Seguro	Posible	Imposible
Sacar una bola azul			
Sacar una bola roja			
Sacar una bola que no sea azul			
Sacar una bola que no sea roja			

3. Un dado tiene 2 caras pintadas de verde, 2 caras pintadas de amarillo y 2 caras pintadas de rojo. Ana dice, "Yo gano si sale verde"; Bernardo dice, "Yo gano si sale

amarillo o rojo" y Carlos dice, "Yo gano si no sale verde". ¿Cuál es la probabilidad que tiene de ganar cada niño y niña al tirar este dado?

4. Abel y Rosa juegan tirando un dado. Si sale un 5 gana Abel y si sale menos de 3 gana Rosa. ¿Cuántas veces habrá ganado cada uno, aproximadamente, después de tirar el dado 60 veces?

5. En una clase de 27 alumnos y alumnas, por cada 5 niñas hay 4 niños. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera persona que salga al recreo, tras el profesor, sea una niña?

6. Juana y Jesús juegan tirando dos monedas a la vez y van apuntando los resultados. Juana elige ganar "si salen dos caras", mientras que Jesús elige ganar "cuando sale una cara y una cruz". Observa los resultados obtenidos en 50 tiradas.

Doscaras	C C	///// ///// ///
Dos cruces	+ +	///// ////
Una cara y una cruz	C +	///// ///// ///// ///// ///// ///

- ¿Cuántas veces ha ganada Juana?
- ¿Cuántas veces ha ganado Jesús?
- ¿Cuántas veces no ha ganado ninguno?

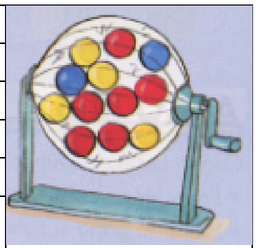
Juana ha pedido la revancha y han vuelto a tirar otras 50 veces. Estos son los resultados.

Dos caras	C C	///// ///// //
Dos cruces	+ +	///// ///// ////
Una cara y una cruz	C +	///// ///// ///// ///// ////

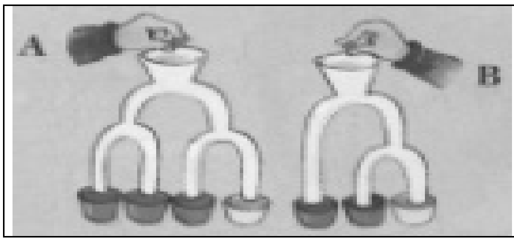
- ¿Cuántas veces ha ganado ahora cada uno?
- ¿Y si juntas los resultados de las dos partidas?

- ¿Cuál es el conjunto de todos los resultados posibles al tirar dos monedas al aire?
- ¿Qué es más fácil en la experiencia anterior: *sacar dos caras* o *sacar una cara y una cruz?*
- Únete a un compañero o compañera y repetid la experiencia de Juana y Jesús. Comparad vuestros resultados con los de las tablas obtenidas por ellos. ¿Crees que es una casualidad que haya ganado las dos partidas Jesús? ¿Por qué?

7. Copia y completa la tabla para la experiencia “sacar una bola del bombo su anotar su color”.

	Casos favorables	Probabilidad	
Sacar una bola roja	6	6/12= 1/2	
Sacar una bola azul			
Sacar una bola que no sea amarilla			
Sacar una bola blanca			
Sacar una bola que no sea blanca			

(Composición del bombo: 6 rojas, 4 amarillas y 2 azules)

	7. ¿Cuál es la probabilidad, en cada caso, de que la bola caiga en un recipiente blanco? ¿Y en un recipiente negro?

B: Conocimientos Matemáticos

1. FENÓMENOS ESTOCÁSTICOS

La principal razón para introducir el estudio de las situaciones aleatorias y las nociones básicas sobre probabilidad en la enseñanza primaria es que las tales situaciones son frecuentes en la vida cotidiana.

1.1. Azar y lenguaje

En nuestras conversaciones, juegos, cuentos y canciones infantiles, prensa y literatura encontramos con frecuencia referencias al azar. Por ejemplo, los niños usan canciones como "Pito –pito" para echar a suertes en el escondite o en el rescate, juegan al parchís, la oca, organizan sorteos, etc.

- Si buscamos la palabra *aleatorio* en el "Diccionario del uso del español" (M. Moliner (1983) encontramos: *"Incierto. Se dice de lo que depende de la suerte o el azar", siendo el azar la "supuesta causa de los sucesos no debidos a una necesidad natural ni a una intervención intencionada humana ni divina".*
- Si buscamos la palabra *azar* encontramos: "*Del árabe 'zahr', flor, por la que se pintaba en una de las caras del dado".*

Esta definición nos remite al juego de dados, un ejemplo típico de lo que todo el mundo acepta como *fenómenos aleatorios*, donde una característica es el carácter imprevisible del resultado.

Hay muchas otras palabras relacionadas con "azar" y "aleatorio":
casual, accidental, eventual, fortuito, impensado, imprevisible, inesperado inopinado, ocasional, ...

También hay muchas expresiones que se usan en los juegos infantiles, con este mismo significado:
por suerte, por suerte, por chiripa, por chamba , de rebote, de rechazo, sin querer, sin intención, sin plan,...

Esta variedad de expresiones indica que los fenómenos aleatorios son cercanos a nuestra experiencia y que incluso los niños son capaces de observar el carácter imprevisible de estos fenómenos.

1.2. El azar en la realidad

Al tratar de buscar ejemplos de fenómenos aleatorios encontramos cuatro grandes campos de aplicación de la estadística relacionados con el hombre: el mundo biológico, físico, social y político.

Nuestro mundo biológico

Dentro del campo biológico, vemos que muchas características heredadas en el nacimiento no se pueden prever de antemano: el sexo, color de pelo, peso al nacer, etc. Algunos rasgos como la estatura, número de pulsaciones por minuto, recuento de hematíes, etc, dependen incluso del momento en que se miden.

En medicina, la posibilidad de contagio o no en una epidemia, la edad en que se sufre una enfermedad infantil, la duración de un cierto síntoma, o la posibilidad de un diagnóstico correcto cuando hay varias posibles enfermedades que presentan síntomas parecidos varían de uno a otro chico. El efecto posible de una vacuna, el riesgo de reacción a la misma, la posibilidad de heredar una cierta enfermedad o defecto, o el modo en que se determina el recuento de glóbulos rojos a partir de una muestra de sangre son ejemplos de situaciones aleatorias.

Cuando se hacen predicciones sobre la población mundial o en una región dada para el año 2050, por ejemplo, o sobre la posibilidad de extinción de las ballenas, se están usado estudios probabilísticos de modelos de crecimiento de poblaciones, de igual forma que cuando se hacen estimaciones de la extensión de una cierta enfermedad o de la esperanza de vida de un individuo.

En agricultura y zootecnia se utilizan estos modelos para prever el efecto del uso de fertilizantes o pesticidas, evaluar el rendimiento de una cosecha o las consecuencias de la extensión de una epidemia, nube tóxica, etc.

Por último, y en el ámbito de la psicofisiología, observamos el efecto del azar sobre el cociente intelectual o en la intensidad de respuesta a un estímulo, así como en los tipos diferentes de caracteres o capacidades de los individuos.

El mundo físico

Además del contexto biológico del propio individuo, nos hallamos inmersos en un medio físico variable. ¿Qué mejor fuente de ejemplos sobre fenómenos aleatorios que los meteorológicos?. La duración, intensidad, extensión de las lluvias, tormentas o granizos; las temperaturas máximas y mínimas, la intensidad y dirección del viento son variables aleatorias. También lo son las posibles consecuencias de estos fenómenos: el volumen de agua en un pantano, la magnitud de daños de una riada o granizo son ejemplos en los que se presenta la ocasión del estudio de la estadística y probabilidad.

También en nuestro mundo físico dependemos de ciertas materias primas como el petróleo, carbón y otros minerales; la estimación de estas necesidades, localización de fuentes de energía, el precio, etc, están sujetos a variaciones de un claro carácter aleatorio.

Otra fuente de variabilidad aleatoria es la medida de magnitudes. Cuando pesamos, medimos tiempo, longitudes, etc, cometemos errores aleatorios. Uno de los problemas que se puede plantear es la estimación del error del instrumento y asignar una estimación lo más precisa posible de la medida. Por último, citamos los problemas de fiabilidad y control de la calidad de los aparatos y dispositivos que usamos: coche, televisor, etc.

El mundo social

El hombre no vive aislado: vivimos en sociedad; la familia, la escuela, el trabajo, el ocio están llenos de situaciones en las que predomina la incertidumbre. El número de hijos de la familia, la edad de los padres al contraer matrimonio, el tipo de trabajo, las creencias o aficiones de los miembros varían de una familia a otra.

En la escuela, ¿podemos prever las preguntas del próximo examen?; ¿quién ganará el próximo partido?, ...

Para desplazarnos de casa a la escuela, o para ir de vacaciones, dependemos del transporte público que puede sufrir retrasos. ¿Cuántos viajeros usarán el autobús? ¿Cuántos clientes habrá en la caja del supermercado el viernes a las 7 de la tarde?

En nuestros ratos de ocio practicamos juegos de azar tales como quinielas o loterías. Acudimos a encuentros deportivos cuyos resultados son inciertos y en los que tendremos que hacer cola para conseguir las entradas, ...

Cuando hacemos una póliza de seguros no sabemos si la cobraremos o por el contrario perderemos el dinero pagado; cuando compramos acciones en bolsa estamos expuestos a la variación en las cotizaciones,...

El mundo político

El Gobierno, a cualquier nivel, local, nacional o de organismos internacionales, necesita tomar múltiples decisiones que dependen de fenómenos inciertos y sobre los cuales necesita información. Por este motivo la administración precisa de la elaboración de censos y encuestas diversas. Desde los resultados electorales hasta los censos de población hay muchas estadísticas cuyos resultados afectan las decisiones de gobierno y todas estas estadísticas se refieren a distintas variables aleatorias relativas a un cierto colectivo. Entre las más importantes citaremos: el índice de precios al consumo, las tasas de población activa, emigración - inmigración, estadísticas demográficas, producción de los distintos bienes, comercio, etc, de las que diariamente escuchamos sus valores en las noticias.

2. PROBABILIDAD. ASIGNACIÓN SUBJETIVA DE PROBABILIDADES

2.1. Experimento y suceso aleatorio

Un ejemplo cotidiano de situación aleatoria es el pronóstico del tiempo. Para llevarlo a cabo se aplican las técnicas de recogida de datos estadísticos y para un día dado no sabemos con seguridad cuál será la temperatura o si lloverá. Sin embargo, dependiendo de la época del año unos sucesos nos parecen más *probables* que otros. Utilizamos la expresión *"experimento aleatorio"* para describir este tipo de situaciones.

Ejercicios

1. Daniel y Ana son niños cordobeses. Acuden a la misma escuela y su profesor les ha pedido que preparen una previsión del tiempo para el día 24 de Junio, fecha en que comenzarán sus vacaciones. Puesto que están aún en el mes de Mayo, Daniel y Ana no pueden predecir exactamente lo que ocurrirá. Por ello, han buscado una lista de expresiones para utilizar en la descripción del pronóstico. He aquí algunas de ellas:

> *cierto; posible; bastante probable; hay alguna posibilidad; seguro; es imposible; casi imposible; se espera que; incierto; hay igual probabilidad; puede ser; sin duda, ...*

¿Podrías acabar de clasificar estas palabras según la mayor o menor confianza que expresan en que ocurra un suceso? Busca en el diccionario nuevas palabras o frases para referirte a hechos que pueden ocurrir y compáralas con las dadas anteriormente.

2. Busca en la prensa frases o previsiones sobre hechos futuros en que se usen las palabras anteriores. Clasifícalas según la confianza que tienes en que ocurran. Compara tu clasificación con la de otros compañeros.

En probabilidad llamamos "*experimento*" tanto a los verdaderos experimentos que podamos provocar como a fenómenos observables en el mundo real; en éste último caso, la propia acción de observar el fenómeno se considera como un experimento. Por ejemplo, la comprobación del sexo de un recién nacido se puede considerar como la realización de un experimento. Diferenciamos entre *experimentos deterministas* y *aleatorios*. Los primeros son aquellos que, realizados en las mismas circunstancias sólo tienen un resultado posible. Por el contrario, un experimento aleatorio se caracteriza por la posibilidad de dar lugar, en idénticas condiciones, a diferentes resultados.

Suceso es cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio. Distinguimos entre *sucesos elementales,* cuando no pueden descomponerse en otros más simples y *suceso compuestos* cuando se componen de dos o más sucesos elementales por medio de operaciones lógicas como la conjunción, disyunción o negación.

Ejercicio

3. Poner tres ejemplos de experimentos aleatorios y deterministas. Para cada uno de ellos describir un suceso simple y otro compuesto.

2.2. Suceso seguro e imposible

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se denomina *espacio muestral* o *suceso seguro*. Suele representarse mediante la letra E. Por ejemplo, el espacio muestral obtenido al lanzar un dado sería E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Este espacio muestral es finito, pero podemos considerar un espacio muestral con infinitos resultados posibles. Por ejemplo, la duración de una lámpara podría variar en un intervalo continuo [0, 1000], donde hay infinitos puntos. Otros casos serían el peso o la talla de una persona tomada al azar de una población.

Puesto que el suceso seguro consta de todos los resultados posibles, siempre se verifica. Teóricamente podríamos también pensar en un suceso que nunca pueda ocurrir, como obtener un 7 al lanzar un dado ordinario. Lo llamaremos *suceso imposible* y lo representamos por $\emptyset$.

Ejercicios:

4. Describir el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos: a) lanzamiento simultáneo de dos monedas. b) suma de los puntos obtenidos al lanzar simultáneamente dos dados.

5. Describir un suceso imposible asociado a cada uno de los experimentos del ejercicio 2.

6. En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. ¿Cuántas bolas se deben sacar sucesivamente para estar seguro de obtener una bola de cada color?

7. Dos sucesos que no pueden ocurrir a la vez se llaman incompatibles. Por ejemplo, no pueden ocurrir a la vez los sucesos "obtener par" y "obtener impar" cuando lanzamos un dado. Tampoco podrían ocurrir a la vez "ser menor que 3" y "ser mayor que 5". ¿Podrías dar ejemplos de otros sucesos incompatibles?

2.3. Asignación de probabilidades subjetivas

La asignación de probabilidades mediante palabras o expresiones no es muy precisa. Por ello, para asignar probabilidades a sucesos, se hace corresponder un valor numérico entre 0 y 1.

Esto permite comparar diferentes sucesos, o bien situarlos sobre un gráfico, que llamaremos la escala de la probabilidad (Figura 1). Una vez realizado el ejercicio 1 individualmente o por parejas, pueden compararse los resultados de los diversos grupos. Puesto que cada alumno o grupo ha trabajado independientemente del resto, las probabilidades asignadas tienen un carácter subjetivo. Cada alumno podría usar diferente información o distintos criterios seguidos en su asignación.

Finalmente, podremos obtener unas probabilidades en las que toda la clase se muestre de acuerdo, tomando el valor medio o la mediana de las probabilidades asignadas individualmente a los diversos sucesos por los diferentes alumnos.

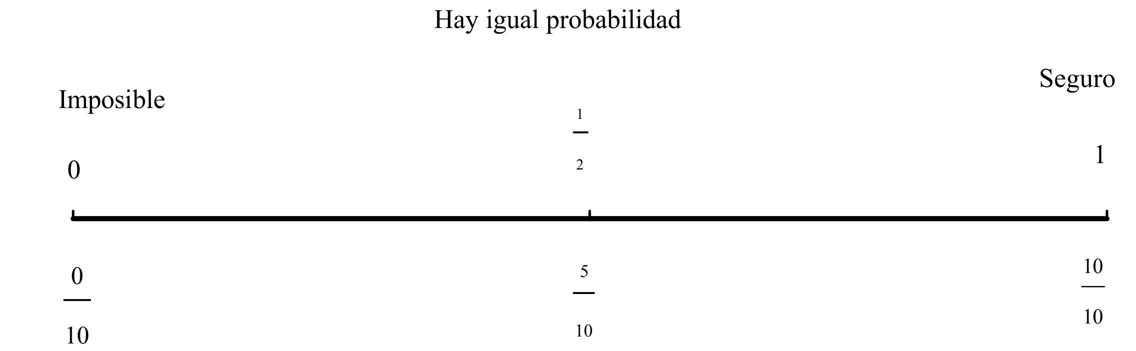


Figura 1

2.4 Probabilidad, como grado de creencia

Para medir la mayor o menor posibilidad de que ocurra un suceso en un experimento, le asignamos un número entre 0 y 1 llamado su *probabilidad.*

La probabilidad varía entre 0 y 1

El suceso seguro siempre ocurre y el suceso imposible no puede ocurrir. Asignamos una probabilidad 0 a un suceso que nunca puede ocurrir, por ejemplo, que salga un 7 al lanzar el dado. Asignamos un 1 a un suceso que ocurre siempre que se realiza el experimento; por ejemplo, al lanzar una moneda es seguro que saldrá o "cara o cruz".

Entre estos dos casos se encuentran el resto de los sucesos asociados a cada experimento. A pesar de que no sabemos cual de ellos ocurrirá en una prueba particular, algunos de ellos nos merecen más confianza que otros, en función de nuestros conocimientos sobre las condiciones de realización del experimento. Por medio de la probabilidad cuantificamos nuestro grado de creencia acerca de la ocurrencia de cada uno de los sucesos asociados a un experimento. *A cualquier otro suceso distinto del "imposible" y del "seguro" se le asigna un número entre 0 y 1.*

Este valor lo asignamos de acuerdo con nuestra información y la creencia que tengamos en la ocurrencia del suceso. Por ello, diferentes personas podrían asignar una probabilidad distinta al mismo suceso.

Por ejemplo, si nos preguntan por la probabilidad de que una cierta persona llegue a cumplir 25 años, diremos que es muy alta. Pero, si su médico sabe que esta persona sufre una enfermedad incurable dará un valor bajo para esta misma probabilidad.

Ejercicios:

8. *Esperanza de vida*: A partir de una tabla de vida, hacer predicciones sobre la probabilidad de vivir x años, o de vivir en el año 2010, según sea un chico o una chica, el profesor, etc.

9. *Investigación*. Discutir y ordenar las probabilidades de que se produzcan diversos inventos antes de 5, o 10 años (vacunas, viajes interplanetarios, energía,...)

10. Accidentes:. Escribir una serie de frases sobre la reducción o aumento del número de accidentes, probabilidad de que se produzcan en una fecha dada y ordenarlas de mayor a menor probabilidad.

11. Resultados de elecciones. Con motivo de algunas elecciones escolares, locales, etc, plantear la mayor o menor probabilidad de que resulte elegido un candidato, o de que logre todos los votos, los 2/3, etc. Para ello utiliza los gráficos de alguna encuesta publicada en la prensa local (por ejemplo, un gráfico de barras o sectores).

12. Recoger de la prensa los datos de las temperaturas máxima y mínima durante una semana en las capitales de provincia. Confeccionar una tabla estadística con estos datos. ¿Cuál crees que será la temperatura máxima y mínima más probable la próxima semana?

13. Busca dos gráficos estadísticos diferentes que hayan aparecido en la prensa local recientemente. Para cada uno de ellos describe el experimento aleatorio al que se refieren; los sucesos asociados y cuál de ellos es más probable. ¿Podrías hacer un gráfico alternativo para representar la información en cada uno de los casos?

3. ESTIMACIÓN DE PROBABILIDADES

3.1. Frecuencia absoluta y relativa. Estabilidad de las frecuencias relativas

Cuando realizamos un experimento N veces, llamamos frecuencia absoluta del suceso A el número N_A de veces que ocurre A. Al cociente $h(A)=N_A/N$ le llamamos frecuencia relativa del suceso. Se pueden observar las tres propiedades siguientes en las frecuencias relativas:

1. La frecuencia relativa del suceso varía entre 0 y 1;
2. La frecuencia relativa del suceso seguro siempre es 1 en cualquier serie de ensayos.
3. Supongamos que un suceso A se forma uniendo sucesos que no tienen elementos comunes. En este caso, la frecuencia relativa del suceso A es la suma de las frecuencias relativas de los sucesos que lo componen.

Por ejemplo, al lanzar un dado, h(par)= h(2)+h(4)+h(6).

El valor de la frecuencia relativa de un suceso no es fijo para N, puesto que se trata de un fenómeno aleatorio. Dos alumnos de la clase que realicen el mismo experimento 50 veces pueden obtener diferentes valores de las frecuencias absoluta y relativa del mismo suceso. Sin embargo, para una serie larga de ensayos, las fluctuaciones de la frecuencia relativa son cada vez más raras y de menor magnitud.

Este hecho tiene una demostración matemática, en los teoremas conocidos como "*leyes de los grandes números*". También puede observarse experimentalmente; por ejemplo, en las estadísticas recogidas en grandes series de datos sobre natalidad, accidentes, fenómenos atmosféricos, etc.

3.2. Estimación frecuencial de la probabilidad

La estabilidad de la frecuencia relativa en largas series de ensayos, junto con el hecho de que haya fenómenos para los cuales los sucesos elementales no son equiprobables, hace que pueda estimarse el valor aproximado de la probabilidad de un suceso a partir de la frecuencia relativa obtenida en un número elevado de pruebas. Este es el único método de asignar probabilidades en experimentos tales como "lanzar una chincheta" o "tener un accidente de coche en una operación retorno". Recuerda, no obstante, que el valor que obtenemos de esta forma es siempre aproximado, es decir, constituye una *estimación de la probabilidad.*

Sabemos, por ejemplo, que, debido a las leyes genéticas la probabilidad de nacer varón o mujer es aproximadamente la misma. Sin embargo, si en un hospital hacemos una estadística de nacimientos no sería raro que un día dado, de diez recién nacidos, 7 u 8 fuesen varones. Sería más raro que fuesen varones 70 o más entre cien recien nacidos, y todavía más difícil que más del 70% de entre 100.000 recién nacidos lo fuesen.

Con este ejemplo, vemos también que es muy importante el tamaño de la muestra en la estimación de las probabilidades frecuenciales. A mayor tamaño de muestra, mayor fiabilidad, porque hay más variabilidad en las muestras pequeñas que en las grandes.

Ejercicios

14 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones te parece verdadera cuando lanzamos un dado? ¿Por qué?

a) la probabilidad de obtener un 3 es mayor que la de obtener un 6
b) la probabilidad de obtener un 6 es mayor que la de obtener un 3;
c) la probabilidad de obtener un 6 es igual que la de obtener un 3;
d) la probabilidad de obtener un 1es mayor que 1/2 ;
e) Asigna un valor numérico a la probabilidad de obtener un 1.

15. *Experimentos con chinchetas.* Por parejas, los alumnos lanzan una caja de chinchetas sobre una mesa, contando cuántas de ellas caen de punta o de cabeza. Con los resultados de toda la clase puede estimarse, aproximadamente, la probabilidad de estos dos sucesos y el profesor puede aprovechar para hacer observar a los chicos que existen ejemplos de experimentos en los que la aplicación de la regla de Laplace no es pertinente.

3.3. Simulación de experimentos aleatorios

La realización de experimentos aleatorios usando dispositivos físicos, como dados, fichas, bolas, ruletas, etc. puede requerir bastante tiempo. A veces, incluso puede que no se dispongan de tales dispositivos en número suficiente para toda la clase. Una alternativa válida consiste en simular tales experimentos por medio de una tabla de números aleatorios. Este procedimiento incluso permite resolver problemas de probabilidad reales haciendo las simulaciones con un ordenador.

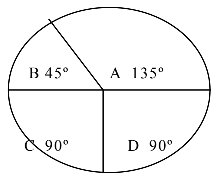
Llamamos *simulación* a la sustitución de un experimento aleatorio por otro equivalente con el cual se experimenta para obtener estimaciones de probabilidades de sucesos asociados al primer experimento. La estimación de la probabilidad que se obtiene con el experimento simulado es tan válida como si se tratase del experimento real. Este es el método que se emplea para obtener previsiones en las siguientes situaciones:

a) Experimentos complejos, como sería planificar el tráfico durante una operación salida de vacaciones.
b) Experimentos peligrosos, como estimar la temperatura de control o la velocidad de reacción permitida en una central nuclear.
c) Situaciones futuras: estudios ecológicos o sobre contaminación ambiental.

Ejercicios

16. Explica cómo usar la tabla de números aleatorios de la figura 3, o los números aleatorios generados por tu calculadora, para simular los siguientes experimentos:
a) Lanzar una moneda.
b) Tirar un dado.
c) Sacar bolas numeradas del 1 al 100 de una bolsa.
d) Girar una ruleta como la de la figura 2.
e) Observar el sexo de un recién nacido.
f) Observar el sexo de 2 recién nacidos

Figura 2



8231	4167	2530	7720	5676
1581	1649	564	3295	5354
4496	8048	9488	3297	7785
6922	7832	9461	9526	1473
4871	0564	2895	0249	4688
3781	8989	5516	2423	1518
2179	8540	9166	3163	8419
7023	5233	9033	9349	1256
2125	5297	0125	8071	9371
5108	7098	6403	6207	1817

Figura 3: Tabla de números aleatorios

4. ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES. REGLA DE LAPLACE

Ejercicios

17. Cuando lanzamos un dado, obtenemos el espacio muestra E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Supongamos que este dado está perfectamente construído. No tenemos, por tanto, motivos para dar ventaja a ninguno de los resultados. ¿Cuál sería la probabilidad de cada uno de los resultados elementales, P(1) = ; ... ; P(6)= ? Razona la respuesta.

18. En el espacio muestral obtenido al lanzar un dado podemos formar subconjuntos suyos o *sucesos*, por ejemplo, A = "obtener par" = {2, 4, 6 }. Escribe los elementos de los siguientes subconjuntos de E:

B = "número impar" =
C "número primo" =
D = "número compuesto" =
F = "múltiplo de 3" =

Asigna probabilidades a cada uno de los sucesos B, C, D, E. Razona las respuestas.

Si un espacio muestral consta de un número finito *n* de sucesos elementales y no tenemos motivo para suponer que alguno de ellos pueda ocurrir con mayor frecuencia que los restantes, la probabilidad de cada uno de estos sucesos elementales es *1/n*

En estos casos, podemos aplicar la *regla de Laplace* para calcular las probabilidades de los sucesos compuestos. Un suceso compuesto que se compone de *k* sucesos elementales, tiene, en este caso una probabilidad igual a *k/n* (regla de Laplace)

En el caso de que tengamos motivos para pensar que algún suceso puede darse con mayor frecuencia que otros (por ejemplo, al usar un dado sesgado) o bien cuando el espacio muestral es infinito, no podemos aplicar esta regla.

Ejercicios

19. Un experimento consiste en lanzar un dado con forma de dodecaedro, con los números del 1 al 12 en sus caras. Encontrar la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:
a) Obtener un número par; b) Obtener un número primo; c) Obtener un divisor de 12.

20. Se toma un número comprendido entre 0 y 999
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea múltiplo de 5?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la cifra central sea mayor que las otras dos?

21. A un congreso asisten 100 personas. De ellas, 80 hablan francés y 40 inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que un asistente hable los dos idiomas?

Axiomas de la probabilidad

En los apartados anteriores hemos visto tres modos diferentes de asignar probabilidades, según el tipo de experimento aleatorio:

a) En el caso de espacios muestrales con un número finito de sucesos elementales en los que pueda aplicarse el principio de indiferencia, calculamos las probabilidades usando la *regla de Laplace.*
b) Si no podemos usar la regla de Laplace, pero tenemos información estadística sobre las frecuencias relativas de aparición de distintos sucesos, podemos obtener una *estimación frecuencial* de las probabilidades.
c) En los demás casos, el único modo de asignar las probabilidades a los sucesos es de modo *subjetivo.*

En todos los casos, las probabilidades cumplen unas mismas propiedades, que se recogen en la *definición axiomática de la probabilidad.*

Toda teoría matemática se desarrolla a partir de una serie de axiomas. Generalmente estos axiomas se basan en la abstracción de ciertas propiedades de los fenómenos que se estudian, que para el caso de la probabilidad son las tres primeras propiedades que hemos citado sobre las frecuencias relativas.

Como consecuencia, se considera que la probabilidad es toda aplicación, definida en el conjunto de los sucesos asociados a un experimento aleatorio, que cumpla las tres siguientes propiedades:

1. A todo suceso A le corresponde una probabilidad P(A), número comprendido entre 0 y 1.
2. La probabilidad del suceso seguro es 1, P(E)=1.
3. La probabilidad de un suceso que es unión de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades de los sucesos que lo componen.

5. PROBABILIDADES EN EXPERIMENTOS COMPUESTOS

Con frecuencia, los problemas de probabilidad involucran dos o más experimentos. Algunos ejemplos de estas situaciones son:

- Lanzar al aire dos monedas, tres monedas, ...
- Adivinar el sexo de una pareja de mellizos no idénticos, antes de hacer la ecografía.
- El número de bombillas defectuosas en una caja de 10 bombillas

- El número de estudiantes en una clase que ha estudiado la lección

En estas situaciones, algunas reglas sencillas pueden ser útiles para calcular la probabilidad. Estudiaremos algunos ejemplos para deducir estas reglas a partir de los mismos.

5.1. Resultados de un experimento compuesto

Ejemplo:

Al lanzar simultáneamente dos monedas, ¿es más fácil obtener una o dos caras?

Solución: Se trata de un *experimento compuesto* de dos experimentos simples:

- Primer experimento: Lanzar la primera moneda. E = { C, +}
- Segundo experimento: Lanzar la segunda moneda. E = { C, +}

Las posibilidades que se pueden presentar en el experimento compuesto se presentan en la tabla siguiente:

	Segundo Experimento	
Primer Experimento	C	+
C	CC	C+
+	+C	++

Observamos por tanto que la probabilidad de obtener dos caras es ¼ y la de obtener una cara es ½ puesto que tenemos dos posibilidades.

Ejercicios

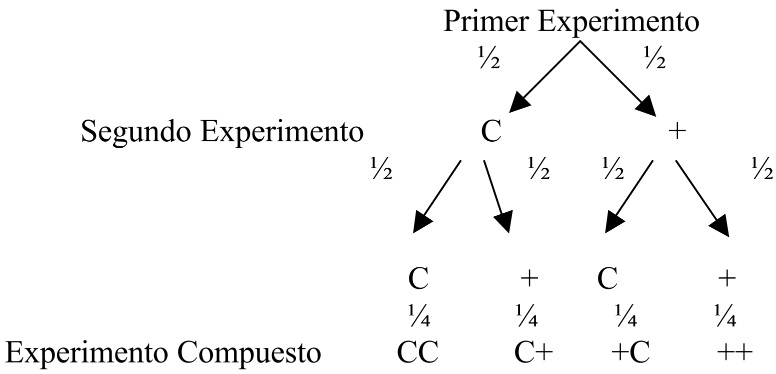
22. Describe con la ayuda de una tabla todos los sucesos que puedes obtener en los siguientes experimentos compuestos:
a) Sexo de dos recién nacidos
b) Números al lanzar dos dados a la vez
c) Grupo sanguíneo de dos recién nacidos

23. De una bolsa con 3 bolas blancas y 3 bolas azules sacamos dos bolas. Describe todos los resultados si :
a) Devolvemos la primera bola a la caja después de ver el color
b) No la devolvemos

5.2. Cálculo de probabilidad a partir del diagrama en árbol

Otra forma de representar las posibilidades en este experimento compuesto es mediante un diagrama en árbol, que nos sirve también para observar la forma en que se obtiene la probabilidad.

Observa el diagrama que hemos construido para representar el experimento que consiste en lanzar dos monedas. En este diagrama anotamos, para cada experimento sus posibilidades y la probabilidad de los diferentes resultados



Regla de cálculo: Puesto que la mitad de las veces obtenemos cara en el primer experimento y de esta mitad, la mitad de las veces obtenemos cara en el segundo, la probabilidad de obtener dos caras es la mitad de un medio, esto es un cuarto.

- En el diagrama en árbol, la probabilidad final de un resultado es el producto de las probabilidades en cada rama que lleva a este resultado.

5.3. Experimentos dependientes e independientes

En el ejemplo del lanzamiento de dos monedas, el resultado de la segunda moneda no depende de lo que salió en la primera. Así observamos que:

- Los resultados del segundo experimento serían los mismos, si no se hubiera llevado a cabo el primero.
- Los resultados del segundo experimento tienen la misma probabilidad, sin depender del resultado del primero. La probabilidad de obtener cara en el segundo lanzamiento es ½ y esto no depende del resultado en el primer lanzamiento.

En otros casos, el segundo experimento depende del primero, por ejemplo:

- La probabilidad de aprobar un examen mejora con el número de exámenes.
- La probabilidad de que una persona tenga un infarto es mayor si ha tenido otro previamente.
- La probabilidad de que un niño tenga los ojos azules es diferente, según el color de los ojos de sus padres.

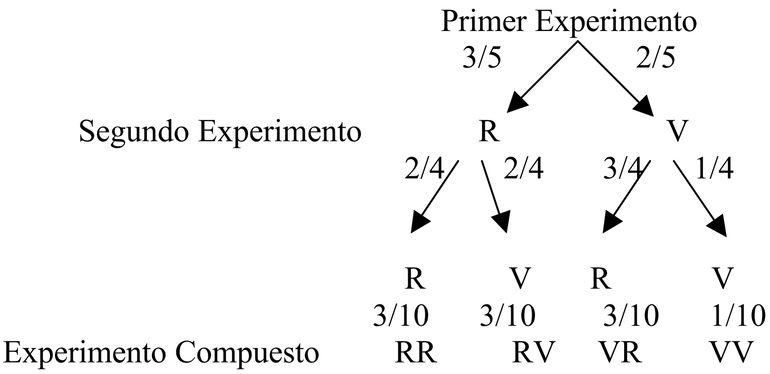
También en estos casos podemos usar el diagrama en árbol, pero teniendo en cuenta que ahora las probabilidades del segundo experimento dependen del resultado del primero.

Ejemplo:

En una caja tengo tres bolas rojas y dos verdes. Tomo dos bolas al azar sin devolver la primera, ¿Cuál es la probabilidad de tomar las dos verdes?

Solución:

Puedo construir de nuevo el diagrama en árbol, teniendo en cuenta las probabilidades en cada experimento y cómo varían las del segundo en función de los resultados en el primero:



Observa que en el experimento compuesto, de nuevo la suma de todas las probabilidades es igual a uno.

6. TALLER DE MATEMÁTICAS

1. Se lanza un moneda tres veces seguidas. a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 caras? b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener más caras que cruces?

2. Se lanza un dado dos veces seguidas y se suman los puntos obtenidos. a) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 8? b) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de puntos sean menor o igual que 10?

3. Carmen y Daniel han inventado un juego de dados con las siguientes reglas:
   - Lanzan dos dados sucesivamente y calculan la diferencia de puntos entre el mayor y el menor.
   - Si resulta una diferencia de 0, 1 o 2 entonces Carmen gana 1 ficha.
   - Si resulta 3, 4, o 5 es Daniel quien gana una ficha.
   - Comienzan con un total de 20 fichas y el juego termina cuando no quedan más.

   ¿Te parece que este juego es equitativo? Si tuvieras que jugar, ¿cuál jugador preferirías ser? ¿Cuántas fichas debería ganar cada jugador para que el juego sea equitativo sin cambiar el resto de las reglas?

4. En una caja con 10 bombillas hay 3 fundidas. Tomamos dos bombillas de la caja.

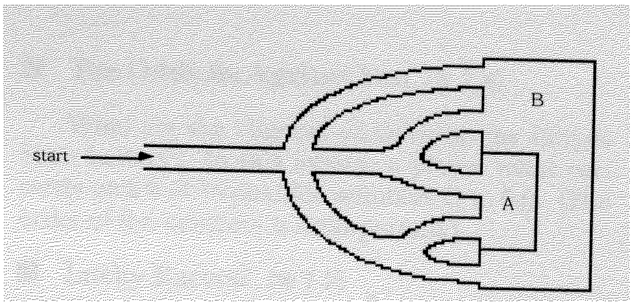
- ¿Depende la probabilidad de que la segunda bombilla sea defectuosa de si la primera estaba fundida?
- Con ayuda del diagrama en árbol calcula la probabilidad de que las dos bombillas sean defectuosas, de que ninguna esté fundida, de que al menos una esté fundida. ¿Cuál es el resultado más probable?

5. El 85 % de votantes en una ciudad acude a las elecciones. En una familia donde hay tres personas con edad de votar, ¿Cuál es la probabilidad de que las tres hayan votado?

6. Un jugador de baloncesto que suele encestar el 70 por ciento de sus tiros desde el punto de lanzamiento de personales tiene que lanzar una personal. Esto implica que si el jugador acierta el primer lanzamiento puede repetir otro. Por tanto puedo obtener 0, 1 o 2 puntos en el juego, fallando el primer lanzamiento (0 puntos) acertando el primero y fallando el segundo (1 punto) o encestando los dos (2 puntos).

a) Utiliza la tabla de números aleatorios para simular el experimento y estima la probabilidad de que el jugador obtenga 0, 1, 2 puntos.
b) Con ayuda de un diagrama en árbol calcula la probabilidad de que el jugador obtenga 0, 1, 2 puntos.

7. Ponemos a un ratón al comienzo de este laberinto. ¿Cuál es la probabilidad de que acabe en la parte A? ¿Y en la B?



Simula este experimento y da una respuesta aproximada.
Con la ayuda de un diagrama en árbol calcula las probabilidades de llega a A y a B.

8. Al lanzar tres monedas, Maria gana 1 euro si se obtiene 0 o 1 caras. Juan gana un euro si se obtienen 2 o 3 caras. María dice que el juego es justo porque solo hay 4 posibilidades y cada uno de ellos tiene ventajas con dos. Juan no está de acuerdo.
a) ¿Quién tiene razón? b) ¿Cuál sería la cantidad de dinero que tiene que pagar Maria a Juan en caso que este gane, para que el juego sea equitativo?

C: Conocimientos Didácticos

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

La probabilidad, como tal, no aparece como un tema específico en la educación primaria, aunque encontramos menciones al tema en forma implícita y explícita.

Por ejemplo, el objetivo general 6 para el área de matemáticas formulado por el M.E.C. sugiere el trabajo con fenómenos aleatorios: *"Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma"*.

Este objetivo es desarrollado en el bloque de contenidos referido a organización de la información en los siguientes términos, donde se alude explícitamente a los experimentos aleatorios, dentro de los conceptos, recogiendo como tal "*Carácter aleatorio de algunas experiencias*".

Dentro de los procedimientos en este mismo bloque se incluye también la *"expresión sencilla del grado de probabilidad de un suceso experimentado por el alumno"*.

Respecto a *criterios de evaluación* sobre probabilidad especifica el número 11, en el que se contempla claramente una introducción a la asignación de probabilidades en casos sencillos: "*Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado de juegos de azar sencillos, y comprobar dicho resultado"*.

1.2. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)

La probabilidad se contempla en estas orientaciones curriculares desde el jardín de infancia. En los niveles K-2 (infantil y primer ciclo de primaria) se especifica que todos los niños deben discutir sobre sucesos familiares a su experiencia les parecen fáciles o difíciles de ocurrir. Las ideas de probabilidad a estos niveles han de ser informales.

En los niveles 3-5 se espera que los niños alcancen competencia para:

- decribir sucesos como probables o improbables y discutir el grado de probabilidad usando palabras como seguro, igual probabilidad e imposible;
- predecir la probabilidad de los diferentes resultados de experimentos simples y comprobar las predicciones a través de la experimentación;
- comprender que podemos representar la probabilidad de un suceso por un número comprendido entre cero y uno.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

Desde muy pequeño el niño debe aprender a estimar, discriminar y diferenciar formas, distancias y cantidades. Las operaciones aritméticas básicas se pueden también concretizar en operaciones con objetos físicos (juntar o separar colecciones, etc.) que tienen la propiedad de ser reversibles (volver a los operandos primitivos al deshacer la operación).

Por el contrario, no existe una experiencia concreta similar de lo aleatorio, ya que no podemos manipular estos fenómenos para producir un resultado específico, ni devolver los objetos a su estado inicial deshaciendo la operación. Por ejemplo, si hacemos girar la aguja en una ruleta, desde una posición inicial, impulsándola hacia la derecha, es muy poco probable que un impulso a la izquierda devuelva la aguja a su posición inicial. Esta falta de reversibilidad de los experimentos aleatorios sin duda influye en el desarrollo más tardío de las nociones de aleatoriedad y probabilidad.

2.1. La Intuición del Azar

El primer paso para comenzar a enseñar probabilidad es asegurarnos que los niños son capaces de diferenciar las situaciones aleatorias y deterministas.

Piaget e Inhelder (1951) pensaban que los niños pequeños no pueden comprender bien el azar, porque para ello tendrían que entender la relación de causa y efecto. Por ello piensan que no hay una intuición del azar innata en el niño, como no existía tampoco en el hombre primitivo, que atribuía los sucesos aleatorios a causas ocultas o a la "voluntad de los dioses".

Esta opinión es rechazada por Fischbein para quien la *intuición primaria* del azar, esto es, la distinción entre fenómeno aleatorio y determinista aparece antes de los 7 años. Fischbein se basa en la conducta de los niños al practicar juegos de azar, ya que en juegos sencillos, los niños son capaces de elegir la opción de mayor probabilidad. Esta comprensión es gradual y progresiva.

En los fenómenos aleatorios los resultados aislados son imprevisibles pero el conjunto de posibilidades puede determinarse mediante un razonamiento de tipo combinatorio, con lo que se vuelve previsible. Cuando se comprende esto aparece la idea de probabilidad, expresada por la razón entre las posibilidades de un caso particular y del conjunto de posibilidades. Esto ocurre en la etapa de las *operaciones formales.*

Fischbein sostiene que la distinción entre el azar y lo deducible no se realiza espontánea y completamente al nivel de las operaciones formales, porque está influenciado por las tradiciones culturales y educativas de la sociedad moderna, que orientan el pensamiento hacia explicaciones deterministas.

2.2. La estimación de la frecuencia relativa

Supuesto que un niño sea capaz de diferenciar los fenómenos aleatorios y deterministas, el segundo paso es que pueda estimar en una serie de experimentos cuáles son los sucesos que aparecen con mayor o menor frecuencia. Muchos psicólogos han llevado a cabo experimentos de aprendizaje probabilístico, en los cuales se trata de estudiar las predicciones de los sujetos ante situaciones en que un suceso se repite con una determinada frecuencia relativa.

> Ejemplo. Se presenta al alumno dos luces de color diferente (pueden ser rojo y verde) que se irán encendiendo intermitente y aleatoriamente con una determinada frecuencia, por ejemplo, el 70 y el 30%, respectivamente. El sujeto debe predecir cuál de las dos luces se

encenderá la próxima vez.

Los resultados obtenidos en este tipo de experimentos apoyan fuertemente la conclusión de que los niños adapta sus predicciones a las probabilidades de los sucesos que se le presentan como estímulo. Ello nos indica que los niños son capaces de apreciar las diferentes frecuencias relativas con que aparecen los resultados de los fenómenos aleatorios.

Esta predicción mejora con la edad, Como resultado de experiencias acumuladas, la intuición de la frecuencia relativa se desarrolla de un modo natural como consecuencia de las experiencias del niño con situaciones que implican sucesos aleatorios, en las que sea necesaria una estimación de las frecuencias relativas de los fenómenos. Es fácil pensar en tales experiencias en la vida diaria, por ejemplo, cuando estimamos el tiempo que transcurre entre un autobús y otro, o hacemos una previsión sobre si va a llover o no, según el día se presente más o menos nublado, etc. Al llegar a la adolescencia, incluso se pueden elegir estrategias adecuadas en función de las frecuencias de los sucesos aleatorios.

2.3. Estimación de posibilidades y noción de probabilidad

El niño puede hacer juicios probabilísticos, en situaciones sencillas, por ejemplo al elegir, entre dos urnas o cajas con diferente número de bolas blancas y negras, aquella que ofrezca más posibilidades de obtener una bola blanca. Hay que tener en cuenta que aquí aparece un problema de comparación de fracciones por lo que se seguirán las estrategias y etapas que se describen sobre proporcionalidad.

Los niños comienzan resolviendo problemas que impliquen comparación de probabilidades de un mismo suceso A en dos experimentos diferentes sólo en situaciones donde, bien el número de casos favorables o el número de casos no favorables a A son iguales en ambos experimentos (sus estimaciones se basan en comparaciones binarias). Posteriormente pasan a resolver problemas en que los casos se pueden poner en correspondencia mediante una proporción.

Los adolescentes progresan rápidamente en el cálculo de probabilidades, incluso cuando las fracciones a comparar tienen diferente denominador. Esto se observa con niños a partir de 12-13 años, e incluso a partir de 10 años con la ayuda de la instrucción.

3. SITUACIONES Y RECURSOS

Los resultados de diversas investigaciones proporcionan orientaciones sobre cómo ayudar a los niños en el desarrollo del razonamiento probabilístico. Algunas de estas orientaciones son las siguientes:

1. Proporcionar una amplia variedad de experiencias que permitan observar los fenómenos aleatorios y diferenciarlos de los deterministas.
2. Estimular la expresión de predicciones sobre el comportamiento de estos fenómenos y los resultados, así como su probabilidad.
3. Organizar la recogida de datos de experimentación de modo que los alumnos tengan posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias en función de los resultados.
4. Resaltar el carácter imprevisible de cada resultado aislado, así como la variabilidad de las pequeñas muestras, mediante la comparación de resultados de cada niño o por parejas.
5. Ayudar a apreciar el fenómeno de la convergencia mediante la acumulación de resultados de toda la clase y comparar la fiabilidad de pequeñas y grandes muestras.

En los siguientes apartados describimos algunos tipos de actividades y recursos para el estudio de la probabilidad en primaria.

3.1. Juegos y sorteos

Los niños son muy aficionados a los juegos. En ellos el azar interviene en diferentes formas. Por ejemplo, los niños echan a suerte cuando juegan al escondite o al rescate porque ninguno quiere "quedarse". Podemos aprovechar estas actividades infantiles para hacerles observar los resultados aleatorios y no aleatorios.

Por otro lado los niños juegan al parchís, la oca y otros juegos de azar y en los que a veces también se mezclan las estrategias. Algunos de estos juegos contribuyen a la formación de creencias, como, por ejemplo, que el número cinco es el más difícil, cuando se lanza un dado. Todas estas actividades se podrían aprovechar en relación con la introducción de la probabilidad

Actividad 1.

"Pito pito" es una canción que usan los niños para echar a suertes. Dice así: "Pito pito gorgorito, donde vas tu tan bonito, a la vera de mi abuela, pim, pam fuera! (El que le toque se queda).
a) ¿Conoces otras canciones para echar a suertes? ¿Cuándo las usais?
b) Vamos a colocarnos en un corro y echar a suertes con "pito pito" ¿Sería justo comenzar siempre por el mismo niño? ¿Por qué?
c) ¿Conoces otras formas de echar a suertes?
d) ¿Podríamos poner los nombres de cada niño en un papel y elegir uno al azar? ¿Qué significa elegir al azar? ¿Cómo lo harías? ¿Es más fácil que salga el nombre de un niño o de una niña?

3.2. Experimentación y estimación frecuencial de probabilidades

En este tipo de actividades se proporciona a los alumnos algunos dispositivos generadores de resultados aleatorios, como dados, monedas, fichas, ruletas, etc. La finalidad será que los alumnos experimenten y adquieran una experiencia de lo aleatorio, incluyendo la observación de la imprevisibilidad de resultados, la variabilidad de las pequeñas muestras y la convergencia gradual a la probabilidad teórica. Será necesario que el profesor organice la recogida de datos, la representación gráfica de los resultados y la discusión de los mismos. Se animará a los alumnos a expresar sus creencias previas sobre los fenómenos aleatorios y a contrastarlas con los resultados experimentales. La recogida de datos, organización en tablas y representación gráfica permite conectar este tema con la estadística.

Actividad 2:

a) Imagina que estás jugando al parchís con un amigo. Para poder comenzar a mover la ficha es preciso obtener un cinco, pero tu amigo prefiere que se le exija obtener un 3, porque piensa que de este modo tiene ventaja. ¿Tú que opinas? ¿Puedes dejarle que comience a mover la ficha cuando le salga el 3, o es preciso que los dos juguéis a obtener el mismo número?

Otro compañero sugiere que hagáis un experimento para resolver la discusión. Piensa que de este modo se puede saber quién tiene ventaja.

Fíjate en la tabla que te presentamos a continuación. Trata de adivinar cuantas veces, aproximadamente, saldrá el 3 y cuantas el 5 si lanzas un dado 24 veces. Escribe este número en la columna "número esperado de veces".

Resultado	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Nº esperado de veces
1				
2				
3				
4				
5				
6				
Total		24	1	24

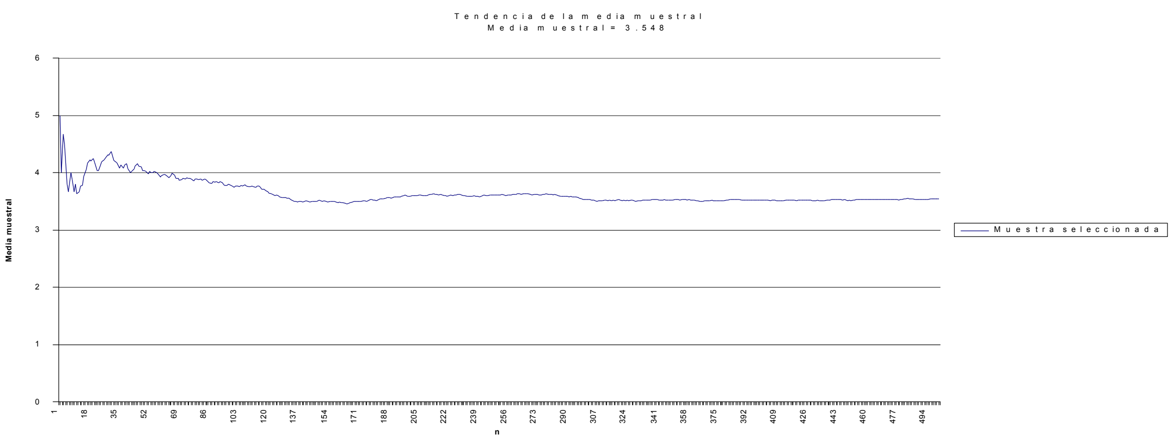
b) Lanza el dado 24 veces y anota los resultados en la tabla. El número de veces que sale cada cara del dado es su frecuencia absoluta. Si dividimos dicho número por el número total de lanzamientos (en este caso 24), obtenemos la frecuencia relativa de ese suceso. Calcula la frecuencia relativa de obtener 5 y la de obtener 3. ¿Cuál es mayor?.

c) El profesor mostrará en la pizarra los resultados de toda la clase. Preparará con ellos una tabla y un gráfico de barras. Compara estos resultados con los vuestros y con la estimación que habéis hecho.

d) Con el fin de apreciar la ley de estabilidad de las frecuencias relativas y comparar los valores de la probabilidad asignados según la regla de Laplace con el correspondiente concepto frecuencial, se recogerán todos los resultados de los distintos grupos en una hoja de registro como la siguiente:

Suceso observado:					
Pareja Nº	Nº de experimentos	Frecuencia absoluta	Nº de experimentos acumulados (N)	Frecuencia acumulada (A)	Frecuencia relativa (A/N)
1					
2					
......					

e) En un diagrama cartesiano se representarán los puntos (N,A/N), número de experimentos acumulados, frecuencia relativa. A pesar de que la ley de estabilidad de las frecuencias relativas es válida sólo cuando n crece indefinidamente, los alumnos podrán apreciar una cierta regularidad o tendencia hacia el valor asignado "a priori", aunque el número de experiencias de clase sea limitado.



3.3. Construcción de dispositivos aleatorios

En esta actividad se proporciona a los alumnos cartulina, tijeras y pegamento para construir dispositivos aleatorios con resultados equiprobables y no equiprobable. La finalidad es que los alumnos distingan los casos en que es posible o no es posible aplicar el principio de indiferencia. Asimismo, les permitirá apreciar la utilidad de la estimación frecuencial de la probabilidad en aquellos casos en que no puede aplicarse dicho principio. En la construcción de estos generadores aparecen conexiones con otros temas, como poliedros regulares y no regulares, desarrollo de poliedros, sector circular. Alternativamente estas actividades podrían plantearse en el estudio de los citados temas.

Actividad 3:
Un dado ordinario se puede construir recortando en cartulina el siguiente perfil

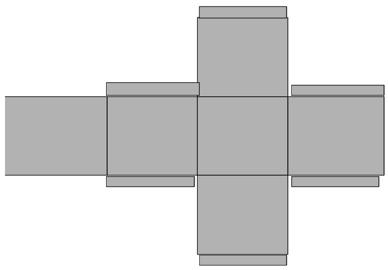
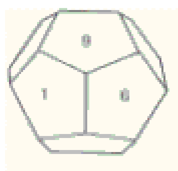


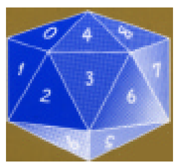
Figura 2

1) Construye un dado recortando en cartulina este perfil, pero numera dos caras con el número 5 y ninguna con el 1.
2) Experimenta con este dado. Enumera, para este caso, el conjunto de todos los resultados posibles. ¿Cuáles son sus probabilidades?

3) Construye un dado, recortando en cartulina el perfil dibujado. Pega un pequeño peso en la cara del 1, por ejemplo, un botón. De este modo hemos construido un dado *sesgado*.¿Qué consecuencias tiene el hecho de que una cara del dado pese más que las restantes? En este caso, obtener un 1, ¿es más, menos o igual de probable que antes? ¿Puedes construir un dado sesgado de tal manera que casi siempre salga el 5?

4) Construye dados sesgados y no sesgados que tengan más de 6 resultados posibles. En las figuras adjuntas presentamos algunos poliedros regulares. Construye dados sesgados y no sesgados con estos poliedros regulares. ¿Cuáles son los poliedros regulares con los que puedes construir dados no sesgados? ¿Podrías construir un dado no sesgado con un poliedro no regular?





Actividad 3:

Construye una ruleta como la que representamos a continuación. Sólo necesitas un trozo de cartulina, un compás para trazar el contorno circular, un bolígrafo como eje de giro y un clip sujetapapeles parcialmente desenrollado.

a) Da un empujón al clip y observa en qué zona se para. Si se detiene en la zona rayada decimos que ha ocurrido el suceso simple R; si se para en la blanca ocurre el suceso simple B. El conjunto de todos los sucesos elementales es, por tanto: E ={ R, B}

b) Si tiramos 40 veces, ¿alrededor de cuántas veces ocurrirá R?; ¿y B?

c) Haz este experimento con un compañero y completa la tabla siguiente:

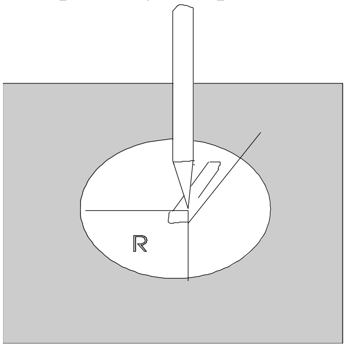


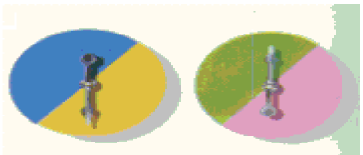
Figura 3

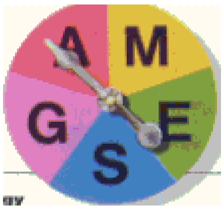
Suceso	Recuento	Nº de veces obtenidos	Frecuencia relativa	Nºde veces esperado
R				
B				
Total		40	1	40

d) Compara tus resultados con los de los otros compañeros.

e) Asigna probabilidades a los sucesos R y B: P(R) = ; P(B) =

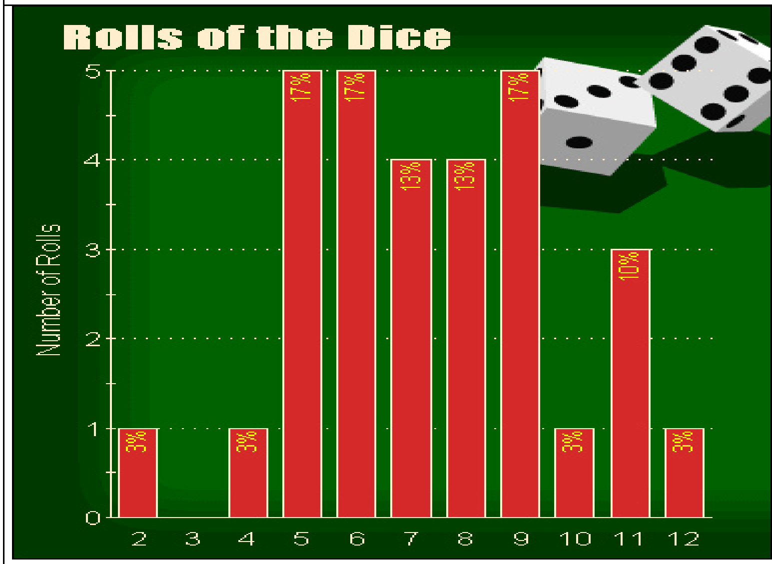
f) Inventa juegos de azar basados en los resultados de lanzar las ruletas que reproducimos a continuación





3.4. Recursos en Internet

1. **¿Cuáles son tus posibilidades?**
http://nces.ed.gov/nceskids/probability/dice_handler.asp



Permite experimentar el lanzamiento de dos dados.

Se puede elegir el número de lanzamientos y se representan los resultados de dos formas diferentes:

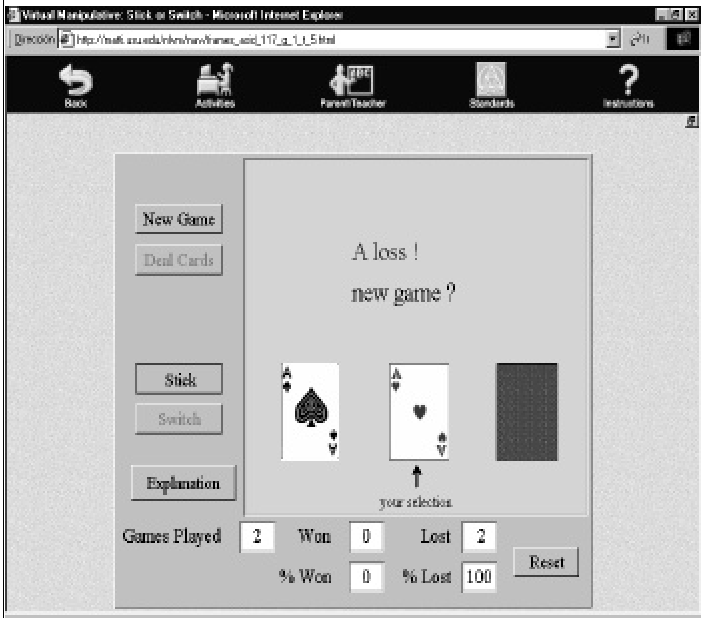
- Mediante una tabla con las frecuencias de cada uno de los resultados posibles en el experimento;
- Con un diagrama de barras de la suma de los dos dados (frecuencias absolutas y porcentajes.

Die1	Die2	Rolls	Die1	Die2	Rolls	Die1	Die2	Rolls
1	1	1	3	1	0	5	1	2
1	2	0	3	2	1	5	2	2
1	3	0	3	3	0	5	3	1
1	4	3	3	4	1	5	4	2
1	5	2	3	5	0	5	5	0
1	6	1	3	6	0	5	6	1
2	1	0	4	1	0	6	1	0
2	2	1	4	2	1	6	2	2
2	3	1	4	3	0	6	3	2
2	4	0	4	4	0	6	4	1
2	5	0	4	5	1	6	5	2
2	6	1	4	6	0	6	6	1

Se puede aumentar el número de experimentos y acumular los resultados.
Este experimento permite plantear preguntas de predicción sobre cuáles sumas son más o menos probables al lanzar los dos dados y contrastar estas predicciones con los resultados. También sirve para analizar el "sesgo de equiprobabilidad" comparando las posibilidades de que los dos números sean iguales o diferentes.

Este experimento podría primero realizarse en la clase con dados reales. Los niños trabajarían por parejas con dados de diferente color (para diferenciar el orden de los mismos) y anotarían sus resultados en una tabla similar a la anterior. Deberían calcular el valor de la suma en cada uno de los casos posibles. Con los datos de toda la clase, se realizaría la gráfica en la pizarra para discutir cuál o cuáles sumas son más probables.

2. **¿Es mejor cambiar?**
http://matti.usu.edu/nlvm/nav/frames_asid_117_g_1_t_5.html



Permite experimentar con una variante del problema de las tres puertas que consiste en lo siguiente:

Hay que adivinar cuál, entre tres cartas es un Rey. Una vez elegida una de las cartas, se enseña una de las dos restantes (siempre una carta diferente del Rey).

Antes de levantar la carta elegida se ofrece la posibilidad de cambiar a la otra carta que todavia no ha sido descubierta. ¿Cuál es la mejor estrategia, cambiar de carta o conservar la elección inicial?

Se trata de pensar antes de comenzar el juego las posibilidades que tenemos y adivinar cuál es la mejor estrategia. Seguidamente se experimenta el juego con la estrategia elegida o bien con las dos estrategias y se revisa la predicción inicial si es necesario.

Finalmente se trata de razonar por qué la estrategia en cuestión da una mayor probabilidad y también el por qué nos engañan nuestras intuiciones sobre la probabilidad.

4. CONFLICTOS EN EL APRENDIZAJE: INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

Uno de los estudios más completos de evaluación de la comprensión de la idea de probabilidad en los niños es el de Green. A continuación incluimos algunos de sus ítemes que contemplan tres aspectos diferentes:

- El lenguaje de probabilidad: comprensión de los términos que usamos para referirnos al azar y la probabilidad.
- Razonamiento combinatorio: capacidad de enumerar todos los casos en un experimento aleatorio.
- Razonamiento probabilístico propiamente dicho.

Item 1. Escribe una palabra o frase que signifique lo mismo que:

a) Imposible
b) Posible
c) Igual posibilidad
d) Poca posibilidad
e) Muy probable

Este es un ítem de lenguaje y el orden de dificultad es el siguiente: a) b) d) e) c) para los niños de 11-12 años. Los porcentajes de acierto varían entre el 80% en la parte a) y el 50% en la parte c).

Item 2. En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe en un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero y el profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:

a) Es más probable que el nombre sea de un niño.
b) Es más probable que el nombre sea de una niña.
c) Es igual de probable que el nombre sea de un niño o de una niña.
d) No lo se.

Este es un ítem de razonamiento probabilístico y evalúa la comprensión de la regla de Laplace que en este caso no se aplica al ser los sucesos no equiprobables. El índice de aciertos en los niños de 11-12 años es el 63%.

Item 3. Cuando se lanza un dado, ¿qué número o números son más difíciles de obtener? ¿o son todos iguales?

Este es un ítem de razonamiento probabilístico y evalúa las creencias subjetivas de que algunos números son más difíciles de obtener que otros. Aproximadamente el 20% de los niños de entre 11-12 años piensan que al lanzar un dado el cinco es el número más difícil de obtener.

Item 4. María y Esteban juegan a los dados. María gana un euro si el dado sale 2, 3, 4, 5 o 6. ¿Cúanto debe ganar Esteban para que el juego sea equitativo.

Este es un ítem de razonamiento combinatorio y también evalúa la comprensión de la idea de juego equitativo. Sólo el 45% de los chicos entre 11 y 12 años sabe resolver el problema.

Item 5. Se pidió a algunos niños lanzar una moneda 150 veces. Algunos lo hicieron correctamente. Otros hicieron trampas. Anotaron con la letra C la aparición de una cara y con + una cruz. Estos son los resultados de Daniel y Diana:

Daniel: c+c++cc++cc+c+c++c++c+ccc+++ccc++c++c+c+c++cc+ccc+
c+c+cc+++cc++c+c++cc+c++cc+c++cc+cc+c+++c++cc++c++
c+c+cc+c++cc+c+c++ccc+cc++c+c++cc+++c+++c+c++ccc++
Diana: +cc+++c++++c+cc+++cc+cc+++cc+ccc+++c++++++c+c+c+c+
+++cccccc+ccc+c+cc+ccccc+ccc++ccc+c+ccccccccc++c+
ccccccc+++++cccc++c+c+cc+cc+cc++++++c+cc++ccc++ccc
¿Hicieron trampas Daniel o Diana? ¿Por qué?

Este es un ítem de razonamiento probabilístico y solo el 30 % de los niños da la solución correcta (Diana). Los resultados no mejoran en los adultos quienes dan respuestas parecidas. Se supone que Diana hace trampas porque la serie tiene rachas largas, sin embargo, esto es lo que suele suceder en una serie de resultados aleatorios.

Es interesante que los niños, sin embargo, pueden mostrar muchas ideas correctas sobre probabilidad con este ítem, por ejemplo:

- Contar las caras y cruces en cada secuencia y comparar con el resultado teórico ½.
- Argumentar que los resultados aleatorios con impredecibles.
- Argumentar que la secuencia de Daniel es demasiado ordenada para ser aleatoria.

Item 6. La probabilidad de que nazca un varón es 1/2. A lo largo de un año completo, habrá más días en los cuales al menos el 60% de los nacimientos corresponden a varones:

a) en un hospital grande (100 nacimientos al día)
b) en un hospital pequeño (10 nacimientos al día)
c) no hay ninguna diferencia.

Este ítem es de razonamiento probabilístico y evalúa la comprensión del efecto que el tamaño de la muestra tiene sobre un experimento aleatorio. Sabemos que la probabilidad de nacer varón es ½. Este resultado puede variar, pero es más probable que varíe en una muestra pequeña, porque es menos fiable. Por tanto, la respuesta correcta es la b). De nuevo, tanto niños como adultos fallan en este ítem, donde el índice de aciertos es sólo el 20%.

5. TALLER DE DIDÁCTICA

5.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 2º y 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizaste personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

1. Busca ejemplos y ejercicios relacionados con las ideas de azar y probabilidad
2. Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
3. Describe los cambios que introducirías en el diseño las lecciones propuestas para los cursos 5º y 6º de primaria.

5.2. Análisis de ítems de evaluación y diseño de situaciones didácticas

A. Analizar los conceptos matemáticos puestos en juego en los ítems siguientes y estudiar las posibles interpretaciones erróneas del enunciado así como las posibles concepciones que lleven a una respuesta errónea.

B. Diseñar una situación de aprendizaje que permita concienciar a los alumnos de sus ideas erróneas respecto a estos problemas.

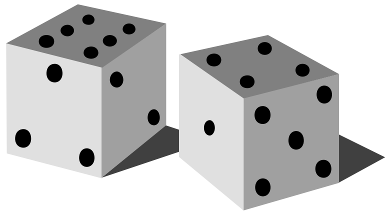
Item 1. La probabilidad de que un niño nazca varón es aproximadamente 1/2. ¿Cuál de las siguientes secuencias de sexos es más probable que ocurra en seis nacimientos?
a) VHHVHV; b) VHHHHV; c) las dos son igual de probables.

Item 2. En dos cajas, etiquetadas como A y B, se introducen las siguientes cantidades de canicas rojas y azules:

Caja	Rojas	Azules
A	6	4
B	60	40

¿Cuál caja da más probabilidad de obtener una bola azul?

Item 3.
a) Al lanzar dos dados, ¿qué es más probable obtener, 5 en uno y 6 en otro, o 6 en ambos dados?
b) Al lanzar una moneda, ¿qué es más probable obtener, cara en una y cruz en otra, o cara en ambas?
c) Al lanzar dos dados, ¿qué es más probable, obtener el mismo número en los dos, o diferentes números?



Item 4. Responde si estás de acuerdo con las siguientes afirmaciones y por qué:

a) José procura entrar en clase, cada día, poniendo primero el pié derecho. Cree que esto aumenta sus posibilidades de obtener buena nota.
b) Lola rellenó en cierta ocasión un boleto de lotería con los siguientes números: 1, 7, 13, 21, 22, 36, y resulta que ganó. Como consecuencia piensa que debe jugar siempre el mismo grupo de número, porque de este modo ganará.
c) Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar al primero porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir.
d) Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganada nunca, pero decide continuar por la siguiente razón: “La lotería es un juego basado en la suerte, a veces gano, a veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces, y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima”.

5.3. Análisis de entrevistas a niños

Considera el juego siguiente:
Te propongo un juego, y tú me dices si es justo o no: Con una baraja, vamos a jugar con las siguientes reglas: Sacamos una carta. Si sale una carta de oros, tú ganas 1 pts. y si sale una carta de otro palo distinto, yo gano 1 pts. ¿Es justo?

Analiza la siguiente entrevista a un niño, indicando si su razonamiento es correcto

J.M (10 años, 11 meses): *No, no, porque tú lo tienes más fácil. Si a ti te sale una de bastos, te la llevas, te sale una de copas, te la llevas, te sale una de cualquier cosa que no sea oros y te la llevas.*
E: *Entonces, ¿cómo cambiaríamos el premio para que fuese justo?*
J.M: *Pues, que cada uno se lleve dos palos.*
E: *Bueno, pero en vez de cambiar las reglas de las cartas, vamos a c ambiar el dinero del premio.*
J.M: *Pues, tú te llevas una y yo me llevaría tres.*

BIBLIOGRAFÍA

Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (2001). Probabilidad. En, E. Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 591-619)). Madrid: Síntesis.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. *J.* (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. *Números,* 37, 37-55.

Cañizares, M. J. y Batanero, C. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *UNO, 14*, 99-114.

Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Green, D. R. (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 2-16 years. In D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (v.2, p. 766 - 783). Universidad de Sheffield.

Pérez, P. (1995). Actividades de probabilidad para la enseñanza primaria. *UNO,* 5, 113-122.

Sáenz, C. (1999). *Materiales para la enseñanza de la teoría de probabilidades.* Madrid: ICE de la Universidad Autónoma.