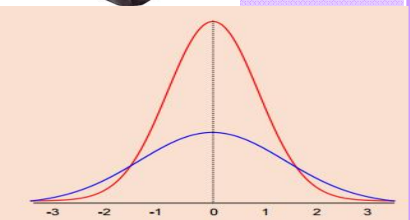
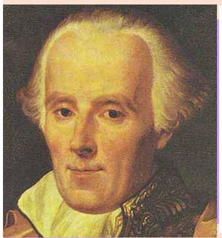
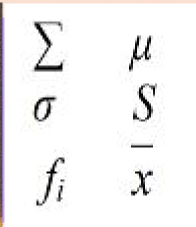
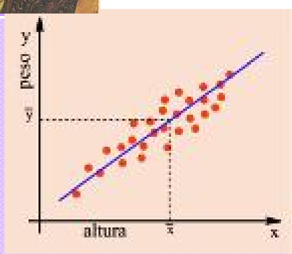








Aprendizaje de la estadística y la probabilidad en Secundaria

TRABAJO FIN DE MÁSTER

MÁSTER DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE SECUNDARIA

ESPECIALIDAD: MATEMÁTICAS

CURSO 2012-2013

Autor: Ricardo García García

Directora: María José González López

ñEl mejor modo de resolver una dificultad
es no tratar de soslayarlaò

Noel Clarasó (1905-1985)

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no habría sido posible sin la ayuda de las siguientes personas, por lo que me gustaría expresarles mi más sincero agradecimiento:

- A mi familia por su comprensión por todo el tiempo que he dedicado a la realización de este trabajo y que no he podido dedicarles a ellos.
- A la profesora María José González López, por todo lo que me ha enseñado sobre didáctica en general, y de la estadística y la probabilidad en particular, y por lo mucho que me ha facilitado el trabajo.
- A la profesora Paz Valle López-Dóriga, por permitirme llevar a cabo la investigación con sus alumnos de Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, poniéndome todas las facilidades para ello.
- A la profesora Amelia Samperio López, por lo que me ha enseñado tutorizando mis prácticas en el instituto de secundaria, y por su permisividad a la hora de llevar al aula mis métodos didácticos.
- A la profesora Cristina Santibáñez Canales, por proponerme impartir con ella la enseñanza de la probabilidad a sus alumnos de 2º de Bachillerato, y de esa forma enriquecer el contenido de este trabajo.
- A los alumnos con los que llevé a cabo la investigación aquí expuesta, por su interés y dedicación a la hora de responder al cuestionario.
- A los profesores del Máster de formación del profesorado de secundaria, por todos los caminos nuevos que me han abierto.

ÍNDICE

1.- INTRODUCCIÓN

Cuando se define la competencia matemática, ésta engloba tres dimensiones: contenidos, procesos y contextos. Dentro de los contenidos, PISA establece cuatro sub-escalas: espacio y forma, cantidad, cambio y relaciones, e incertidumbre. En un curriculum en el que el mayor peso lo lleva el pensamiento determinista, introducir el estudio de la incertidumbre permite al alumno comprender mejor los fenómenos que le rodean, desarrollando un sentido crítico mucho más agudo.

Dentro del actual curriculum de matemáticas de Secundaria, la incertidumbre se trabaja en el bloque denominado Estadística y Probabilidad. Aunque el orden en el que aparece dentro del currículo, el último, no debería ser el que corresponde con la importancia que se da dentro de él, muchas veces no ocurre de esta manera, dejándose sus contenidos para el final de curso, si da tiempo, y en el caso de que se trabajen se hace de forma muy breve.

Una de las motivaciones de la realización de este Trabajo Fin de Máster, es la de dar a la Estadística y Probabilidad la importancia que se merece dentro de la formación matemática de los alumnos de secundaria. La educación tiene como uno de sus objetivos principales el de formar ciudadanos críticos y no manipulables, y la competencia matemática es muy útil para ello. En la sociedad de la información en la que vivimos, el alumno debe ser capaz de interpretar si los datos que recibe están bien analizados, si las conclusiones que se sacan a partir de ellos son veraces, si las previsiones e inferencias que se realizan son factibles. La rama de las matemáticas sobre la que versa este trabajo dota al ciudadano de las herramientas necesarias para ello, de ahí la magnitud de debería adquirir dentro del curriculum implementado por el profesor.

Sin embargo, el introducir un tipo de razonamiento basado en la incertidumbre conlleva unas dificultades específicas a la hora de enseñar y de aprender los contenidos. En este trabajo se pretende comprobar lo que otras investigaciones han concluido respecto a los obstáculos que el estudiante encuentra, y buscar nuevas hipótesis que puedan ser corroboradas en futuros estudios.

Para poder fijar las bases en las que se apoya este trabajo, se analiza en el primer bloque (apartado 2) el lugar que ocupa la Estadística y la Probabilidad en el curriculum de secundaria de España, en general, y de Cantabria, en particular; cómo se ha llegado hasta hoy en el desarrollo de la materia; cómo se enseña en las aulas; a qué problemas da solución; y qué dificultades encuentran los alumnos.

En este último aspecto se quiere profundizar, y para ello, se realiza una investigación en el aula (apartados 3 y 4), mediante un cuestionario que nos permite sacar unas conclusiones sobre el proceso de aprendizaje que sigue el alumno y las dificultades que se encuentra para conseguir que éste sea significativo.

De esta investigación se concluye que los problemas planteados en contextos más cercanos al alumno no tienen por qué inducir a que éste incurra en menos errores, y que la forma como se den los datos en el enunciado de los problemas puede provocar que se incurra en más o menos errores. Por eso es muy importante trabajar en el aula los contenidos en diferentes contextos y presentar los datos de distintas formas, para provocar el error en el alumno y proporcionarle la ayuda que le haga superarlo.

2.- ANÁLISIS DIDÁCTICO DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

2.1.- ESTRUCTURA CONCEPTUAL

Tanto en el art. 4 del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, como en el Decreto 57/2007 del 10 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Cantabria, se recogen, entre los objetivos de la asignatura de matemáticas, los siguientes:

- Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
- Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

A su vez, tanto en el Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas, como en el Decreto 74/2008, de 31 de julio por el que se establece el Currículo del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria, se incluyen entre los objetivos:

- Comprender y aplicar los conceptos y procedimientos matemáticos a situaciones diversas que permitan avanzar en el estudio de las propias matemáticas y de otras ciencias, así como en la resolución razonada de problemas procedentes de actividades cotidianas y diferentes ámbitos del saber.
- Apreciar el desarrollo de las matemáticas como un proceso cambiante y dinámico, con abundantes conexiones internas e íntimamente relacionado

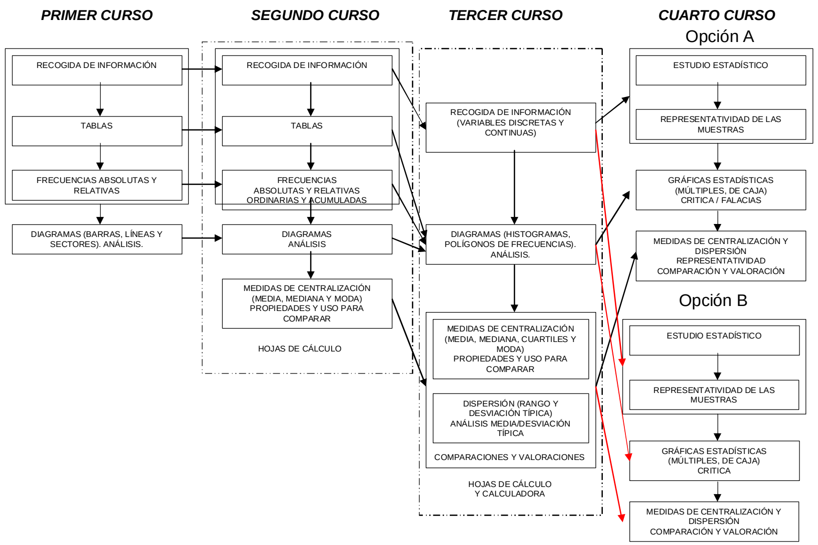
con el de otras áreas del saber.

- Aplicar a situaciones diversas los contenidos matemáticos para analizar, interpretar y valorar fenómenos sociales, con objeto de comprender los retos que plantea la sociedad actual.
- Elaborar juicios y formar criterios propios sobre fenómenos sociales y económicos, utilizando tratamientos matemáticos. Expresar e interpretar datos y mensajes, argumentando con precisión y rigor y aceptando discrepancias y puntos de vista diferentes como un factor de enriquecimiento.
- Hacer uso de variados recursos, incluidos los informáticos, en la búsqueda selectiva y el tratamiento de la información gráfica, estadística y algebraica en sus categorías financiera, humanística o de otra índole, interpretando con corrección y profundidad los resultados obtenidos de ese tratamiento.
- Utilizar el conocimiento matemático para interpretar y comprender la realidad, estableciendo relaciones entre las matemáticas y el entorno social, cultural o económico y apreciando su lugar, actual e histórico, como parte de nuestra cultura.

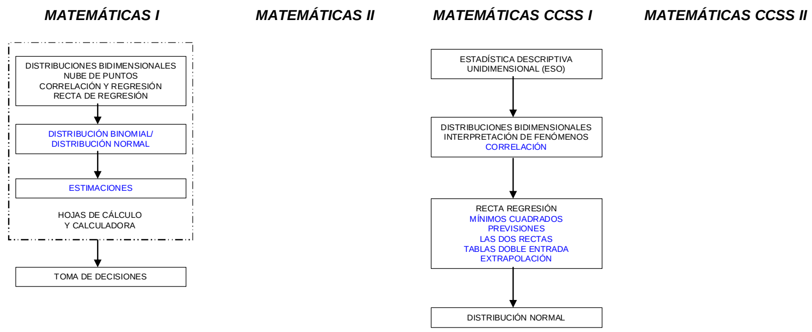
Para lograr estos objetivos el curriculum de matemáticas, tanto de la ESO como de Bachillerato, recoge una serie de contenidos en los que se trabaja la recogida e interpretación de datos en diferentes sistemas de representación, así como el estudio de fenómenos aleatorios que complementan la visión, generalmente, determinista del curriculum.

A continuación se incluye un mapa conceptual con los contenidos incluidos en los diferentes cursos de ESO y Bachillerato, relacionando los contenidos de unos cursos con los de otros. En color negro aparecen los contenidos recogidos en el RD 1631/2006 (Curriculum ESO) y en la ORDEN ESD/1729/2008 (Curriculum Bachillerato), y en azul aquellos contenidos que no están recogidos en las dos leyes anteriores, pero sí en el Decreto 57/2007 (Curriculum ESO) o en el Decreto 74/2008 (Curriculum Bachillerato) de la Comunidad de Cantabria. En el Anexo 1, están recogidos los contenidos más desarrollados, tal y como aparecen en las diferentes normas.

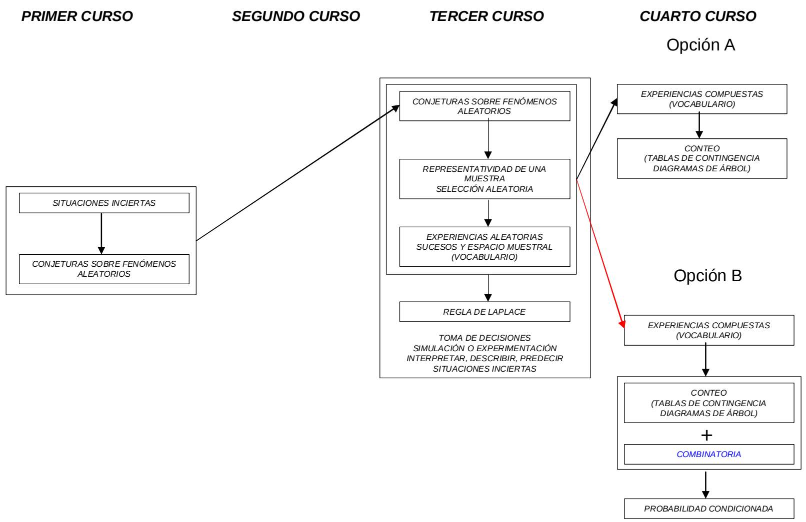
ESTADÍSTICA



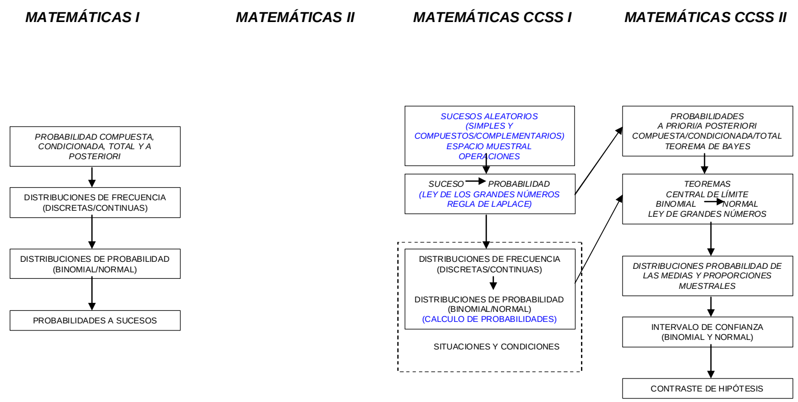
ESTADÍSTICA



PROBABILIDAD



PROBABILIDAD



2.2.- GÉNESIS HISTÓRICA

En este apartado se pretende contextualizar históricamente la estadística y la probabilidad. Para su elaboración se han tomado principalmente como referencia los textos Boyer, C. (2007), Corbalán, F. et al. (2010), Gonick. L et al. (2010) y Grima, P. (2010), así como algún artículo que se cita más adelante.

El surgimiento de un concepto o procedimiento en un momento determinado de la historia es importante para que el alumno conozca la necesidad que lo propició. La explicación de este proceso es una herramienta metodológica muy potente para la transmisión de conocimiento. Asimismo la evolución histórica también puede favorecer el aprendizaje, del mismo modo que refleja el aspecto humano de las matemáticas, pues para llegar a la situación actual, se ha recorrido un camino, la gran mayoría de veces lleno de errores y dificultades.

En el caso de la estadística y la probabilidad, los orígenes conocidos se sitúan en las culturas sumeria y asiria. En yacimientos arqueológicos de estas culturas se han encontrado vestigios de juegos de azar: los astrágalos o talus. Al tirarlos sobre una superficie nivelada, podían caer en cuatro posiciones distintas. Aunque no se conoce el uso que se daba a estos instrumentos (juego, religión,é), se sabe que en la cultura egipcia se realizaba un registro tabulado de los resultados. Estas sencillas piezas, fueron las precursoras de los dados (azar, proviene del árabe ñal-azarò, que significa ñdadoò), que fueron muy utilizados por egipcios, griegos y romanos, aunque el juego se realizaba sin tener en cuenta la equiprobabilidad de los resultados, por lo que no propició el avance en el cálculo probabilístico.

De los primeros registros estadísticos se tiene constancia en el caso de observaciones astronómicas, y de los censos, ya en tiempos de Babilonia.

Lo mismo que ocurría con los juegos de dados, en culturas antiguas como la judía, se utilizaban diferentes sistemas aleatorios en oráculos y ceremonias. En esos casos se prescindía de la connotación de aleatoriedad, pues era sustituida por la voluntad de Dios. Pero la llegada del cristianismo no va a crear un camino diferente, sino que se va a reafirmar en la creencia de que Dios es quien está detrás de estos fenómenos.

Pero la nueva visión del mundo que surge en el Renacimiento, propicia el abandono de las explicaciones teológicas y da un gran impulso al estudio de la ciencia. Si además de esta fuerza por querer saber qué está detrás de los fenómenos observados y vividos, se une la invención de la imprenta y la difusión del conocimiento, el estudio del cálculo de probabilidades se ve definitivamente impulsado.

Y no fue en otro contexto que en el de los juegos de azar, donde el estudio de los cálculos probabilísticos encontró su origen. Los jugadores necesitaban descubrir las leyes que regían ese fenómeno y poder predecir con más certeza lo que ocurriría.

Como recoge J. A. García Cruz, en ñ*Historia de un problema: el reparto de una apuesta*ò (García, J. A. 2000), una pregunta de un jugador llevó a las disquisiciones de diferentes matemáticos y científicos durante siglos. El Problema de los puntos o del reparto de apuestas fue estudiado por diversos autores desde el Renacimiento, entre ellos:

- Luca Pacioli (1445-1517) en 1487 propuso dos problemas: un juego, en el que el premio es de 22 ducados cuando se alcanzan los 60 puntos, se interrumpe cuando un equipo lleva 50 puntos y el otro 30; y tres arqueros que compiten por un premio de 6 ducados lanzan flechas hasta que uno de ellos haga 6 dianas, siendo interrumpidos cuando el primero de ellos lleva 4 dianas, el segundo 3 y el tercero 2. ¿Cómo deben repartirse los premios entre los contendientes en cada uno de los problemas anteriores? Pacioli propuso que el premio debería ser repartido en función de las victorias obtenidas anteriormente, pero no tenía en cuenta lo que podría pasar si siguieran jugando.
- Niccolo Tartaglia (1499-1557) en 1556 aborda el mismo problema. Frente al argumento de Pacioli, puntos ganados por cada jugador, el argumento de Tartaglia se basa en la ventaja de un jugador A respecto del otro (B) en el momento de la interrupción del juego. Pero si se siguiera jugando se podría invertir la ventaja y ganar el B, lo que hace que su argumento tampoco fuera válido.
- Girolamo Cardano (1501-1576) en 1539 llegó a la conclusión de que la solución de Pacioli era incorrecta porque al considerar tan sólo el número de juegos ganados por cada equipo, no contaba cuántos juegos debían

ganar para hacerse con el premio. Cardano propuso como solución del problema que si n es el número de juegos totales y a y b los juegos ganados por cada equipo, el premio debía repartirse de la siguiente manera:

[1+2+é +(n-b)]: [1+2+é (n-a)].

Aunque Cardano confunde probabilidad y esperanza matemática, señala el espacio de sucesos elementales y tiene claro lo que significa un juego justo, que es una noción previa y necesaria al concepto de esperanza matemática.

Fue en la correspondencia epistolar de Pascal (1623-1662) a Fermat (1601-1665), donde se dio solución al problema, al contestar al planteamiento que le había hecho El Caballero de Méré (1607-1684) a Pascal en un problema similar: Cada jugador apuesta 32 ñpistolsò. Hay dos jugadores A y B y cada etapa del juego da un punto al ganador y 0 al perdedor. Gana el juego el primero en tener 3 puntos. Se supone además que ambos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar cada etapa. El juego se interrumpe cuando A cuenta con un punto y B con ninguno. La pregunta es la misma: ¿Cómo repartir la bolsa total de 64 monedas?

El problema no es planteado como un problema de proporciones, sino que se contempla la cantidad de juegos que le falta a cada uno para llevarse la apuesta completa. De los posibles resultados que se podrían dar, se toman los favorables para cada jugador y se distribuye justamente la apuesta con ese criterio.

Pero el Caballero de Méré no sólo planteó a Pascal ese problema relacionado con el juego, sino otros relacionados con el juego de dados en los que se utilizaban más de uno. Dicho jugador había apreciado que había una relación de proporcionalidad entre el número de veces que había que lanzar un dado y el número de veces que ocurría un suceso (sacar seis doble, sacar un 11 al tirar tres dados,é). El error en el que incurría era el no tener en cuenta que estaba analizando una probabilidad compuesta en donde las distintas probabilidades se deben calcular multiplicativamente.

Sin embargo, no fue este jugador el único importante en la historia de la probabilidad, sino que Galileo (1564-1642) también se encontró con otro, que le expresó su sorpresa al observar que al jugar con tres dados a la suma 10, tenía más oportunidades de ganar que cuando jugaba a la suma 9. Dicho jugador no tenía en cuenta que el número de sucesos favorables era distinto para cada resultado, porque no contemplaba el orden de los dados.

Aunque en el juego fue muy útil, el cálculo probabilístico también fue utilizado por Pascal para demostrar que era más conveniente creer en Dios, y sugirió el concepto de máxima esperanza de utilidad para seleccionar la mejor decisión. Según él, si se cree en Dios y éste existe, perfecto, porque se irá al cielo, pero si no existe, no pasa nada, no hay ninguna contraprestación. Pero en el caso de no creer en Dios, no se puede obtener nada beneficioso, ya que si Éste no existe, no pasa nada, pero si existe, se va al infierno.

Durante varios siglos se siguieron asentando las bases empíricas de la estadística y la probabilidad a través de la observación y la experimentación en diferentes campos; conjuntamente, se inició el desarrollo teórico, que tuvo su apogeo en los siglos XIX y XX:

- John Graunt (1620-1674) es el padre de la demografía moderna, al crear censos que explicaban el comportamiento de varios problemas de salud pública.
- Christiaan Huygens (1629-1695) introduce el concepto de esperanza matemática a partir de la noción de juego equitativo, siendo la base del estudio de las pensiones y los seguros de vida.
- Jakob Bernoulli (1654-1705) sentó las bases de la probabilidad estadística, descomponiendo un suceso en sucesos elementales. Extendió el estudio de la probabilidad a distintos aspectos sociales, morales y económicos.
- El reverendo Thomas Bayes (1702-1761), al querer demostrar la existencia de Dios, pretendió establecer unas leyes fijas a las que obedecieran los sucesos que ocurren. Introdujo el concepto de probabilidad inversa, al obtener las probabilidades de las causas por las que puede haber sido producido un suceso que se ha observado.
- Gauss (1777-1855) aplicó sus conocimientos para conocer la órbita del asteroide recién descubierto, Ceres, como mero entretenimiento. Utilizando el método de los mínimos cuadrados consiguió dar una aproximación cercana a la exacta de la órbita. Otra gran aportación de este matemático fue la distribución de errores mediante la ley normal.

- Francis Galton (1822-1911) desarrolló el concepto de correlación a partir de la observación de diversos aspectos hereditarios como la altura de los padres y los hijos.
- Durante los siglos XIX y XX diferentes matemáticos aportaron trabajos que fijaron las bases modernas de la probabilidad y de la estadística. Cabe destacar a Poisson (1781-1840), Tchebycheff (1821-1894) y Kolmogorov (1903-1987), quien definió axiomáticamente la probabilidad, tal y como se enseña y aprende actualmente en todo el mundo. Este último fue consciente de que cerraba una gran guerra contra la incertidumbre, cuando gracias a su teoría axiomática dotaba de regularidad a los fenómenos aleatorios.

Mención aparte merece Laplace (1749-1827) por ser el formulador de la teoría clásica de la probabilidad. En sus diversas obras recoge la resolución de diferentes problemas, como el de puntos, desarrolla el método de mínimos cuadrados, la probabilidad bayesiana, etc.

2.3.- SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Desde el punto de vista de la enseñanza es muy importante representar los conceptos y procedimientos matemáticos mediante diferentes formas. Los distintos sistemas de representación de un concepto matemático permiten al alumno abarcar la diversidad de significados del concepto. Cada sistema de representación destaca más un aspecto u otro, por eso tener una diversidad de representaciones permite que el concepto sea visto en su complejidad, representándolo con distintos símbolos, signos, gráficos, etc, lo que favorece su comprensión (Duval, R. 1999).

Para ilustrar los diferentes sistemas de representación a utilizar en estadística y probabilidad, se han tomado los conceptos de “sucesos compatibles e incompatibles”.

- <u>Sistema de representación verbal</u>

  “Dos sucesos son compatibles cuando pueden ocurrir al mismo tiempo y son incompatibles, cuando no pueden ocurrir al mismo tiempo”, o también, “dos sucesos son compatibles cuando es probable que ocurran al mismo tiempo, e incompatibles cuando es imposible que ocurran a la vez".

- Sistema de representación simbólico

  Dos sucesos A y B son compatibles si $P(A \cap B) \neq 0$ y son incompatibles si $P(A \cap B)=0$

- Sistema de representación gráfico

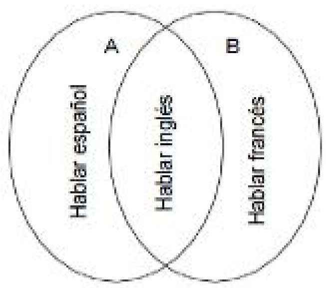
  Los participantes en un congreso hablan inglés, español o francés. Los que provienen de España hablan español e inglés, los que vienen de Francia hablan francés e inglés. ¿Se podrán comunicar entre ellos? Los franceses han nacido en Estrasburgo, Bayona o Burdeos y los españoles en Santander, Cádiz o Barcelona. ¿Alguno ha nacido en la misma ciudad?

  Suceso A: hablar español e inglés

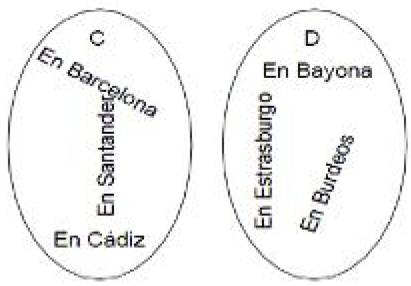
  Suceso B: hablar francés e inglés.

  Suceso C: haber nacido en Santander, Cádiz o Barcelona.

  Suceso D: haber nacido en Bayona, Burdeos o Estrasburgo.



SUCESOS COMPATIBLES



SUCESOS INCOMPATIBLES

- Sistema de representación manipulativo

  Sacar una carta de una baraja.

  Suceso A: Sacar figura / Suceso B: Sacar mayor de 5 / Suceso C: Sacar un as

  Los sucesos A y B son compatibles. Los sucesos A y C son incompatibles.

2.4.- MATERIALES Y RECURSOS

Los materiales y recursos que se pueden utilizar para enseñar y aprender probabilidad y estadística no tienen por qué ser sofisticados, caros, ni espectaculares. Se pueden utilizar materiales que están al alcance de la mano, bien para realizar una recogida de datos de un suceso que ocurre y estudiar cuál es su comportamiento, bien para estudiar diferentes estadísticos de una variable en un determinado grupo de individuos.

Para ello podemos manejar recursos manipulativos muy simples como:

- Monedas: para realizar experimentos con su lanzamiento.
- Dados: para estudiar la probabilidad de que ocurran diferentes sucesos. Se pueden utilizar dados de diferentes formas (cúbicos, tetraédricos, icosaédricos, etc.), y así buscar analogías en el comportamiento.
- Barajas de cartas: son un recurso muy adecuado para el estudio de probabilidad condicionada.
- Ruletas, urnas, aparato de Galton, etc.
- Cinta métrica para realizar registros sobre alguna variable como puede ser altura de los individuos de un grupo.
- Balanzas para realizar pesadas de diferentes objetos y calcular estadísticos.
- Otros instrumentos de medida.

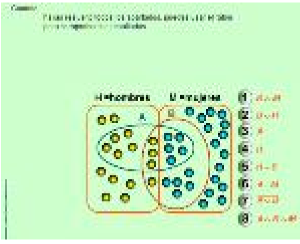
Pero las nuevas tecnologías han facilitado enormemente la realización de diversos experimentos en los que es necesario llevar a cabo muchas repeticiones para sacar conclusiones. Y no sólo para eso, sino también para explicar diferentes conceptos. A continuación se citan algunos ejemplos de applets interesantes que facilitan la comprensión de conceptos y la realización de experimentos:

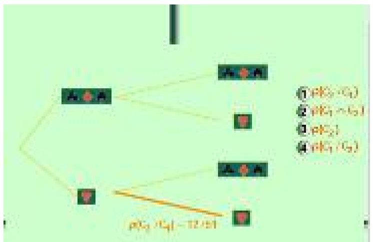
- La página del INTEF

  http://ntic.educacion.es/w3//recursos/bachillerato/matematicas/probabilidad/actividades/sucesos/sucesos.htm

  en la que se pueden encontrar diferentes aplicaciones para estudiar los conceptos probabilísticos tratados en el curriculum de secundaria:

Operaciones con sucesos   Probabilidad condicionada   Pro. total y de Bayes



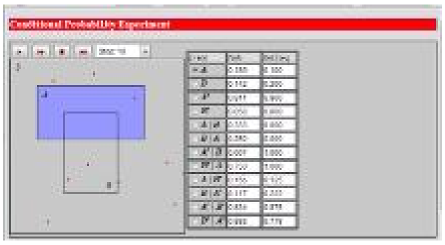


- En la página

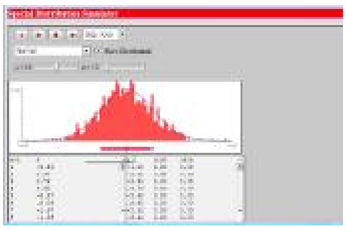
http://www.math.uah.edu/stat/

hay gran cantidad de applets para trabajar en el aula, de los cuales los más adecuados para trabajar en secundaria, por los conceptos que tratan son:

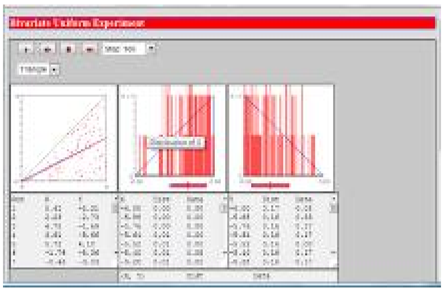
- Probability Spaces: Experimentos aleatorios, medida de la probabilidad, sucesos independientes, probabilidad condicionada, etc.



- Distributions: Simuladores de las distribuciones probabilísticas, la convergencia en la distribución, etc.

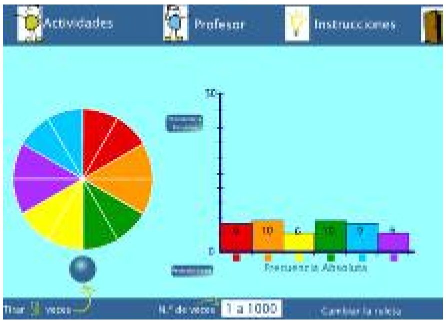


- Expected Value: Trabajan con el concepto de valor esperado.



- Games of Chance: Simulación de juegos: cartas, dados, ruleta, el juego de Monty Hall, etc

- Simulaciones de juegos con ruletas (gráficos, frecuencias relativas, probabilidad)



http://www2.gobiernodecanarias.org/istac/webescolar/juegos.php

- Generación de gráficos estadísticos.
  - http://www2.gobiernodecanarias.org/istac/webescolar/material_didactico/secundaria/graficos_estadisticos/act_estadistica.exe
  - http://nlvm.usu.edu/es/nav/topic_t_5.html
- Otros como
  - Páginas Excel de simulación (dados, monedas, aparato de Galton, frecuencias, etc)

    http://centros5.pntic.mec.es/ies.salvador.dali1/html/materiales/hojadecalculo/hojadecalculo.htm#AZAR Y ESTADÍSTICA
  - Estimación estadística:

    http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/estadistica_estimacion.htm
  - Razonamiento bayesiano:

    http://www.stat.sc.edu/~west/applets/bayesdemo.html

    http://www.gametheory.net/Mike/applets/Bayes/Bayes.html
  - Construcción de árboles de probabilidad

    http://www.dim.uchile.cl/~mkiwi/ma34a/libro/chapter4/Tree/Tree.html
  - Cálculo de distribuciones a posteriori.

    http://www.amstat.org/publications/jse/secure/v8n1/p_discrete.html

    http://members.aol.com/johnp71/bayes.html

    http://www.dim.uchile.cl/~mkiwi/ma34a/libro/chapter4/Bayes/Bayes.html

A su vez, existen diferentes softwares que facilitan extraordinariamente el análisis de datos, y aunque algunos son utilizados a nivel profesional, también son herramientas muy útiles para la compilación de datos en cursos como Bachillerato:

- Paquetes estadísticos profesionales. como por ejemplo: SPSS, STATGRAPHICS, etc.

- Softwares didácticos, como
    - GeoGebra: contiene una hoja de cálculo, generadores de números aleatorios, dibuja diagramas de barras, etc.
    - Fathom, (Ben-Zvi, 2000): para análisis exploratorio de datos y álgebra
    - Sampling Distributions (DelMas, Garfield y Chance, 1998; Chance, Garfield y DelMas, 1999).
- Software de uso general, como las hojas de cálculo, como por ejemplo, EXCEL y OpenOffice Calc
- Tutoriales como activStats y ConStats (Cohen y Chechile, 1997) que desarrollan habilidades estadísticas específicas o evalúan su conocimiento.

2.5.- RAZONAMIENTO ESTOCÁSTICO. ERRORES Y DIFICULTADES

El estudio de los errores y dificultades en el aprendizaje de cualquier materia es muy interesante didácticamente, porque pueden ser utilizados por el profesor para crear conflictos cognitivos en el alumno y así ayudarle a superarlos. El origen de los errores es muy variado. Por ejemplo, algunos son consecuencia de un aprendizaje anterior que provoca que, al ser utilizados esos conocimientos en contextos diferentes, el error aparezca. Pero también hay otros errores o dificultades que son consecuencia del proceso de aprendizaje que han seguido los alumnos y que causan una inercia que, aunque les ha servido para la comprensión de ciertos contenidos, en algún momento de su aprendizaje desencadena el error. Pero también hay otros errores o dificultades que son consecuencia del proceso de aprendizaje seguido por los alumnos y que, aunque les haya servido para la comprensión de ciertos contenidos, causan una inercia que desencadena el error.

El análisis de los errores en los que incurren los alumnos puede ser uno de los pilares en los que basar el diseño de una unidad didáctica que pretende conseguir unos determinados objetivos. Todos los materiales, recursos, metodología y actividades utilizados deberán tener presentes los obstáculos que se va a encontrar el alumno para lograr los objetivos.

En este apartado se hace una recopilación de los errores detectados en diferentes investigaciones en cuanto al aprendizaje y enseñanza de la estadística y probabilidad.

En el trabajo de Silvia del Puerto, Silvia Seminara y Claudia Minnaard, ñ*Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística Descriptiva*ò (Puerto, S. et al, 2007), las autoras recogen una clasificación de los obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas, realizada por Brousseau, en la que los ordena según su origen:

- Ontogénicos o psicogenéticos. Debidos a las características del desarrollo del niño.

  Por ejemplo, para comprender la idea de probabilidad se requiere el razonamiento proporcional.

- Didácticos. Debidos a las elecciones didácticas hechas para establecer la situación de enseñanza.

  Por ejemplo, la introducción de un nuevo simbolismo tal como: $(\Sigma xi)/n$ cuando los estudiantes necesitan trabajar con ejemplos concretos.

- Epistemológicos: Relacionados con la dificultad intrínseca del concepto que se aprende y que pueden ser rastreados a lo largo de la historia de la matemática, en la génesis misma de los conceptos.

  Por ejemplo, la necesidad que llevó a la definición axiomática de probabilidad, para poder comprenderla.

En la investigación de Luis Serrano Romero, Carmen Batanero Bernabeu y Juan J. Ortiz de Haro, ñ*Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato*ò (Serrano, L. et al, 1996), concluyen que dichos estudiantes interpretan la probabilidad de un suceso, como la predicción de si el suceso ocurrirá o no en el siguiente experimento. Por ejemplo, si hay una probabilidad del 70% de que llueva al día siguiente, muchos indican que lloverá al día siguiente porque comparan con 0%, 50% y 100%. Es más, consideran que es aleatorio si se aproxima al 50%, confundiendo aleatoriedad con equiprobabilidad, que es otro error que se trata a continuación.

Carmen Batanero, Emilse Gómez, Luis Serrano, & José Miguel Contreras, estudiaron en ñ*Comprensión de la aleatoriedad por futuros profesores de*

*Educación Primaria*ò (Batanero, C. et al., 2012), qué entendían por aleatoriedad los futuros maestros. Para ello se fundamentaron en las diferentes concepciones de la aleatoriedad a lo largo de la historia: por un lado, lo que no tiene causas conocidas, y por otro, lo que es equiprobable. En la actualidad la comprensión subjetiva de la aleatoriedad tiene sesgos diferentes: consideran que la probabilidad de un suceso decrece cuando ha ocurrido recientemente (creer que sacar dos seis seguidos al lanzar un dado es menos probable que sacar primero un seis y después un dos), o, aunque sepan que la probabilidad de sacar cara o cruz al lanzar una moneda es la misma, consideran que los sucesos no son independientes y piensan que al realizar los lanzamientos se repiten una serie de patrones.

Juan Jesús Ortiz de Haro, Nordin Mohamed Maanan, Luis Serrano Romero y Jesús Rodríguez García, comprobaron en su investigación ñ*Competencias de futuros profesores de educación primaria en la asignación de probabilidades*ò (Ortiz, J.J. et al., 2007), que en los problemas de comparación de probabilidades en los que se necesita un razonamiento proporcional, no siempre es puesto en práctica. Por ejemplo, entre dos cajas con fichas de dos colores (negro y blanco) en las que la proporción de las de cada color es la misma, se pedía que dijeran en cuál era más probable sacar una ficha negra. Muchos de los que respondieron elegían la que tenía mayor número de fichas negras, sin tener en cuenta la proporción.

Juan Jesús Ortiz, Carmen Batanero y José Miguel Contreras, en ñ*Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo*ò (Ortiz, J.J. et al., 2012), querían conocer cuál era la percepción de la esperanza matemática por los profesores. Para ello fundamentaron su investigación en otras anteriores, e utilizaron la clasificación realizada por Piaget e Inhelder de las estrategias de comparación de probabilidades:

- Principio de la etapa preoperatoria. Primero comparan los casos posibles y posteriormente, los casos favorables.
- Final de la etapa preoperatoria. Comparan el número de casos desfavorables.
- Etapa de operaciones concretas. Utilizan la estrategia de correspondencia, que consiste en establecer un criterio de proporcionalidad en una fracción y

aplicarlo a la otra.

- Etapa de operaciones formales. Utilizan la estrategia multiplicativa, en la que comparan los cocientes entre casos favorables y casos posibles en las dos probabilidades.

Aunque la mayoría de los preguntados utilizaban estrategias propias de adultos, había un porcentaje que no lo hacía y basaban sus respuestas en estrategias utilizadas en etapas anteriores a las de las operaciones formales.

En el artículo de Wim Van Dooren, Dirk De Bock y Lieven Verschaffel, “*La búsqueda de las raíces de la ilusión de linealidad*” (Van Dooren, W. et al., 2006), se explica magistralmente cómo los alumnos, acostumbrados a un aprendizaje en el que la proporcionalidad tiene un gran peso, de repente se encuentran con que no funciona en el caso de la probabilidad. Así, la probabilidad de obtener un seis con un dado es 1/6, pero con dos dados no es 2/6. Este obstáculo debe ser salvado por el alumno, cuya inercia a aplicar la linealidad provocará errores. Por ejemplo, en la conocida “paradoja del cumpleaños”, los alumnos estiman que la probabilidad de que entre un grupo de 30 personas haya dos que cumplan años el mismo día es de 30/365, mientras que la realidad les sorprende cuando demuestran que es aproximadamente del 70%.

En cuanto a la probabilidad condicionada, se han realizado diferentes investigaciones para buscar errores y ver cuál es la forma más adecuada de tratarlos para que el alumno consiga superarlos.

Assumpta Estrada Roca y Carmen Díaz Batanero, han realizado el estudio “*Errores en el cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada en profesores en formación*” (Estrada, A. et al., 2007), y han encontrado que la mayor parte de éstos ocurren porque se analizan frecuencias absolutas, mientras deberían analizarse frecuencias relativas; o también, porque no se diferencia entre P(A/B) de P(B/A), lo que se denomina “**falacia de la condicional traspuesta**”, e incluso porque confunden un suceso con su complementario.

Carmen Batanero, J. Miguel Contreras y Carmen Díaz, analizaron en “*Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza*” (Batanero, C. et al., 2012), los diferentes errores y dificultades que se encuentran los alumnos al enfrentarse con la probabilidad condicional. Encontraron diferentes sesgos como son:

- La “**falacia del jugador**” por la que se cree que la probabilidad de que ocurra un suceso es función de lo que ha pasado anteriormente.
- Pensar que para que dos sucesos sean independientes deben pertenecer a experimentos diferentes.
- Problemas con la condicionalidad cuando se invierte el eje del tiempo lógico, “**falacia del eje temporal**”. Es decir, si se sacan dos cartas de una baraja, responden mejor cuando la pregunta es sobre la probabilidad de sacar una determinada carta en la segunda extracción sabiendo lo que se ha obtenido en la primera, que viceversa. Esto es, qué probabilidad hay de haber sacado una determinada carta en la primera extracción sabiendo lo que se ha sacado en la segunda.
- “**Falacia de la condicional transpuesta**”, ya explicada anteriormente.
- “**Falacia de la conjunción**”, cuando se cree que es más probable que ocurran dos sucesos a la vez, que cada uno de ellos por separado. Suele ocurrir cuando uno de los sucesos tiene una probabilidad mucho mayor que la del otro, por ejemplo, creer que es más probable “ser joven e ir a la discoteca”, que simplemente ser joven.
- No percibir el experimento compuesto como una serie de experimentos simples sucesivos, y al sacar una carta de una baraja, no consideran dos experimentos diferentes el palo y la figura.

En el caso de la resolución de problemas bayesianos, Carmen Díaz e Inmaculada de la Fuente comprobaron en “*Dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes. Un estudio exploratorio en estudiantes de psicología*” (Díaz, C. et al., 2007), que se incurría en errores en diferentes partes del proceso de resolución, entre otros en los siguientes:

- **Falacia de las tasas base**. Ignoran la probabilidad a priori del suceso en la población en la toma de decisiones en problemas que involucran la probabilidad inversa. Es decir, si se plantea que la probabilidad de que un ladrón sea rubio es el 25% y un testigo que le ha visto es fiable al 90%, se toma como probabilidad de que el testigo sea rubio el 90%, sin tener en cuenta la tasa base (25% de probabilidad de que el ladrón sea rubio).

- Al utilizar tablas de doble entrada, se producían errores al confundir probabilidad condicional y total. Lo cual no ocurría cuando se utilizaban árboles. Aunque en ambos casos se daba la **falacia de la condicional traspuesta**.
- El manejo de datos en formato de frecuencias absolutas provocaban menos errores que en formato de frecuencias relativas.

En el caso de la estadística, Robert Delmas, Joan Garfield, Ann Ooms, Beth Chance en ñ*Assessing students***ô** *conceptual understanding after a first course in statistics*ò (Delmas, R. et al. 2006) detectaron diferentes errores:

- En el diseño de la recogida de datos. Creer que realizar una recogida de datos aleatoria reduce el error de muestreo.
- En la estadística descriptiva. Creer que cuantos más datos tiene un gráfico estadístico, mayor es la desviación de los datos.
- En los gráficos estadísticos. Incurrían en errores al analizar estadísticos, como por ejemplo que una distribución con una mediana mayor que una media estaba sesgada hacia la izquierda.
- Interpretación de diagramas de cajas.
- En distribuciones normales. Se tiende a apoyar las respuestas a diferentes preguntas en distribuciones simétricas, sin tener en cuenta que pueden estar sesgadas, y dentro de éstas, la más utilizada es la distribución normal.
- Estadística bidimensional. No se realiza bien la extrapolación con diagramas de dispersión.
- Variabilidad del muestreo. No distinguir bien qué tipo de variable se ajusta mejor a un muestreo, y cómo inferir resultados de la muestra a la población.
- Intervalos de confianza. Creer que el nivel de confianza corresponde con el porcentaje esperado de valores del muestreo válidos en el intervalo de confianza.

Silvia del Puerto, Silvia Seminara y Claudia Minnaard, en ñ*Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística Descriptiva*ò, (Del Puerto, S. et al., 2007) detectaron entre los errores más frecuentes:

- Confundir frecuencia absoluta y acumulada
- Confundir variabilidad absoluta y relativa
- Confundir desvío estándar con varianza, comparando dos distribuciones utilizando el desvío estándar, sin tener en cuenta que las medias son distintas.
- Confundir estadísticos de tendencia central, y aplicar algunas propiedades de la suma y de la multiplicación que no se cumplen, por ejemplo, en el caso de la media.

Al igual que había comprobado Curcio en 1989, ellas también corroboraron que los alumnos incurren en errores de comprensión de los gráficos, sobre todo cuando tienen que realizar inferencias y predicciones con los datos representados.

2.6.- FENOMENOLOGÍA

Según Freudenthal (1905-1990), impulsor de la fenomenología didáctica, los diferentes conceptos o estructuras matemáticas, sirven para organizar los fenómenos o contextos en los que aparecen. Dichos fenómenos y contextos, pertenecen a la vida real y, por ello, su aprendizaje es más fácil si se apoya en las situaciones en las que ocurren o a las que dan respuesta.

Como explica Luis Puig, en su ñ*Análisis fenomenológico*ò (Puig, L., 1997), la estadística recoge información cuantitativa y la organiza para que pueda ser comparada. Los alumnos tienen al alcance contextos en los que se utiliza ésta, como son los medios de comunicación. Estos elementos forman parte de las experiencias del alumno y le permiten comprender mejor los conceptos y estructuras estadísticas.

En este trabajo se va a realizar un análisis más exhaustivo de los contextos en los que aparece la probabilidad, ya que la experimentación que en él se analiza versa sobre contenidos probabilísticos.

En la clasificación que se recoge a continuación, se enumeran los diferentes contextos a los que la probabilidad puede dar respuesta, y se explica alguno de los problemas tipo que se pueden encontrar en dichas situaciones:

- ***Situaciones de reparto justo***, en las que se quiere saber cuál es la forma más justa de realizar un reparto. Por ejemplo, como se apuntó en el apartado *2.2*, hay diferentes problemas a lo largo de la historia en los que se quiere saber cómo repartir las apuestas realizadas en un juego cuando éste se interrumpe antes de llegar al final.

Un problema tipo sería: Dos jugadores apuestan 10 euros a un juego que consiste en lanzar una moneda y anotar quién saca cara y quién saca cruz. El ganador será quién consiga antes 5 caras. Pero ocurre un problema, y deben parar antes de que ninguno de los jugadores haya conseguido cinco caras, ya que el jugador A había obtenido 2 caras y el B, 3. ¿Cómo se repartiría el dinero apostado para que dicho reparto sea justo?

- ***Situaciones de toma de decisiones***, en las que hay que realizar un cálculo de riesgos y evaluar la esperanza, para conocer si se trata de un juego justo. En estas situaciones se quiere conocer qué decisión es la más conveniente, sabiendo el riesgo que uno asume al tomarla.

Un problema tipo sería: Con las nuevas sanciones a las compañías aéreas por overbooking, la compañía AirChance deberá indemnizar con 500 ú a un viajero cuando no pueda volar. En un vuelo Santander-Londres, en el que hay disponibles 150 asientos por un precio de 100ú, se sabe que el 95% de los viajeros que compran el billete llegan al aeropuerto con intención de volar, antes de la hora límite para embarcar. Si fueras responsable de la compañía, ¿venderías más de los 150 asientos, sabiendo que el coste del vuelo le supone a la compañía 10.000 ú?

- ***Situaciones médicas en las que se produce la propagación de una enfermedad***, y se pretende conocer cuál será el riesgo de que una población contraiga dicha enfermedad.

Un problema tipo sería: Sabiendo que la probabilidad de contagio de la gripe aviar sigue una distribución normal de desviación típica 10, ¿qué población de aves debería haber para garantizar un error de estimación de la media no superior 0,25 con un nivel de confianza del 95%?

- ***Situaciones en las se formulan y/o verifican conjeturas, utilizando la probabilidad condicionada.*** Es decir, sabiendo que ha ocurrido un suceso, se busca saber cuál es la probabilidad de que haya sucedido otro.

  Un problema tipo sería: En una empresa se ha hecho un estudio y se sabe que tiene una probabilidad del 3% de sufrir un incendio. Se coloca un sistema de seguridad que tiene los siguientes condicionantes: la alarma suena el 95% de las veces que hay un incendio, pero se sabe, que el 2% de las veces que suena no hay incendio. ¿Qué probabilidad hay de que acudan los bomberos porque ha sonado la alarma y que no haya fuego?

- ***Situaciones en las que se pretende predecir lo que ocurrirá, basándose en* distribuciones *de probabilidad.***

  Un problema tipo sería: Un alumno tiene un examen mañana y sabe que si el primer metro que coge para ir al instituto tiene un retraso de más de 45 segundos, no podrá realizar el trasbordo que le llevará a tiempo para hacer el examen. Si el retraso medio del metro es de 43 sg, con una desviación típica de 3sg. ¿Qué probabilidad hay de que pueda hacer el examen?

3.- INVESTIGACIÓN

3.1.- OBJETIVOS DE LA EXPERIMENTACIÓN

A la hora de plantear este trabajo fin de máster, no se fijaron de manera concreta las líneas de investigación que se realizarían. Para llegar al punto en el que nos encontramos ahora, antes se ha desarrollado un estudio didáctico de la disciplina, lo que ha implicado la aparición de muchos interrogantes, gran parte de los cuales corresponden al apartado 2.5 sobre errores y dificultades en el razonamiento estocástico. Ellos serán el foco de atención en la experimentación que planteamos.

El aprendizaje de la estadística y la probabilidad en la educación secundaria plantea varios retos, no todos diferentes de los de otros contenidos de la materia de matemáticas, pero sí tiene una serie de connotaciones que lo hacen distinto. En un curriculum mayoritariamente determinista, el estudio de los fenómenos aleatorios genera conflictos con el modo de proceder dominante e implica una serie de dificultades específicas.

Se ha comentado en apartados anteriores el gran interés que tiene didácticamente conocer cuáles son los errores y dificultades que encuentra el estudiante al aprender una materia. En el caso del razonamiento estocástico, éstos cobran especial relevancia, ya que los contenidos de estadística y probabilidad están vinculados a creencias personales sobre el azar y la incertidumbre; dichas creencias frecuentemente están alejadas del tratamiento científico propio del tema en el contexto educativo. Por tanto, nuestro reto no es únicamente encontrar cuáles son los obstáculos a los que se enfrentan los alumnos, que ya han sido ampliamente estudiados y experimentados por otros autores; sino conocer los matices que explican esos impedimentos.

Al ser muy amplio el análisis de errores tanto en probabilidad como en estadística, el presente trabajo se ha centrado en la primera, y aun así, para que la investigación fuese viable, por condicionantes de espacio y tiempo, se ha detallado sólo el estudio de algún error en particular, como veremos más adelante.

Por todo lo anterior, se han establecido como objetivos de la experimentación los siguientes:

- Comprobar que los alumnos incurren en unos determinados errores al aprender probabilidad.

  El error que se pretende detectar es la no aplicación de la regla de Laplace a la hora de comparar la probabilidad de un mismo suceso en experimentos o situaciones distintos.
- Verificar que el alumno utiliza diferentes estrategias para comparar probabilidades entre experimentos, algunas de ellas erróneas porque no tienen en cuenta la relación entre casos favorables y casos posibles. Comprobar si estas estrategias dependen del tipo de datos y del contexto del problema.
- Examinar si la aparición de dichos errores depende en mayor o menor medida del tipo de datos que se aportan en el enunciado del problema.
- Relacionar la aparición de los errores con el contexto en el que se plantea el problema.

3.2.- HIPÓTESIS Y VARIABLES DE LA EXPERIMENTACIÓN

La hipótesis que se pretende validar es:

En un aula de educación secundaria, en la que los alumnos tienen conocimientos previos de probabilidad, los errores en los que incurren dichos alumnos al resolver varios problemas de razonamiento estocástico no son independientes de cómo se aportan los datos ni del contexto en el que se plantean.

Las variables que se han tenido en cuenta son:

- En cuanto a los errores.
  - Los alumnos incurren en errores al comparar la probabilidad de que ocurra un suceso determinado en experimentos diferentes, porque no tienen en cuenta el número de casos favorables entre casos posibles, sino que aplican estrategias que no evalúan dicha proporción.
- En cuanto al tipo de datos que aparecen en los problemas.
  - Datos absolutos. Cuando se dan valores que corresponden a totales.

Por ejemplo, el número total de bolas rojas que hay en una urna.

- Datos relativos. Cuando se dan los datos indicando la relación porcentual entre una parte y el total. Por ejemplo, el porcentaje de móviles defectuosos.

- En cuanto al contexto en el que se plantean los problemas. Se han propuesto tres contextos para ver qué diferencias encuentran los alumnos a la hora de resolver problemas vinculados a cada uno de ellos.
  - Cotidiano del alumno. Relacionado con las actividades diarias de los alumnos (aficiones, actividades propias de la edad).
  - Científico. Relacionado con actividades que tengan que ver con el conocimiento científico (astronomía, sociología, medicina).
  - Matemático. Relacionado con situaciones más abstractas y académicas, en las que los problemas no están contextualizados.

    Los dos primeros -cotidiano y científico- se han elegido porque se contemplan en PISA como situaciones en las que el alumno manifiesta su competencia matemática. En el primero son situaciones muy cercanas al alumno y, por el contrario, en el segundo se alejan mucho de su cotidianidad. El tercero -matemático- se propone como contraste con los otros dos, al ser un contexto más abstracto pero dominante dentro del aula, y por tanto, con el que están más familiarizados los alumnos.

3.3.- POBLACIÓN Y MUESTRA

La población sobre la que se ha realizado la investigación es la de los alumnos del 2º curso de Bachillerato de un Instituto de Educación Secundaria de Cantabria que cursan Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II.

El centro es en el que he realizado las prácticas del máster, y el curso elegido es el más adecuado a los propósitos de este trabajo al tener los alumnos conocimientos previos suficientes de probabilidad para poder elaborar el cuestionario, sin necesitar unas clases previas.

Los cuestionarios han sido realizados por la totalidad de ellos, por lo que la muestra coincide con el número de alumnos, que es de 21.

3.4.- ENFOQUE METODOLÓGICO

Lo que se pretende con la investigación es conocer las dificultades que tienen los alumnos al enfrentarse a un tipo de razonamiento en el que tienen que poner en funcionamiento métodos heurísticos específicos para esta rama de las matemáticas. Para ello se ha preparado un cuestionario con 6 items de probabilidad en los que los alumnos muestran el tipo de razonamiento que realizan.

Aunque los estudiantes no han comenzado este curso a trabajar contenidos de probabilidad en el momento en el que se realiza el cuestionario, sí que los han trabajado en cursos anteriores. Por lo tanto, los conceptos sobre los que versan los ítems se han tratado anteriormente, siendo éstos muy básicos. Esta distancia en el tiempo entre la última vez que han estudiado los contenidos y la realización del cuestionario, favorece la veracidad de los resultados, ya que las respuestas son concebidas desde el razonamiento matemático del alumno, sin buscar analogías con problemas similares que hayan podido resolver. De esta manera los sesgos aparecerán más fluidamente y no serán tapados por la realización rutinaria de ejercicios semejantes.

Las preguntas del cuestionario son de respuesta corta, pero se incita al alumno a que las justifique razonadamente. Se le pide que haga todos los cálculos en las hojas que se le entregan y que expliquen todas las suposiciones que crean necesarias. No se responde a preguntas durante la realización del cuestionario, y las respuestas se recogen de forma anónima.

3.5.- CUESTIONARIO Y FUNDAMENTACIÓN

El instrumento utilizado para la investigación, como se ha expuesto anteriormente, es un cuestionario de 6 items, que se muestra y fundamenta a continuación:

ITEM 1. URNAS. Contexto: Matemático / Tipo de datos: Absolutos.

Tenemos dos urnas. En la urna nº1 hay 4 bolas rojas, 2 azules y 1 verde. En la urna nº2 hay 6 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes. Se saca una bola de *cada urna sin mirar. ¿De qué urna es más probable sacar una bola roja?*

Los problemas en los que aparecen urnas son muy comunes para trabajar la probabilidad y los alumnos están muy familiarizados con ellos. Es una situación sencilla y no necesitan hacer suposiciones. Al darse los datos en valores absolutos se quiere ver si el alumno realiza diferentes estrategias de comparación para decir cuál tiene más probabilidad, si aplica la regla de Laplace o simplemente compara valores absolutos, incurriendo en errores.

ITEM 2. DADOS. Contexto: Cotidiano / Tipo de datos: Absolutos.

*El juego **ñ**lanza par**ò**consiste en lanzar un dado, y gana el que saque par. Se puede elegir para jugar un dado cúbico (que tiene seis caras numeradas del 1 al 6) o un dado icosaédrico (que tiene veinte caras numeradas del 1 al 20). ¿Qué dado elegirías para jugar?*

Este problema está planteado en un contexto más cercano para el alumnado, que está muy habituado a jugar utilizando dados y tiene muy interiorizado cómo se gana, lo que es un aliciente. Por otro lado, los datos no están dados de forma explícita, sino que el alumno tiene que componer los elementos del espacio muestral. Se pretende comprobar si, al ser un contexto más cercano, varía la cantidad de errores que se realizan y de qué tipo son éstos.

ITEM 3. AFLATOXINA. Contexto: Científico (médico) / Tipo de datos: Absolutos.

El Ministerio de Sanidad está haciendo una investigación sobre la incidencia en la población de ciertas grasas en la aparición de cánceres pancreáticos. Una de estas grasas es la aflatoxina. Cuando en la sangre hay un contenido elevado de esta grasa, puede provocar cáncer de *páncreas. Para llevar a cabo la investigación se hacen unos análisis a toda la población de dos pueblos pequeños de diferentes provincias, Villanueva de Urraca y Sant Feliu dôAnoia. Los resultados de los análisis son los siguientes:*

	Habitantes con la aflatoxina alta	*Habitantes con la aflatoxina baja*
Villanueva de Urraca	*50*	*300*
Sant Feliu dôAnoia	*75*	*450*

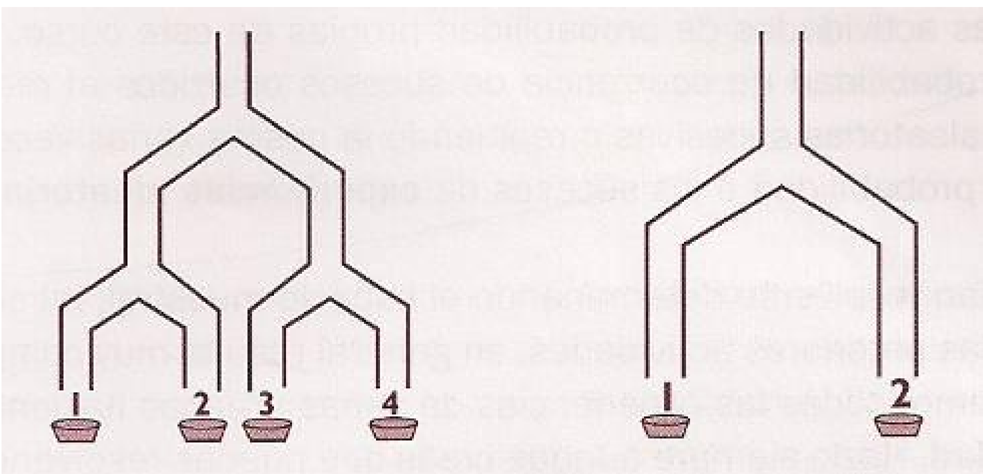
Si fuéramos a esos pueblos, ¿en cuál de los dos sería más probable que la primera persona que encontráramos tuviera la aflatoxina alta?

Aunque los datos que se aportan para que el alumno diga en qué pueblo es más probable encontrar una persona con la aflatoxina alta son sencillos, el enunciado contiene una serie de información que está muy alejada del día a día del alumno. De esta forma, se pretende estudiar si esta información provoca que el alumno yerre más al dar una respuesta, o si es indiferente.

ITEM 4. CIRCUITOS. Contexto: Matemático / Tipo de datos: Porcentuales.

Tenemos dos circuitos por los que lanzaremos una bola para observar en qué cuenco cae.

A B



Si lanzamos una bola por A y otra por B, ¿en cuál de los dos circuitos es más probable que la bola caiga en un cuenco con número impar? En *ambos circuitos, la probabilidad de que en cada bifurcación la bola tome uno de los caminos u otro es 0,5.*

Al igual que el problema de las urnas, éste está contextualizado en situaciones que son familiares para el alumno (circuitos con bifurcaciones). Pero, al no tener datos absolutos, sino relativos, se quiere conocer si se producen errores por no aplicar estrategias multiplicativas. También se quiere estudiar qué estrategias de comparación se generan al presentar datos relativos (probabilidad del 0,5).

ITEM 5. MÓVILES. Contexto: Cotidiano / Tipo de datos: Absolutos y relativos.

Un alumno del IES El Astillero quiere comprarse un móvil. En la tienda le ofrecen tres marcas que tienen el mismo precio, la misma forma y las mismas prestaciones. Pero el alumno sabe que de la primera marca se vendieron el mes pasado 500 móviles y salieron 5 defectuosos, de la segunda marca se vendieron 900 y dos de cada 100 dio problemas, y de la tercera marca se vendieron 750 y 7 de ellos salieron defectuosos. ¿De qué marca debería el alumno comprar el móvil para que la probabilidad de que tenga algún defecto sea menor?

El contexto en el que se sitúa este problema es muy cercano para el alumno, al igual que el de los dados, pero la aportación de datos es diferente, ya que aquí se dan datos relativos, con lo que la comparación es más directa. Al ser una situación muy familiar se quiere ver si la forma en que se dan los datos influye en que se incurra en más errores, o es indiferente porque están muy habituados a situaciones similares.

ITEM 6. MÉDICOS. Contexto: Científico (demográfico) / Tipo de datos: Relativos.

En Cantabria, que tiene unos 600.000 habitantes, el porcentaje de médicos es de 1 por cada 200 habitantes, mientras que en Andalucía, que tiene unos 8.500.000 habitantes, el porcentaje de médicos es de 1 por cada 500 habitantes. Si cogemos el censo de ambas Comunidades

Autónomas y miramos la profesión de uno de sus habitantes elegido al azar, ¿en qué comunidad es más probable que ese habitante sea médico?

Quizá en este problema es en el que sea más rápida la comparación por el tipo de datos que contiene, pero se quiere ver qué errores provoca que el contexto sea científico y si les despista este contexto porque lo vinculan más a su vida académica que a las situaciones cotidianas que viven fuera del aula.

Se entregaron dos cuestionarios diferentes, uno por alumno. Dichos cuestionarios tenían los mismos ítems, pero el orden en el que aparecía cada uno era diferente:

- Cuestionario 1: ITEM1/ITEM5/ITEM4/ITEM2/ITEM3/ITEM6
- Cuestionario 2: ITEM6/ITEM2/ITEM1/ITEM4/ITEM3/ITEM5

3.6.- RESULTADOS

En el Anexo 2 se recoge la transcripción de las respuestas dadas por los 21 alumnos. En este apartado se presenta el análisis realizado sobre dichos resultados, para lo cual se han establecido tres criterios:

- Respecto respuesta correcta- respuesta con error. Se recogen los resultados atendiendo únicamente a la respuesta dada por los alumnos, dividiéndose éstas en correctas o con error.
- Respecto a la realización de cálculos para justificar la respuesta. Algunas respuestas van acompañadas de cálculos que la refuerzan. En estos cálculos se pueden detectar los errores en los que el alumno incurre y comparar si estos se producen en mayor o menor medida dependiendo del tipo de datos del problema o del contexto al que está vinculado.
- Respecto a la estrategia utilizada por el alumno. Se han revisado los procedimientos que han utilizado los alumnos para llegar a la respuesta final. Para ello se han tenido en cuenta los cálculos efectuados (si se han realizado) y los comentarios realizados. De aquí se obtiene información útil para conocer cómo el alumno resuelve el problema, y si ésta depende de

su contextualización y del tipo de datos que el problema aporta. Además, se obtiene información sobre el modo en que el alumno justifica una respuesta incorrecta.

3.6.1.- Respecto del criterio respuesta correcta-respuesta con error.

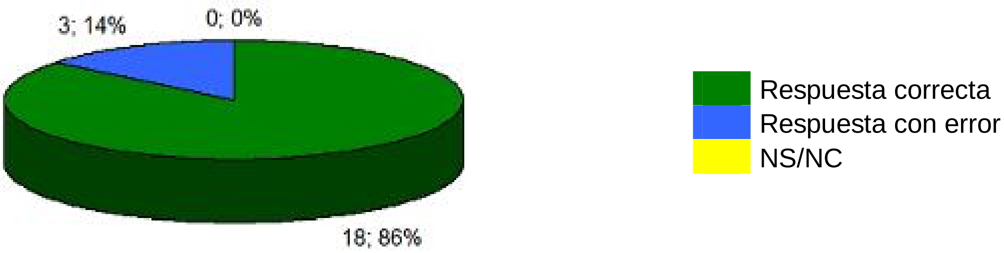
Las respuestas obtenidas fueron las siguientes:

		DATOS ABSOLUTOS									DATOS RELATIVOS								
		Urna			Dados			Aflatoxina			Circuito			Móviles			Médicos		
		Co	Err	NS NC	Co	Err	NS NC	Co	Err	NS NC	Co	Err	NS NC	Co	Err	NS NC	Co	Err	NS NC
ALUMNO 1	3-3-0	x				x			x			x		x			x		
ALUMNO 2	5-1-0	x			x				x		x			x			x		
ALUMNO 3	2-4-0		x			x			x			x		x			x		
ALUMNO 4	2-3-1		x		x				x		x				x				x
ALUMNO 5	2-4-0		x			x			x			x		x			x		
ALUMNO 6	4-1-1	x			x			x				x				x	x		
ALUMNO 7	4-1-1	x			x			x				x				x	x		
ALUMNO 8	2-3-1	x				x			x			x				x	x		
ALUMNO 9	4-1-1	x				x		x				x		x			x		
ALUMNO 10	3-3-0	x				x			x			x		x			x		
ALUMNO 11	5-1-0	x			x			x			x			x				x	
ALUMNO 12	4-2-0	x				x			x		x			x			x		
ALUMNO 13	3-3-0	x				x			x			x		x			x		
ALUMNO 14	6-0-0	x			x			x			x			x			x		
ALUMNO 15	3-1-2	x			x				x		x					x			x
ALUMNO 16	4-2-0	x			x			x				x			x		x		
ALUMNO 17	5-1-0	x			x			x			x			x				x	
ALUMNO 18	4-2-0	x			x				x			x		x			x		
ALUMNO 19	5-1-0	x			x			x			x			x				x	
ALUMNO 20	6-0-0	x			x			x			x			x			x		
ALUMNO 21	6-0-0	x			x			x			x			x			x		

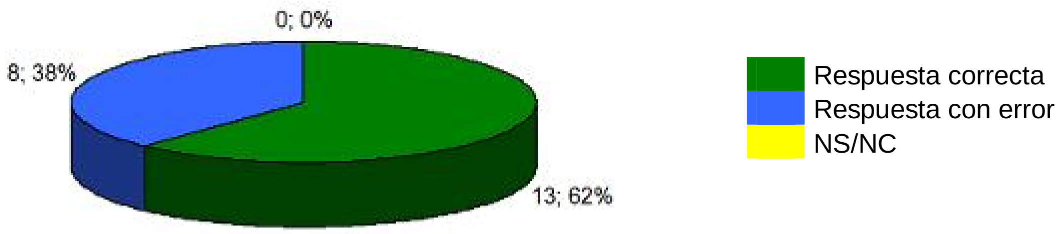
Co: Correcta /Err: Con error / NS/NC: No sabe, no contesta

A continuación se exponen unos gráficos en los que se representan los resultados por ITEM. Los datos que aparecen corresponden con las frecuencias absolutas y relativas de las respuestas.

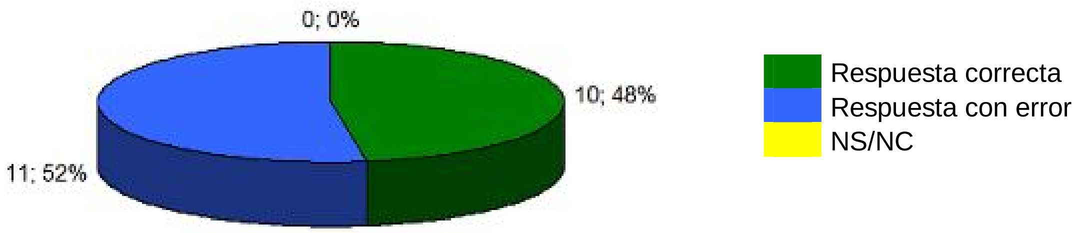
ITEM 1.- URNAS *(Contexto: Matemático / Tipo de datos: Absolutos)*



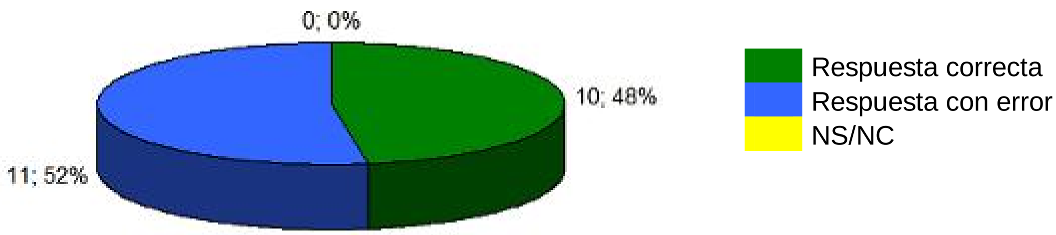
ITEM 2.- DADOS *(Contexto: Cotidiano / Tipo de datos: Absolutos)*



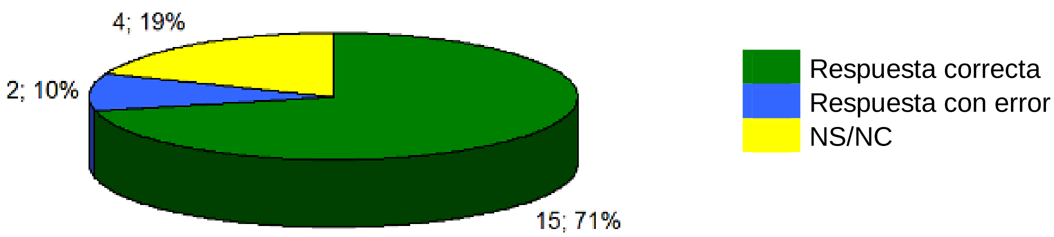
ITEM 3.- AFLATOXINA *(Contexto: Científico / Tipo de datos: Absolutos)*



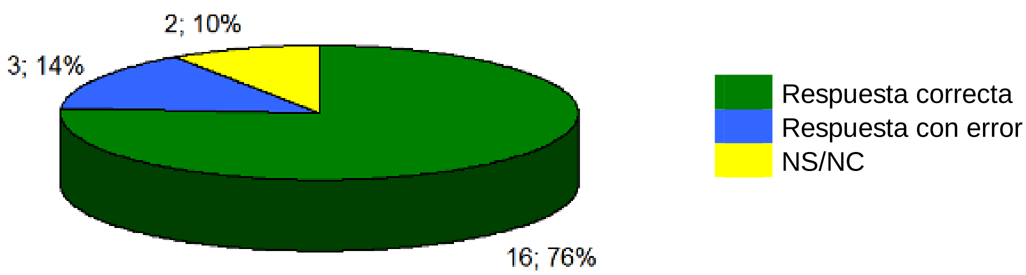
ITEM 4.- CIRCUITO *(Contexto: Matemático / Tipo de datos: Relativos)*



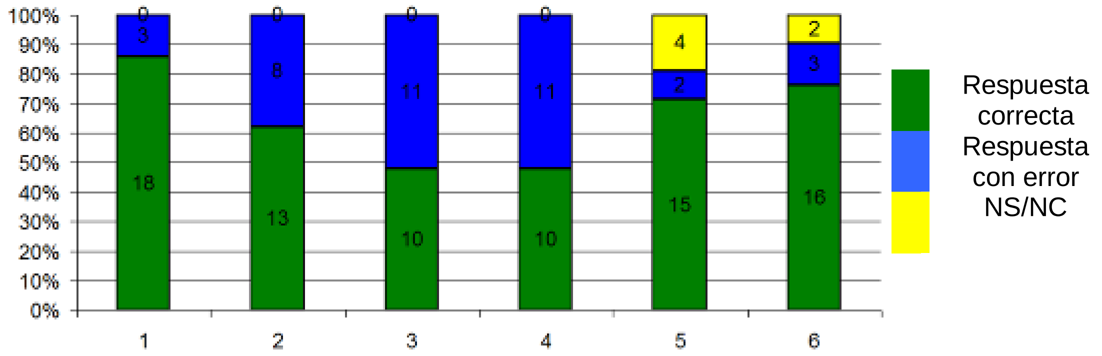
ITEM 5.- MÓVILES *(Contexto: Cotidiano / Tipo de datos: Relativos y absolutos)*



ITEM 6.- MÉDICOS *(Contexto: Científico / Tipo de datos: Relativos)*



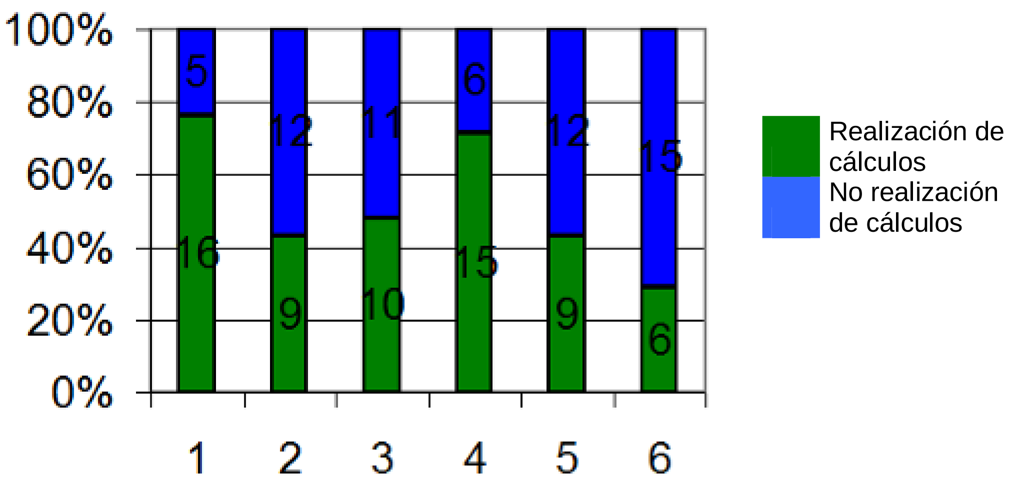
En resumen, los resultados para los 6 ítems respecto del primer criterio son los siguientes:



3.6.2.- Respecto del criterio realización de cálculos

En la siguiente tabla y gráfico, se recoge por ITEM la realización o no de cálculos que justifiquen la respuesta, independientemente de que ésta sea correcta o no lo sea.

ITEM	1		2		3		4		5		6	
Cálculos	16	76,2%	9	42,9%	10	47,6%	15	71,4%	9	42,9%	6	28,6%
No cálculos	5	23,8%	12	57,1%	11	52,4%	6	28,6%	12	57,1%	15	71,4%



3.6.3.- Estrategias de comparación

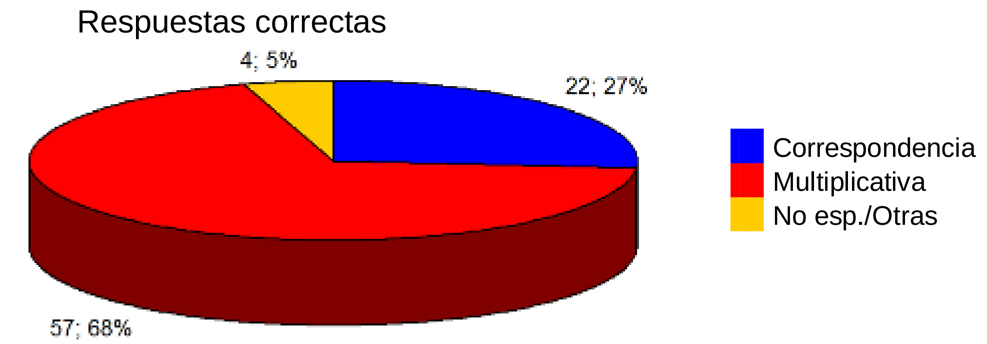
Uno de los objetivos de la investigación es detectar los errores en los que los alumnos incurren al resolver los problemas. Pero esto no es lo único que se pretende ver, sino también, cómo se ha llevado a cabo la comparación de probabilidades. Para estudiar las estrategias de comparación que se han efectuado, se ha tomado la clasificación que recogen Juan Jesús Ortiz, Carmen Batanero y José Miguel Contreras en su trabajo **ñ***Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo***ò** *(Ortiz, J. J. et al., 2012),* basada en el estudio que Piaget (1896-1980) e Inhelder (1913-1997) publicaron en 1951 y que son las siguientes:

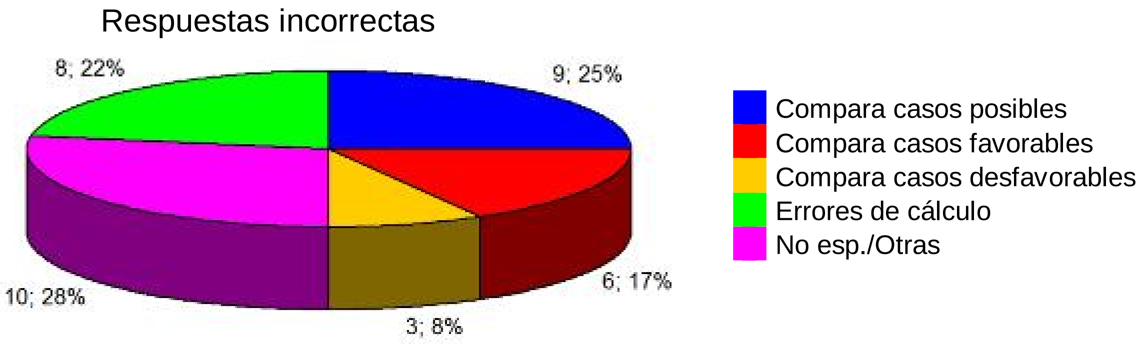
- Respuestas erróneas:
    - Comparación de casos posibles. Según los autores suizos, corresponde con el comienzo de la etapa preoperatoria. Se encuentran respuestas como la del alumno 11 en el ITEM 6: ñEs más probable que sea de Andalucía porque son más habitantes y, por tanto, más médicosò.
    - Comparación del número de casos favorables. Corresponde con la etapa preoperatoria. Se encuentran respuestas como las del alumno 3 en el ITEM 1: ñDe la 2ª urna es más probable sacar una bola roja, ya que hay más bolas rojas que en la 1ªò.
    - Comparación del número de casos desfavorables. Etapa preoperativa. Respuestas como la del alumno 8 en el ITEM 3: ñEn Villanueva de Urraca. A simple vista diría Sant Feliu dõAnoia, ya que 75 personas tienen aflatoxina alta, pero si se compara con las personas que la tienen baja, en ese pueblo hay menor posibilidad de que la primera persona tuviera aflatoxina altaò.
- Respuestas correctas:
    - Estrategia de correspondencia. Establecen un criterio de proporcionalidad en una fracción. Etapa de las operaciones formales. Respuestas como la del alumno 2 en el ITEM 1: ñDaría igual qué dado elegir. Hay la misma proporción de caras pares en las dosò.
    - Estrategia multiplicativa. Compara dos fracciones, por lo que es más elaborada. Etapa de las operaciones formales. Respuestas como la del alumno 21 en el ITEM 5: ñDe la tercera marca puesto que el tanto por ciento de que salga defectuoso es menorò.

Según estas estrategias de comparación las respuestas de los diferentes ITEMs se clasifican en:

		ITEM 1		ITEM 2		ITEM 3		ITEM 4		ITEM 5		ITEM 6	
Respuesta	**Estrategia**	**Abs.**	**%**	**Abs.**	**%**	**Abs.**	**%**	**Abs.**	**%**	**Abs.**	**%**	**Abs.**	**%**
Correcta	Correspondencia	6	28,57	2	9,52	1	4,76	1	4,76	2	9,52	10	47,62
	Multiplicativa	12	57,14	10	47,62	9	42,86	7	33,33	12	57,14	7	33,33
	No especifica u otras	0	0,00	1	4,76	0	0,00	2	9,52	1	4,76	0	0,00
Incorrecta	Compara casos posibles	2*	9,52	3	14,29	1	4,76	3	14,29	0	0,00	1	4,76
	Compara casos favorables	2*	9,52	2	9,52	0	0,00	2	9,52	1	4,76	0	0,00
	Compara casos desfavorables	0	0,00	1	4,76	1	4,76	0	0,00	1	4,76	0	0,00
	No especifica u otras	0	0,00	0	0,00	3	14,29	5	23,81	0	0,00	2	9,52
	Errores de cálculo	1	4,76	1	4,76	6	28,57	0	0,00	0	0,00	0	0,00
NS/NC		0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	4	19,05	2	9,52

* Compara casos posibles y casos favorables.





3.7.- INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

A la vista de los resultados del cuestionario observamos que:

I. Si se analizan los resultados por contextos podemos comprobar que

a. En contexto matemático (ITEMs 1 y 4), incurren en menos errores cuando los datos están dados en frecuencias absolutas (ITEM 1).

b. En contexto cotidiano (ITEMs 2 y 5), el número de respuestas sin error es mayor cuando se dan los datos en porcentajes.

c. En contexto cientifico (ITEMs 3 y 6), ocurre lo mismo que en el contexto cotidiano: mayor porcentaje de respuestas sin error con datos en frecuencias relativas.

II. Cuando los datos no se dan explícitamente el procedimiento para llegar a la respuesta provoca más errores. Es decir, si el problema no aporta el valor absoluto de los casos favorables, desfavorables y posibles (como en el ITEM de las urnas), o no da su valor relativo, sino que el alumno tiene que configurar antes los elementos del espacio muestral (como en el ITEM de los dados), entonces el alumno incurre en más errores.

Es el caso del alumno 3, en el ITEM 2. Pone en abanico todos los valores que se pueden sacar al tirar cada uno de los dados y concluye que **ñ***Elegiría el 2º dado, ya que hay mayor probabilidad de que salga par al haber más números***ò**

III. Tanto cuando los datos se dan en frecuencias absolutas (ITEMs 1, 2 y 3), como en relativas (ITEMs 4, 5 y 6), el número de respuestas sin error es similar (en el primero 41 y en el segundo 42). La diferencia que denotan las respuestas al cuestionario es que cuando los datos son relativos, muchas veces el alumno no percibe que la respuesta está dada directamente en el enunciado y que no se necesita realizar ningún cálculo adicional (ocurre en varios alumnos al resolver el ITEM 6). Esta falta de comprensión de los datos, genera la realización de cálculos que en ocasiones induce a error.

*Es el caso del alumno 11, en el ITEM 6. Realiza los siguientes cálculos: 600000*1/200=3000 médicos en Cantabria; 8500000*1/500=17000 médicos en Andalucía; y concluye* **ñ***Es más probable que sea de Andalucía porque son más habitantes y, por tanto, más médicos***ò**

IV. En el caso de los datos absolutos, sobre todo en los ITEMs 1 y 2, varios alumnos exponen el espacio muestral antes de realizar algún cálculo o de dar una respuesta sin cálculos, pretendiendo, bien obtener más información de la que se da en el enunciado, bien ordenar los datos con los que se cuenta, facilitándoles el conteo de los datos para no incurrir en error.

Es el caso del alumno 6 del ITEM 2, que pone por un lado los casos *favorables y desfavorables (Dado de 20 Pares: 2,4,6,8,10,12,14,15,18,20 e Impares: 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19; Dado de 6 Pares: 2,4,6 e Impares: 1,3,5) y concluye* **ñ***Daría igual qué dado usar ya que ambas tienen el mismo número de caras pares que impares y la probabilidad por tanto es la misma.***ò**

V. Si se comparan los procedimientos de resolución en los diferentes contextos, se aprecia que en el matemático realizan más cálculos. En los otros dos, el tipo de respuesta que se da es más de ñsentido comúnò, no necesita estar apoyada en cálculos, sino en un razonamiento más verbal. En muchos casos al leer el enunciado saben a dónde llegar y, aunque hacen cálculos, son intrascendentes para justificar la respuesta: escriben lo que sabían antes de hacerlos.

Es el caso del alumno 1 en el ITEM 5, que realiza unas reglas de 3 para saber cuántos móviles hay defectuosos por cada 100 (que se da en el enunciado) y concluye: **ñ***La 3ª opción es la mejor, ya que hay menos probabilidad de que sea defectuoso.***ò**

VI. Cuando en el enunciado no aparecen datos numéricos, bien absolutos o relativos (ITEMs 2 y 4), independientemente del contexto en el que esté incluido el problema, las respuestas con errores se ven incrementadas. Cuando se aportan datos, realizan mejor las estrategias de comparación, con resultados positivos. En el caso del ITEM 3, en el que se tiene una tabla de contingencia, la interpretación es mejor al ser la proporcionalidad más visual.

VII. Continuando con la apreciación anterior, en los dos ITEMs (2 y 4), se utilizan más estrategias de comparación erróneas, como son comparar casos favorables o posibles.

Es el caso del alumno 7 del ITEM 4 que responde: **ñ***En el circuito B, la bola tiene un 50% de posibilidad de caer en el cuenco impar. Por otro lado, en el cuenco A, la probabilidad disminuye a ¼, ya que se tiene que bifurcar dos veces para ser impar.***ò**

VIII. Volviendo a la comparación entre ITEMs con datos absolutos y relativos, los alumnos realizan una justificación más amplia de su respuesta en el primero de los casos, mientras que con valores relativos es más pobre. Incluso quieren hacer cálculos que la apoyen, pero no son terminados o enredan más de lo que esclarecen, provocando que incurran en errores. Por lo que al final, optan por dar una respuesta menos razonada.

Por ejemplo, el alumno 5 en el ITEM 6 razona la respuesta, sin realizar cálculos, de la siguiente manera: **ñ***Es más probable que la persona que eligiésemos sea médico en Cantabria, porque su probabilidad es muy elevada comparándose con el número de habitantes que hay en cada comunidad autónoma***ò**

IX. Algunos alumnos conocen cuál es la respuesta sin realizar cálculos y la escriben. Pero al intentar razonarla, realizan estrategias de comparación erróneas que les hacen cambiarla. Por lo que intuitivamente saben hacia dónde ir, pero la necesidad de justificar la respuesta mediante una estrategia supone un obstáculo y les hace dudar.

Esto le ocurre al alumno 5 en el ITEM 1, que dibuja dos urnas con el número de bolas que contienen de cada color, y dice (erróneamente) que es en la urna 2 porque hay más bolas rojas (no compara la proporción con las totales), pero al darse cuenta de que hay también más bolas de otros colores, le hace dudar y razona: **ñ***Es más probable sacar una bola roja de la urna nº2 porque tiene más bolas de color rojo, pero también hay que tener en cuenta que hay más bolas de color verde y azul.***ò**

4.- CONCLUSIONES Y LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

Una vez que se ha realizado un análisis teórico de la enseñanza de la estadística y probabilidad, y que se ha desarrollado una investigación dentro de las aulas de secundaria, se concluye que:

1. La forma en que se presentan los datos en un problema de probabilidad condiciona el tipo de estrategias de resolución que el alumno desarrolla, siendo estas estrategias una de cada cuatro veces erróneas por no aplicar la regla de Laplace.
2. El alumno espera tener que realizar cálculos para resolver un problema, por lo que al encontrarse con un enunciado en el que la solución aparece explícitamente, obvia esta información y desarrolla un procedimiento de resolución distinto al evidente, que favorece la aparición del error porque su razonamiento se topa con dificultades que no había previsto.
3. Cuando el alumno se encuentra con problemas en contextos no matemáticos, es capaz de razonar su respuesta verbalmente, sin apoyarse en un lenguaje simbólico u operacional. Mientras que en el contexto matemático esa argumentación se respalda con cálculos. Es decir, que el problema esté contextualizado (personal o científico), favorece que el alumno razone verbalmente la respuesta, sin apoyarse tanto en cálculos como en el contexto matemático, pero eso no implica que no cometa errores, sino que también utiliza estrategias de comparación erróneas, incluso más que en el contexto matemático.
4. Cuando en el enunciado del problema aparecen los datos explícitamente, el alumno incurre en menos errores que cuando debe deducirlos. Para ello, utiliza procedimientos que le llevan a estrategias de comparación erróneas. Es el caso en el que tiene que configurar el espacio muestral antes de aplicar una estrategia de comparación. Esta tarea previa, que en un principio podría pensarse que va a favorecer un razonamiento correcto, le lleva a emplear estrategias erróneas, y a no aplicar la Regla de Laplace.
5. Cuando los datos se dan como valores absolutos hay más respuestas correctas en contexto matemático que cuando se dan en valores relativos.

Mientras que en los contextos personal y científico ocurre lo contrario: se dan más respuestas con error cuando los datos son absolutos.

En conclusión, la hipótesis de partida se ratifica, ya que los errores en los que incurren los alumnos al resolver problemas de razonamiento estocástico, dependen de cómo se dan los datos y del contexto en el que se plantean.

Como se observa en las respuestas, aunque los contenidos sean los mismos, los alumnos tienen más dificultad al abordar cuestiones contextualizadas (personal y científico) que en contexto matemático (en este realizan más cálculos justificativos, el enunciado no les despistaé). Esta conclusion nos sirve para interpretar los resultados de los estudiantes en las pruebas PISA, en las que no se evalúa su conocimiento matemático sino cómo lo aplican. Por esto debería realizarse una reflexión de cómo hay que enseñar matemáticas en general, y probabilidad en particular, poniendo el foco en las herramientas con las que hay que dotar al alumno para que pueda aplicar sus conocimientos en contextos reales y no sólo matemáticos.

La investigación que se ha realizado no pretende sacar unas conclusiones irrefutables, sino incitar a la reflexión a quién lo lea y quizá abrir futuras líneas de investigación en las que a partir de unos resultados obtenidos que apuntan hacia determinadas hipótesis, ampliar la exploración introduciendo nuevas variables o supuestos, y corroborarlas o refutarlas. Estas líneas podrían ser:

- Comprobar que los datos no dados explícitamente incitan a más errores en todos los contextos.
- Explicar por qué en contextos matemáticos justifican las respuestas mediante cálculos y en otros contextos no lo necesitan.
- Explorar qué influencia tiene en estos resultados el tipo de enseñanza que reciben los estudiantes en el ámbito de la probabilidad.

5.- BIBLIOGRAFÍA

Batanero, C., Contreras, J. M., Díaz, C. (2012) Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. Revista digital Matemática, Educación e Internet 12(2).

Batanero, C., Gómez, E., Serrano, L., Contreras, J. M. (2012) Comprensión de la aleatoriedad por futuros profesores de Educación Primaria. Journal of Research in Mathematics Education,1(3), 222-245

Boyer, C. (2007) Historia de la matemática. Alianza editorial.

Corbalán, F., Sanz, G. (2010) La conquista del azar. RBA.

Del Puerto, S., Seminara, S., Minnaard, C. (2007) Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística Descriptiva. Revista Iberoamericana de Educación, nº 43/3.

Delmas, R., Garfield, J., Ooms, A., Chance, B., (2006) Assessing studentsô conceptual understanding after a first course in statistics. Annual Meetings of The American Educational Research Association.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2007). Dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes. Un estudio exploratorio en estudiantes de psicología. Educación Matemática, 18(2), 75-94.

Duval R. (1999b). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. Proceedings of the 21th PME-NA Annual Meeting. México, pp. 3-26.

Estrada, A., Díaz, C. (2007) Errores en el cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada en profesores en formación. UNO 44, p 48-58.

Gonick, L., Smith, W. (2010) La estadística en comic. Ed. Zendrera Zariquiey.

Grima, P. (2010) La certeza absoluta y otras ficciones. RBA.

García, J. A. (2010) Historia de un problema: el reparto de una apuesta.

Ortiz de Haro, J. J., Mohamed, N., Serrano, L., Rodríguez, J. (2007) Competencias de futuros profesores de educación primaria en la asignación de probabilidades. Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XII Simposio de SEIEM. Badajoz.

Ortiz, J. J., Batanero, C., Contreras, J. M. (2012) Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo. Revista Latino Americana de Matemática Educativa, 15 (1), p64-91.

Ortiz, J. J., Batanero, C., Contreras, J. M. (2012). Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,15 (1): p 63-91.

Puerto, S., Seminara, S., Minnaard, C. (2007) Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística Descriptiva. Revista Iberoamericana de Educación, Nº 43/3 .

Puig, L. (1997) Análisis fenomenológico. Rico, L. (Coord). La educación matemática en la enseñanza secundaria, p. 61-94.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz de Haro, J. J. (1996) Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato, Suma, 22. p 43-50.

Van Dooren, Wim., De Bock, Dirk., Verschaffel, L. (2006) La búsqueda de las raíces de la ilusión de linealidad. Indivisa: Boletín de estudios e investigación, Nº. Extra 4, (Ejemplar dedicado a: VII Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA)), p. 115-138.

ANEXO 1

CONTENIDOS DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD EN EL CURRICULUM DE ESO Y BACHILLERATO

En este anexo se recogen los contenidos del bloque de Estadística y Probabilidad, así como los criterios de evaluación que se incluyen en el art. 4 del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, como en el Decreto 57/2007 del 10 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Cantabria. Así como, en el Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas, como en el Decreto 74/2008, de 31 de julio por el que se establece el Currículo del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria.

Se realiza una comparación de los contenidos y de los criterios de evaluación, apareciendo en negro los que coinciden para cada etapa tanto en la normativa autonómica como estatal, y en azúl lo que no está incluido en la estatal, pero sí en la autonómica.

Educación Secundaria Obligatoria

PRIMER CURSO

Contenidos

- Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.
- Reconocimiento y valoración de las matemáticas para interpretar y describir situaciones inciertas.
- Diferentes formas de recogida de información. Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia. Frecuencias absolutas y relativas.
- Diagramas de barras, de líneas y de sectores. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos.

Criterios de evaluación

6. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.

Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente. Se trata de evaluar, además, el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados, así como la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas tanto en soporte papel como digital.

7. Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica.

Se trata de valorar la capacidad para diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios y, en estos últimos, analizar las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces una experiencia aleatoria y hacer predicciones razonables a partir de los mismos. Además este criterio pretende verificar la comprensión del concepto de frecuencia relativa y, a partir de ella, la capacidad de inducir la noción de probabilidad.

SEGUNDO CURSO

Contenidos

- Diferentes formas de recogida de información. Organización de los datos en tablas. Frecuencias absolutas y relativas, ordinarias y acumuladas.
- Diagramas estadísticos. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos.
- Medidas de centralización: media, mediana y moda. Significado, estimación y cálculo. Utilización de las propiedades de la media para resolver problemas.
- Uso de la media, la mediana y la moda para realizar comparaciones y valoraciones.
- Uso de la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar los cálculos y generar los gráficos más adecuados.

Criterios de evaluación

6. Formular las preguntas adecuadas para conocer las características de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas informáticas adecuadas.

Se trata de verificar, en casos sencillos y relacionados con su entorno la capacidad de desarrollar las distintas fases de un estudio estadístico: formular la pregunta o preguntas que darán lugar al estudio, recoger la información, organizarla en tablas y gráficas, hallar valores relevantes (media, moda, valores máximo y mínimo, rango) y obtener conclusiones razonables a partir de los datos obtenidos. También se pretende valorar la capacidad para utilizar la hoja de cálculo, para organizar y generar las gráficas más adecuadas a la situación estudiada.

TERCER CURSO

Contenidos

- Necesidad, conveniencia y representatividad de una muestra. Métodos de selección aleatoria y aplicaciones en situaciones reales.
- Atributos y variables discretas y continuas.
- Agrupación de datos en intervalos. Histogramas y polígonos de frecuencias.
- Construcción de la gráfica adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado.
- Media, moda, cuartiles y mediana. Significado, cálculo y aplicaciones.
- Análisis de la dispersión: rango y desviación típica. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica.
- Uso de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones. Actitud crítica ante la información de índole estadística.
- Uso de la calculadora y la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar cálculos y generar las gráficas más adecuadas.
- Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral. Uso del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.
- Cálculo de probabilidades mediante la ley de Laplace. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.
- Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación.
- Uso de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes

contextos. Reconocimiento y valoración de las matemáticas para interpretar, describir y predecir situaciones inciertas.

Criterios de evaluación

6. Elaborar e interpretar informaciones estadísticas teniendo en cuenta la adecuación de las tablas y gráficas empleadas y analizar si los parámetros son más o menos significativos.

Se trata de valorar la capacidad de organizar, en tablas de frecuencias y gráficas, información de naturaleza estadística, atendiendo a sus aspectos técnicos, funcionales y estéticos (elección de la tabla o gráfica que mejor presenta la información), y calcular, utilizando si es necesario la calculadora o la hoja de cálculo, los parámetros centrales (media, mediana y moda) y de dispersión (recorrido y desviación típica) de una distribución. Asimismo se valorará la capacidad de interpretar información estadística dada en forma de tablas y gráficas y de obtener conclusiones pertinentes de una población a partir del conocimiento de sus parámetros más representativos.

7. Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica o como resultado del recuento de posibilidades, en casos sencillos.

Se pretende medir la capacidad de identificar los sucesos elementales de un experimento aleatorio sencillo y otros sucesos asociados a dicho experimento. También la capacidad de determinar e interpretar la probabilidad de un suceso a partir de la experimentación o del cálculo (Ley de Laplace), en casos sencillos. Por ello tienen especial interés las situaciones que exijan la toma de decisiones razonables a partir de los resultados de la experimentación, simulación o, en su caso, del recuento.

CUARTO CURSO

Opción A

Contenidos

- Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumnado.
- Análisis elemental de la representatividad de las muestras estadísticas.
- Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Uso de la hoja

de cálculo.

- Uso de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones.
- Experiencias compuestas. Uso de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades.
- Uso del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.

Criterios de evaluación

7. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, correspondientes a distribuciones discretas y continuas, y valorar cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.

Se trata de valorar la capacidad de organizar la información estadística en tablas y gráficas y calcular los parámetros que resulten más relevantes, con ayuda de la calculadora o la hoja de cálculo. En este nivel se pretende además que los alumnos tengan en cuenta la representatividad y la validez del procedimiento de elección de la muestra y analicen la pertinencia de la generalización de las conclusiones del estudio a toda la población.

8. Aplicar los conceptos y técnicas de cálculo de probabilidades para resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana.

Se pretende que los alumnos sean capaces de identificar el espacio muestral en experiencias simples y en experiencias compuestas sencillas, en contextos concretos de la vida cotidiana, y utilicen la Ley de Laplace, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia para calcular probabilidades. Se pretende, además, que los resultados obtenidos se utilicen para la toma de decisiones razonables en el contexto de los problemas planteados.

CUARTO CURSO

Opción B

Contenidos

- Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico.
- Análisis elemental de la representatividad de las muestras estadísticas.
- Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Análisis crítico

de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias.

- Representatividad de una distribución por su media y desviación típica o por otras medidas ante la presencia de descentralizaciones, asimetrías y valores atípicos. Valoración de la mejor representatividad, en función de la existencia o no de valores atípicos. Uso de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones.
- Técnicas de combinatoria: Variaciones, permutaciones y combinaciones.
- Uso de diversas técnicas combinatorias en la asignación de probabilidades.
- Experiencias compuestas. Uso de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades. Probabilidad condicionada.
- Uso del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.

Criterios de evaluación

5. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales en distribuciones unidimensionales y valorar cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.

En este nivel adquiere especial significado el estudio cualitativo de los datos disponibles y las conclusiones que pueden extraerse del uso conjunto de los parámetros estadísticos. Se pretende, además, que se tenga en cuenta la representatividad y la validez del procedimiento de elección de la muestra y la pertinencia de la generalización de las conclusiones del estudio a toda la población.

6. Aplicar los conceptos y técnicas de cálculo de probabilidades para resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana.

Se pretende que los alumnos sean capaces de identificar el espacio muestral en experiencias simples y en experiencias compuestas sencillas, en contextos concretos de la vida cotidiana, y utilicen la Ley de Laplace, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia para calcular probabilidades. Se pretende, además, que los resultados obtenidos se utilicen para la toma de decisiones razonables en el contexto de los problemas planteados.

Bachillerato

MATEMÁTICAS I

Contenidos

- Distribuciones bidimensionales. Relaciones entre dos variables estadísticas.
- Nubes de puntos. Correlación. Coeficiente de correlación.
- Regresión lineal. Rectas de regresión. Estimaciones.
- Estudio de la probabilidad compuesta, condicionada, total y a posteriori.
- Distribución de probabilidad de una variable discreta. Función de probabilidad. Cálculo e interpretación de la media, la varianza y la desviación típica. La distribución binomial. Cálculo de probabilidades.
- Distribución de probabilidad de una variable continua. La distribución normal. Tipificación de una variable con distribución normal. Manejo de tablas para el cálculo de probabilidades.
- Aproximación de una distribución binomial mediante la normal. Ajuste de un conjunto de datos a una distribución normal.
- Distribuciones binomial y normal como herramienta para asignar probabilidades a sucesos.

Criterios de evaluación

7. Asignar probabilidades a sucesos correspondientes a fenómenos aleatorios simples y compuestos y utilizar técnicas estadísticas elementales para tomar decisiones ante situaciones que se ajusten a una distribución de probabilidad binomial o normal.

En este criterio se pretende medir la capacidad para determinar la probabilidad de un suceso, utilizando diferentes técnicas, analizar una situación y decidir la opción más conveniente. También se pretende comprobar la capacidad para estimar y asociar los parámetros relacionados con la correlación y la regresión con las situaciones y relaciones que miden.

MATEMÁTICAS II

Contenidos

No tiene

Criterios de evaluación

No tiene.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES I

Contenidos

- Estadística descriptiva unidimensional. Tipos de variables. Métodos estadísticos. Tablas y gráficos. Parámetros estadísticos de localización, de dispersión y de posición.
- Distribuciones bidimensionales. Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervienen dos variables a partir de la representación gráfica de una nube de puntos. Grado de relación entre dos variables estadísticas. Medidas de correlación. Coeficiente de correlación: cálculo e interpretación.
- Regresión lineal. Método de los mínimos cuadrados. La recta de regresión lineal para hacer previsiones. Las dos rectas de regresión. Tablas de doble entrada. Extrapolación de resultados.
- Sucesos aleatorios. Espacio muestral. Sucesos simples y compuestos. Sucesos complementarios. Operaciones con sucesos.
- Asignación de probabilidades a sucesos. Ley de los grandes números. La regla de Laplace.
- Distribución de probabilidades de una variable discreta.
- Distribuciones de probabilidad binomial. Descripción. Cálculo de probabilidades en una distribución binomial. Ajuste de un conjunto de datos a una distribución binomial.
- Distribución de probabilidades de una variable continua.
- Distribuciones de probabilidad normal. Cálculo de probabilidades en distribuciones normales.
- La distribución binomial se aproxima a la normal. Ajuste de un conjunto de datos a una distribución normal.

Criterios de evaluación

6. Distinguir si la relación entre los elementos de un conjunto de datos de una distribución bidimensional es de carácter funcional o aleatorio e interpretar la posible relación entre variables utilizando el coeficiente de correlación y la recta de regresión.

Se pretende comprobar la capacidad de apreciar el grado y tipo de relación existente entre dos variables, a partir de la información gráfica aportada por una nube de puntos; así como la competencia para extraer conclusiones apropiadas, asociando los parámetros relacionados con la correlación y la regresión con las situaciones y relaciones que miden. En este sentido, más importante que su mero cálculo es la interpretación del coeficiente de correlación y la recta de regresión en un contexto determinado.

7. Utilizar técnicas estadísticas elementales para tomar decisiones ante situaciones que se ajusten a una distribución de probabilidad binomial o normal.

Se pretende evaluar si, mediante el uso de las tablas de las distribuciones normal y binomial, los alumnos son capaces de determinar la probabilidad de un suceso, analizar una situación y decidir la opción más adecuada.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Contenidos

- Profundización en los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes.
- Implicaciones prácticas de los teoremas: Central del límite, de aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números.
- Problemas relacionados con la elección de las muestras. Condiciones de representatividad. Parámetros de una población.
- Distribuciones de probabilidad de las medias y proporciones muestrales.
- Intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución binomial y para la media de una distribución normal de desviación típica conocida.
- Contraste de hipótesis para la proporción de una distribución binomial y para la media o diferencias de medias de distribuciones normales con desviación típica conocida.

Criterios de evaluación

5. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios simples y compuestos, dependientes o independientes, utilizando técnicas personales de recuento, diagramas de árbol o tablas de contingencia.

Se trata de valorar tanto la competencia para estimar y calcular probabilidades asociadas a diferentes tipos de sucesos como la riqueza de procedimientos a la hora de asignar probabilidades a priori y a posteriori, compuestas o condicionadas. Este criterio evalúa también la capacidad, en el ámbito de las ciencias sociales, para tomar decisiones de tipo probabilístico que no requieran la utilización de cálculos complicados.

6. Diseñar y desarrollar estudios estadísticos de fenómenos sociales que permitan estimar parámetros con una fiabilidad y exactitud prefijadas, determinar el tipo de distribución e inferir conclusiones acerca del comportamiento de la población estudiada.

Se pretende comprobar la capacidad para identificar si la población de estudio es normal y medir la competencia para determinar el tipo y tamaño muestral, establecer un intervalo de confianza para ε y p, según que la población sea Normal o Binomial, y determinar si la diferencia de medias o proporciones entre dos poblaciones o respecto de un valor determinado, es significativa. Este criterio lleva implícita la valoración de la destreza para utilizar distribuciones de probabilidad y la capacidad para inferir conclusiones a partir de los datos obtenidos.

7. Analizar de forma crítica informes estadísticos presentes en los medios de comunicación y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de los datos como de las conclusiones.

Se valora el nivel de autonomía, rigor y sentido crítico alcanzado al analizar la fiabilidad del tratamiento de la información estadística que hacen los medios de comunicación y los mensajes publicitarios, especialmente a través de informes relacionados con fenómenos de especial relevancia social.

ANEXO 2

TRASCRIPCIÓN DE LAS RESPUESTAS DEL CUESTIONARIO

ITEM 1. Contexto matemático. Valores absolutos.

Tenemos dos urnas. En la urna nº1 hay 4 bolas rojas, 2 azules y 1 verde. En la urna nº2 hay 6 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes. Se saca una bola de cada urna sin mirar. ¿De qué urna es más probable sacar una bola roja?

ALUMNO 1. No hace cálculos.

Respuesta: Es más posible sacar una roja en la nº1, porque hay más bolas rojas en proporción que en la urna 2.

ALUMNO 2.

Cálculos: 1ª urna 4/7; 2ªurna 6/12

Respuesta: En la primera urna ya que el número de bolas rojas es mayor que el número de bolas de otro color.

ALUMNO 3.

Cálculos: 1ª 4R,2A,1V: 7; 2ª 6R,4A,2V: 12

Respuesta: La 2ª urna es más probable sacar una bola roja, ya que hay más bolas y más de color roja que en urna 1ª.

ALUMNO 4.

Cálculos: 4/7 urna A, 6/12 urna B

Respuesta: De la urna (no pone nada) porque de cada 2 que saque 1 va a ser roja.

ALUMNO 5.

Cálculos: Dibuja unas urnas con el número de bolas

Respuesta: Es más probable sacar una bola roja de la urna nº2 porque tiene más bolas de color rojo, pero también hay que tener en cuenta que hay más bolas de color verde y azul.

ALUMNO 6.

Cálculos: No hace.

Respuesta: Lo más probable es la urna 1. Habría la misma probabilidad (creo, no lo sé) si la urna dos tuviese 6 rojas, 4 azules y 3 verdes.

ALUMNO 7.

Cálculos: Urna 1ª: 4/7 Urna 2ª: 6/12=1/2

Respuesta: Sumamos el total de bolas, y dividimos el número de bolas rojas de cada urna entre este total. Así nos da que en la primera urna hay una probabilidad mayor de obtener una bola roja.

ALUMNO 8.

Cálculos: Dibuja unas urnas con el número de bolas

Respuesta: En la urna 1 hay más posibilidades de que la bola sea roja, ya que de las 7 bolas que hay, 4 son rojas (más de la mitad). En la 2, hay 6 rojas de 12 bolas totales y es sólo el 50%.

ALUMNO 9.

Cálculos: Dibuja unas urnas con el número de bolas. En la urna nº1 1 pone 4/7 bola roja. En la nº2 pone 6/12 bola roja.

Urna nº1= 0,57

Urna nº2=0,5

Respuesta: Es menos probable sacar una bola de color roja en la urna número 2, ya que de 12 bolas 6 son de color rojo, es decir, un 50% de probabilidad de sacar bola roja en la urna 2 mientras que en la urna número uno, de cada 7 bolas, 4 son rojas, es decir, un 57% de probabilidad de que sea roja.

ALUMNO 10.

Cálculos: No hace.

Respuesta: De la 1 porque son menos bolas y el porcentaje de rojas respecto a los otros colores es mayor.

ALUMNO 11.

Cálculos:

1	2		
4r	6r	Urna 1	4/7
2a	4a	Urna 2	6/12
1v	2v		
7	12		

Respuesta: Es más probable sacarla de la urna 1, ya que, hay menos bolas que en la 2 y, más de la mitad son rojas.

ALUMNO 12.

Cálculos:

	4/7		*6/12*
7/7	*2/7*	*12/12*	*4/12*
	1/7		*2/12*

Respuesta: De la número uno porque el porcentaje de bolas rojas es mayor.

ALUMNO 13.

Cálculos:

1	*2*	
4r	*6r*	*4/7+2/7+1/7*
2a	*4a*	*6/12+4/12+2/12*
1v	*2v*	

Respuesta: De la urna nº1, ya que al haber menos bolas en total:7, hay una cantidad de bolas rojas de 4, por lo tanto es más probable sacar una bola roja que una de otro color.

ALUMNO 14.

Cálculos:

R 4/7
Urna 1 A 2/7
1/2 V 1/7

R 6/12
Urna 2 A 4/12
1/2 V 2/12

Respuesta: Es más probable de la urna 1, ya que 4/7 es mayor que 6/12, por lo tanto hay más probabilidad en la urna 1.

ALUMNO 15.

Cálculos: nº1 7 nº2 12

R 4/7 4/14
Urna 1 A 2/7 2/14
1/2 V 1/7 1/14

R 6/12 1/2 6/24 3/12
Urna 2 A 4/12 1/3 8/24 4/12
1/2 V 2/12 1/6 2/24 1/12

4/14+3/12=48/168+42/168 28,57%+25%

Respuesta: En la urna 1, el porcentaje es mayor.

ALUMNO 16.

Cálculos:

R 4/7
*Urna 1 A 2/7 1/2*4/7=4/14=0,28*
1/2 V 1/7

R 6/12
*Urna 2 A 4/12 ½*6/12=6/24=0,25*
1/2 V 2/12

Respuesta: De la urna 1, es más probable que salga la bola roja.

ALUMNO 17.

Cálculos: No hace.

Respuesta: Urna nº1	7 bolas	4 rojas	+50%
Urna nº2	12 bolas	6 rojas	50%

Es más probable de la urna nº1 porque hay más de un 50% de bolas rojas que en la urna 2 que hay justo el 50%.

ALUMNO 18.

Cálculos: No hace.

Respuesta: En la urna nº1 sacar una bola roja tiene una probabilidad de 4/7, sacar una azul existe la probabilidad de 2/7 y una bola verde 1/7 por lo tanto existen más posibilidades de ser rojas.

En la urna número 2 existe la probabilidad de 50% de sacar una bola roja. 4/12 de sacar una bola azul y 2/12 de sacar una verde. Sacar una bola azul tiene las mimas posibilidades que sacar una bola roja y verde en conjunto.

ALUMNO 19.

Cálculos: Dibuja unas urnas con el número de bolas.

Respuesta: En la urna nº1 debido a que más del 50% son rojas, mientras que en la urna nº2 es justo el 50% de bolas rojas.

ALUMNO 20.

Cálculos: 4/7=0,56 6/12=0,5

Respuesta: Es más probable sacar una bola roja de la urna nº1 porque al calcularla 0,56 es mayor que 0,5.

ALUMNO 21.

Cálculos:

	R 4/7		*R 6/12*
7	*A 2/7*	*12*	*A 4/12*
	V 1/7		*V 2/12*

Respuesta: A 4/7 =0,57   B 6/12=0,50

Hay más probabilidades de sacar una bola roja de la urna primera.

ITEM 2. Contexto cercano. Valores absolutos.

El juego ñlanza parò consiste en lanzar un dado, y gana el que saque par. Se puede elegir para jugar un dado cúbico (que tiene seis caras numeradas del 1 al 6) o un dado icosaédrico (que tiene veinte caras numeradas del 1 al 20). ¿Qué dado elegirías para jugar?

ALUMNO 1. No hace cálculos.

Respuesta: Elegiría el cúbico porque al haber menos caras hay más posibilidades de que te toque el par

ALUMNO 2.

Cálculos: Con el primer dado 3/6; con el segundo dado 10/20

Respuesta: Daría igual qué dado elegir, hay la misma proporción de caras pares en las dos.

ALUMNO 3.

Cálculos: Pone en abanico todos los valores que se pueden sacar al tirar cada uno de los dados.

Respuesta: Elegiría el 2º dado, ya que hay mayor probabilidad de que salga par al haber más números.

ALUMNO 4. No hace cálculos.

Respuesta: Cualquiera porque en el de 6 caras tengo una probabilidad de 3/6=1/2 y en el de 20 casas es de 10/20=1/2

ALUMNO 5.

Cálculos:	1 al 6	2,4,6
	1 al 20	2,4,6,8,10,12,14,15,18,20

Respuesta: Yo elegiría el dado cúbico porque tiene menos números y te puede salir un número par más fácilmente, sin embargo, tiene la misma probabilidad en ambos dados.

ALUMNO 6.

Cálculos: Dado de 20 2,4,6,8,10,12,14,15,18,20

1,3,5,7,9,11,13,15,17,19

Dado de 6 2,4,6

1,3,5

Respuesta: Daría igual qué dado usar ya que ambas tienen el mismo número de caras pares que impares y la probabilidad por tanto es la misma.

ALUMNO 7.

Cálculos: No hace.

Respuesta: En ambas hay un 50% de probabilidad de sacar un número par o impar.

ALUMNO 8.

Cálculos: No hace.

Respuesta: Elegiría el dado cúbico porque, aunque solo haya 3 posibilidades u opciones de que salga par, creo que sería más probable, aunque en el otro dado también haya la misma proporción 50%, son 10 las opciones de que salga, pero también de no salga par.

ALUMNO 9.

Cálculos: Un dado cúbico 3 caras con nº par 3/6=1/3

Uno icosaédrico 10 caras con nº par 10/20=1/2

Respuesta: En este caso daría igual elegir un dado u otro puesto que (y lo tacha). Elegiría el dado cúbico, pues hay un 0,3% de probabilidad de que salga par mientras que en el otro dado hay un 0,5% de probabilidad de que salga par. Por ello, es más difícil con el dado icosaédrico.

ALUMNO 10.

Cálculos: No hace.

Respuesta: El icosaédrico porque tienes así más probabilidades de sacar par.

ALUMNO 11.

Cálculos: Cúbico: 3/6=0,5

Icosaédrico: 10/20=0,5

Respuesta: Da igual, porque la probabilidad de sacar un número par es la misma.

ALUMNO 12.

Cálculos: 2/6=1/3 10/20=1/2

Respuesta: El icosaédrico tiene más probabilidad de que salga par.

ALUMNO 13.

Cálculos: No hace.

Respuesta: En el primero hay un total de 3 números pares y en el segundo 10 números pares. Elegiría el de mayor número caras, ya que la probabilidad es mayor al estar formado por más números pares.

ALUMNO 14.

Cálculos:

Dado cúbico: Par 3/6; Impar 3/6 Icosaédrico: Par 10/20; Impar 10/20

Cubico Icosaédrico

½ = 1/2

Respuesta: Me daría igual cuál elegir, ya que en ambos dados tienes la probabilidad de 50% de sacar un número par.

ALUMNO 15.

Cálculos:

10/20=1/2 3/6=1/2

Respuesta: Sería indiferente elegir un dado u otro, ya que en ambos existe la misma probabilidad de que salga par, un 50% de probabilidad.

ALUMNO 16.

Cálculos:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Dado 3/6=0,5

10/20=0,5

Respuesta: Elegiría cualquiera para jugar. Tienen la misma probabilidad de que salga par.

ALUMNO 17.

Cálculos: No hace.

Respuesta: En los dos casos habría un 50% de posibilidades de sacar un número par. En el cúbico hay 3 de 6 números pares y en el icosaédrico 10 de 20, es decir, en la 2 un 50%.

ALUMNO 18.

Cálculos: No hace.

Respuesta: En los 2 dados hay las mismas posibilidades de que caiga par, ya que los dos tienen la mitad par y la otra mitad impar.

ALUMNO 19.

Cálculos: No hace.

Respuesta: Cualquiera de los 2, puesto que tienen la misma proporción de números pares.

ALUMNO 20.

Cálculos: 3/6=0,5   10/20=0,5

Respuesta: Da igual cuál coja. La probabilidad es 0,5 para ambos.

ALUMNO 21.

Cálculos:

1 2 3 4 5 6   3/6

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20   10/20

Respuesta: En los dos casos existe la misma probabilidad.

ITEM 3. Contexto científico. Valores absolutos.

El Ministerio de Sanidad está haciendo una investigación sobre la incidencia en la población de ciertas grasas en la aparición de cánceres pancreáticos. Una de estas grasas es la aflatoxina. Cuando en la sangre hay un contenido elevado de esta grasa, puede provocar cáncer de páncreas. Para llevar a cabo la investigación se hacen unos análisis a toda la población de dos pueblos pequeños de diferentes provincias, Villanueva de Urraca y Sant Feliu dôAnoia. Los resultados de los análisis son los siguientes:

	Habitantes con la aflatoxina alta	**Habitantes con la aflatoxina baja**
Villanueva de Urraca	**50**	**300**
Sant Feliu dôAnoia	**75**	**450**

Si fuéramos a esos pueblos, ¿en cuál de los dos sería más probable que la primera persona que encontráramos tuviera la aflatoxina alta?

ALUMNO 1. No hace cálculos.

Respuesta: En Villanueva de Urraca porque la diferencia entre los de alta y baja es menor.

ALUMNO 2.

Cálculos: 1ª 50/300; 2ª 75/450

Respuesta: Donde más probable sería en Sant Feliu dôAnoia dado que la proporción es mayor.

ALUMNO 3. No hace cálculos.

Respuesta: En Sant Feliu dôAnoia hay mayor probabilidad de que la 1ª persona tuviera aflatoxina alta.

ALUMNO 4.

Cálculos: 75/525; 50/350

Respuesta: En Villanueva de Urraca porque tiene menos habitantes pero con más aflatoxina.

ALUMNO 5. No hace cálculos.

Respuesta: Sería más fácil encontrar a una persona con la aflatoxina alta en Sant Feliu dôAnoia.

ALUMNO 6.

Cálculos: 470/75:6; 500/50:6

Respuesta: Daría igual a qué pueblo ir, ya que sería la misma probabilidad en los dos 450:75=6; 300:50=6.

ALUMNO 7.

Cálculos: Sant Feliu: 525 habitantes; 75/525=1/7=0,14
Villanueva: 350 habitantes; 50/350=1/7=0,14

Respuesta: En ambas provincias hay la misma probabilidad de encontrar a una persona con la aflatoxina alta.

ALUMNO 8.

Cálculos: No hace.

Respuesta: En Villanueva de Urraca. A simple vista diría Sant Feliu d'Anoia, ya que 75 personas tienen aflatoxina alta, pero si se compara con las personas que la tienen baja, en ese pueblo hay menor posibilidad de que la primera personas tuviera aflatoxina alta.

ALUMNO 9.

Cálculos: Villanueva: 50/300=1/6
Sant Feliu: 75/450=1/6

Respuesta: Yo creo que hay la misma posibilidad de encontrarse a una persona con la aflatoxina alta tanto en Villanueva de Urraca como en Sant Feliu d'Anoia ya que si divido 50 que son los que lo tienen alto entre 300 que lo tienen bajo, da como resultado 1/6 igual que si repito la operación con Sant Feliu, igualmente da 1/6. Hay la misma probabilidad en cualquiera de los dos pueblos.

ALUMNO 10.

Cálculos: No hace.

Respuesta: En Villanueva de Urraca, porque la proporción entre habitantes con aflatoxina alta y con aflatoxina baja es menor que en Sant Feliu d'Anoia, así hay mayor (y luego lo tacha todo)

No logro decidirme por un pueblo comparando los datos, pero creo que sería Villanueva de Urraca, ya que la proporción entre gente con alta aflatoxina y el total de habitantes es mayor que en el otro pueblo.

ALUMNO 11.

Cálculos: Villanueva: 50/300=1/6

Sant Feliu: 75/450=1/6

Respuesta: La probabilidad es la misma en ambos pueblos, ya que al relacionar los que tienen la aflatoxina alta con los que la tienen baja, las probabilidades son iguales.

ALUMNO 12.

Cálculos: 1/4 1/6

Respuesta: En Villanueva de Urraca debido a que el porcentaje de personas con la aflatoxina alta es mayor.

ALUMNO 13.

Cálculos: Villanueva: un total de habitantes de 350

Sant Feliu: 525 hab.

Respuesta: En Villanueva sería la opción donde encontrarías la primera persona con la aflatoxina alta.

ALUMNO 14.

Cálculos: Villanueva: 50/350=14,2% probabilidad aflatoxina alta

Sant Feliu: 75/525=14,2%

Respuesta: En ambas tienes la misma probabilidad, un 14,2% de tener la aflatoxina alta.

ALUMNO 15.

Cálculos:

A	50/350		5/35	14,28%
	300/350	30/35		
B	75/625		15/125	12%
	450/625	90/125		

Respuesta: Hay mayor posibilidad en la 1ª ciudad, ya que el porcentaje es mayor.

ALUMNO 16.

Cálculos: Villanueva: 50/300=14%

Sant Feliu: 14%

Respuesta: Hay el mismo % de personas con la aflatoxina alta.

ALUMNO 17.

Cálculos: 45*15=675

45*17=765

Respuesta:

450-----75
100-----x *x=750/45=16,**é***

300-----50
100-----x *x=50/3=16,**é** .*

Necesitaría saber los decimales para concretar el resultado, pero a simple vista parece que haya el 50% de posibilidades en los dos casos. Porque si eliges una persona al azar hay un 50% de probabilidades de que tenga la aflatoxina alta o baja.

ALUMNO 18.

Cálculos:

300-----50
100-----x *x=500/300=1,6*

450-----75
100-----x *x=7500/405=1,8*

Respuesta:

Es más probable que sea en la segunda ciudad que tiene mayor índice de enfermedad.

ALUMNO 19.

Cálculos:

Por cada 25-----150 baja (50-300)
(75-450)

Respuesta:

En cualquiera de los 2 encontraríamos la misma probabilidad.

ALUMNO 20.

Cálculos:

50/350=0,14
72/525=0,142

Respuesta:

En los dos sería igual de probable.

ALUMNO 21.

Cálculos:

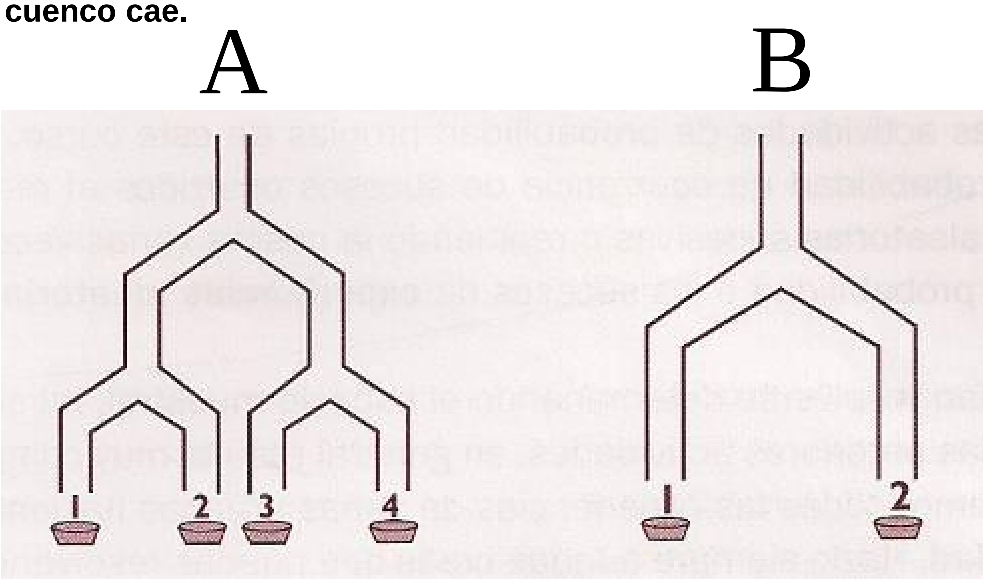
50/350=0,14
72/525=0,14

Respuesta:

Existe la misma probabilidad en los dos casos.

ITEM 4. Contexto matemático. Valores relativos.

Tenemos dos circuitos por los que lanzaremos una bola para observar en qué cuenco cae.



Si lanzamos una bola por A y otra por B, ¿en cuál de los dos circuitos es más probable que la bola caiga en un cuenco con número impar? En ambos circuitos, la probabilidad de que en cada bifurcación la bola tome uno de los caminos u otro es 0,5.

ALUMNO 1. No hace cálculos.

Respuesta: En el B porque hay mayor porcentaje debido a que hay un 50%.

ALUMNO 2.

Cálculos: A 2/4; B 1/2

Respuesta: Es igual de probable en A y B, ya que la proporción de números pares e impares es la misma.

ALUMNO 3. No hace cálculos.

Respuesta: En la B, ya que tiene sólo dos caminos.

ALUMNO 4. No hace cálculos.

Respuesta: La del A tiene más posibilidad (Luego lo tacha y pone) La misma posibilidad.

ALUMNO 5.

Cálculos: A 2/4; B ½

Respuesta: En el circuito B la bola es más probable que caiga en el cuenco impar porque sólo tiene dos caminos. La probabilidad es del 50% en el circuito

B mientras que en el A la probabilidad es de 25%.

ALUMNO 6.

Cálculos: No hace

Respuesta: En el circuito B porque con el circuito A la probabilidad inicial se divide y se va haciendo más pequeña.

ALUMNO 7.

Cálculos: En los dibujos coloca ½ en cada uno de los caminos, incluso cuando se bifurca.

Respuesta: En el circuito B, la bola tiene un 50% de posibilidad de caer en el cuenco impar. Por otro lado, en el cuenco A, la probabilidad disminuye a ¼, ya que se tiene que bifurcar dos veces para ser impar.

ALUMNO 8.

Cálculos: Dibuja unos diagramas de árbol con las probabilidades que vaya por cada camino en los dos circuitos (y lo dibuja bien)

Respuesta: En el A, ya que si se realiza un diagrama de árbol se ve que hay más opciones de que caiga en impar, ya que aunque al principio pueda irse al lado que é si fuera el B, fuera par, cabe otra posibilidad en la segunda bifurcación de que sea impar, algo que en la B no se puede dar..

ALUMNO 9.

Cálculos: No hace.

Respuesta: No encuentro la diferencia y no se qué cálculos hacer, porque en el primero tiene que caer dos veces por el sitio adecuado mientras que en el B solo tienen que caer una vez por el sitio adecuado para caer en el cuenco impar.

ALUMNO 10.

Cálculos: No hace.

Respuesta: El circuito A porque la probabilidad es de 2 frente a 0,5 del circuito B.

ALUMNO 11.

Cálculos: No hace.

Respuesta: La probabilidad es la misma, ya que en el circuito B tiene dos opciones, y sólo una es impar, pero en el A, tiene el doble de opciones de pares e impares, por lo tanto, es la misma.

ALUMNO 12.

Cálculos: No hace.

Respuesta: En las dos la misma, porque en la A a pesar de que el circuito sea más complejo la posibilidad de caer en impar es exactamente la misma porque al pasar el primer cruce se vuelve a la situación inicial del circuito B en ambos caminos.

ALUMNO 13.

Cálculos: A: 2/4=2 B: 1/2

Respuesta: La opción A la probabilidad es mayor, ya que hay un número más que en la otra opción que es la B.

ALUMNO 14.

Cálculos: En los dibujos coloca ½ en cada uno de los caminos, incluso cuando se bifurca.

(Luego, en la casilla de cálculos)

Impar en A 1*(1/2*1/2)+(1/2*1/2)=1/2

Impar en B 1*1/2=1/2

Respuesta: Yo creo que tienen la misma probabilidad, ya que en la A cojas la bifurcación que cojas tienes un 50% de te salga impar y en la B tienes un 50% de que te salga impar.

ALUMNO 15.

Cálculos:

1/2
- 1/2 par
- 1/2 impar

1/2
- 2/4 par
- 2/4 impar

Respuesta: Hay la misma probabilidad de que la bola caiga en número por en ambos casos. La probabilidad en ambos casos es del 50%.

ALUMNO 16.

Cálculos: No hace.

Respuesta: B: impar 50%

A: impar 25%+25%=50%

Tienen la misma probabilidad.

ALUMNO 17.

Cálculos: No hace.

Respuesta: En las dos hay un 50% de que caiga en un cuenco par. Ya que en la B solo hay 2 opciones y una es par (50%) y en la A hay 4 opciones pero 2 son par (50%)

ALUMNO 18.

Cálculos: No hace.

Respuesta: La B tiene 50% de caer en un número u otro.
La A tiene 25% de posibilidades de caer en cada número, la primera fase 50% y la segunda 50%. 0,25---25%

ALUMNO 19.

Cálculos: No hace.

Respuesta: Tienen la misma probabilidad.

ALUMNO 20.

Cálculos: No hace.

Respuesta: La probabilidad es la misma, porque independientemente de por qué lado iría la bola en el A, luego tendría las mismas opciones (par e impar). Al igual que la otra. La diferencia es que el recorrido es mayor.

ALUMNO 21.

Cálculos:

A — 0,5 — 0,5 1
A — 0,5 — 0,5 2
A — 0,5 — 0,5 3
A — 0,5 — 0,5 4

B — 0,5 1
B — 0,5 2

Respuesta: A- impar 0,5 50%
B- impar 0,5 50%
Es igual de probable los 2.

ITEM 5. Contexto cercano. Valores relativos.

Un alumno del IES El Astillero quiere comprarse un móvil. En la tienda le ofrecen tres marcas que tienen el mismo precio, la misma forma y las mismas prestaciones. Pero el alumno sabe que de la primera marca se vendieron el mes pasado 500 móviles y salieron 5 defectuosos, de la segunda marca se vendieron 900 y dos de cada 100 dio problemas, y de la tercera marca se vendieron 750 y 7 de ellos salieron defectuosos. ¿De qué marca debería el alumno comprar el móvil para que la probabilidad de que tenga algún defecto sea menor?

ALUMNO 1. No hace cálculos.

Respuesta: De la tercera marca porque hay más probabilidad de que el móvil te funcione bien debido a que te sale mal uno cada más de 100 móviles.

ALUMNO 2. No hace cálculos.

Respuesta: Tendría que coger la tercera marca de móvil, ya que es la que más móviles salieron y la proporción con los defectuosos es pequeña.

ALUMNO 3. No hace cálculos.

Respuesta: La 3ª porque hay menor probabilidad de que salga defectuoso.

ALUMNO 4.

Cálculos: (Escribe) 5/500 2/100 7/750

Respuesta: De la primera marca porque hay menos probabilidad de que te salga menor.

ALUMNO 5.

Cálculos: (Escribe) 5/500 18/900 2 de cada 100 7/750

Respuesta: Debería comprar el tercer móvil porque tiene menos defectuosos que los otros dos.

ALUMNO 6.

Cálculos: No hace.

Respuesta: No lo sé.

ALUMNO 7.

Cálculos: 5/500=0,01<18/900=0,02 7/750=

Respuesta: No pone nada.

ALUMNO 8.

Cálculos: 2-100 18 defectuosos

5/500 18/900 7/750

Respuesta: Habría que calcular el m.c.m, para ver si en alguna de las marcas hay más defectuosos que en las otras, ya que se han vendido distintas cantidades en cada marca.

ALUMNO 9.

Cálculos: 1ª marca: de 500 5 malos 5/500=0,01

2ª marca: de 900 2/100 problemas 18 malas=900*2/100

18/900=0,02

3ª marca: de 750 7 mal 7/750=0,0093

Respuesta: El porcentaje de que un móvil salga menos defectuoso será en la 3ª marca, ya que al dividir el número de móviles defectuosos entre el total de móviles vendidos es menor el de la marca 3ª. El alumno, por ello, creo que debería comprarse la tercera marca.

ALUMNO 10.

Cálculos: 500:5=100

900:18=50

750:7=107,14

Respuesta: La tercera marca porque en proporción con las demás marcas, no salen tantos móviles defectuosos.

ALUMNO 11.

Cálculos: 1ª : 500-5=495 495/500

2ª: 900-18=882 882/900

3ª: 750-7=743 743/750

Respuesta: Debería comprarlo de la 3ª marca, ya que de la segunda, en caso de que hubiesen vendido 500, al igual que la 1ª, habrían salido 10 móviles defectuosos, por lo tanto la 2ª no, y comparándola 1ª y la 3ª, es mejor la 3ª.

ALUMNO 12.

Cálculos: 1/100 900------x

100------2 x=18 18/900=2/100

7/750

Respuesta: Compraría de la marca 3ª porque el porcentaje de móviles defectuosos es el menor.

ALUMNO 13.

Cálculos: Marca A 500 móviles y 5 defectuosos

Marca B 900 móviles y 100 dio problemas

Marca C 750 y 7 defectuosos

Respuesta: La mejor propuesta sería comprar el móvil de la tercera marca, ya que si todas las marcas vendieron el mismo número de móviles durante un mes la que menos móviles defectuosos obtendrían sería la de la marca C, la segunda opción sería la marca B y la última con el mayor número de móviles defectuosos.

ALUMNO 14.

Cálculos: *1 marca 5/500 defectuosos 0,01% es defectuosos*
2 marca 2------100 900x2/100=18 0,02% defectuosos
x------900
3 marca 7/750

Respuesta: De la 3 marca ya que es la que tiene menos probabilidad de salir defectuosos, es decir, 7/750

ALUMNO 15.

Cálculos: *1ª 5005/500=1/100 def*
2ª 9002/100=1/50 def
3ª 7507/750 def
7/750+1/100+1/50=35000/375000+37500/375000+75000/375000

Respuesta: No pone nada.

ALUMNO 16.

Cálculos:

	Bueno	*Defectuoso*
A	*495*	*5*
B	*898*	*2*
C	*743*	*7*

Respuesta: Compraría el de la marca b, porque salen menos defectuosos.

ALUMNO 17.

Cálculos: *No hace.*

Respuesta:

1ª marca 500 5 defectuosos
2ª marca 900 18 defectuosos
3ª marca 750 7 defectuosos

1 500 5defectuosos
100 x defectuosos x=1
1 900 18defectuosos
100 x defectuosos x=2
1 750 7defectuosos
100 x defectuosos x<1

La 3 opción es la mejor, ya que hay menos probabilidad de que sea defectuoso.

ALUMNO 18.

Cálculos:

5----500	18----900	7----750
x----100	x-----100	x----100
x=1	x=2	
99%	98%	98,4%

Respuesta:

Deberá comprar de la tercera marca, ya que si de 750, 7 son malos sólo 0,6 es malo, en cambio en las otras opciones tienen más tendencia a fallar muy poco notable, pero de 750, 7. Eso es menos de 1 móvil de cada 100.

ALUMNO 19.

Cálculos: No hace.

Respuesta: De la 3ª debido a que más o menos por cada más de 100 móviles, 1 sales defectuosos mientras que en la 1ª por cada 100, 1 móviles justos, 5.

ALUMNO 20.

Cálculos:

5/500=0,01
18/900=0,02
7/750=0,009

Respuesta: De la última marca porque 0,009 es menor que 0,02 y 0,01, así que hay menor probabilidad de que le salga defectuoso.

ALUMNO 21.

Cálculos:

500---5	0,01%
900---18	0,02%
750---7	0,0093%

Respuesta: De la tercera marca puesto que el tanto por ciento de que salga defectuoso es menor.

ITEM 6. Contexto científico. Valores relativos.

En Cantabria, que tiene unos 600.000 habitantes, el porcentaje de médicos es de 1 por cada 200 habitantes, mientras que en Andalucía, que tiene unos 8.500.000 habitantes, el porcentaje de médicos es de 1 por cada 500 habitantes. Si cogemos el censo de ambas Comunidades Autónomas y miramos la profesión de uno de sus habitantes elegido al azar, ¿en qué comunidad es más probable que ese habitante sea médico?

ALUMNO 1. No hace cálculos.

Respuesta: En Cantabria habrá más probabilidad debido a que hay menos habitantes y la cantidad de médicos por cada número de habitantes es mayor.

ALUMNO 2. No hace cálculos.

Respuesta: En Cantabria porque el porcentaje de médicos es de 1 por cada 200, y al haber menos hay más probabilidad de que sea médico.

ALUMNO 3.

Cálculos: 1/200 de 600.000=300; 1/500 de 8.500.000=170 (tacha todo)

Respuesta: En Cantabria, ya que al haber menos habitantes hay mayor probabilidad.

ALUMNO 4.

Cálculos: (Escribe) 1/6000, 1/200, 1/500

(Luego pone) 600.000 1/200

8.500.000 1/500

Respuesta: En Cantabria porque (y lo tacha). (Luego añade) Pues no sabría hacerlo porque no me acuerdo muy bien qué había que hacer. Pero lo he intentado.

ALUMNO 5.

Cálculos: 600.000h 1/200

8.500.000h 1/500

Respuesta: Es más probable que la persona que eligiésemos sea médico en Cantabria, porque su probabilidad es muy elevada comparándose con el número de habitantes que hay en cada comunidad autónoma.

ALUMNO 6.

Cálculos: 200----1

600000----x x=3000 de cada 600000

500----1
8.500.000----x x=17000 de cada 8500000

Respuesta: Es más probable la primera opción ya que son menos habitantes que en la segunda y una probabilidad mayor.

ALUMNO 7.

Cálculos: 600000/200=3000 600000----100%
3000----x x=0,5%
8500000/500=17000 8500000----100
3000----x x=0,5%

Respuesta: Es más probable la primera opción ya que son menos habitantes que en la segunda y una probabilidad mayor.

ALUMNO 8.

Cálculos: No hace.

Respuesta: Si en Cantabria hay 600.000 y 1/200 es la proporción de médicos hay mayor posibilidad de que la persona elegida sea médico, porque hay menos población y porque la proporción de médicos es mayor 1/200 frente a 1/500 de Andalucía.

ALUMNO 9.

Cálculos: 600000/200=3000 1/3000 son médicos en Cantabria
8500000/500=17000 1/17000 son médicos en Andalucía

Respuesta: Es más probable que sea médico uno de Cantabria porque entre 3000 uno es médico, mientras que en Andalucía 1 entre 17000.

ALUMNO 10.

Cálculos: No hace.

Respuesta: Es más probable encontrar un médico en (Andalucía, ya que la población es más- Y LO TACHA) Cantabria porque la población es menor y hay bastantes médicos.

ALUMNO 11.

Cálculos: 600000*1/200=3000 médicos en Cantabria
8500000*1/500=17000 médicos en Andalucía

Respuesta: Es más probable que sea de Andalucía porque son más habitantes y, por tanto, más médicos.

ALUMNO 12.

Cálculos: 200----1
600000----x x=3000 3000/600000=3/600=1/200
500----1
8.500.000----x x=17000 17000/8500000=17/85000=1/500

Respuesta: Es más probable en Cantabria, ya que hay mayor porcentaje de médicos.

ALUMNO 13.

Cálculos: No hace.

Respuesta: La de Cantabria, ya que con menos habitantes hay mayor número de médicos hay 1 por cada 200 hab. Y en Andalucía 1 por cada 500 hab.

ALUMNO 14.

Cálculos: 200----1
600000----x x=3000 médicos
500----1
8.500.000----x x=17000 médicos

(Luego lo tacha todo y añade:) NO, porque he hallado la cantidad de médicos no la probabilidad. (Pero luego pone) Sí sirve.

Respuesta: Cantabria 3000/600000=1/200
Andalucía 17000/8500000=17/8500

Es más probable que en Cantabria un habitante sea médico.

ALUMNO 15.

Cálculos: No hace.

Respuesta: No dice nada.

ALUMNO 16.

Cálculos:

600000 1/200 médicos 1/200 x/600000
600000/200=3000 médicos
3000/600000*100=0,5%
8500000 1/500 médicos 1/500 x/8500000=17000 médicos
17000/8500000*100=0,2%

Respuesta: En Cantabria es más probable, ya que el porcentaje es más alto..

ALUMNO 17.

Cálculos: No hace.

Respuesta:

Cantabria	600000
1	200
Andalucía	8500000
1	500

La probabilidad es del 50% aunque haya más médicos en un lugar que en otro. Si eliges uno al azar es 50% igualmente.

ALUMNO 18.

Cálculos: No hace.

Respuesta: Es más probable que salga en Cantabria, ya que de cada 200 habitantes 1 es médico y en Andalucía 1 de cada 500. Para que en Andalucía salga un médico en Cantabria nos han podido salir 2 médicos y medio.

ALUMNO 19.

Cálculos: No hace.

Respuesta: En Cantabria, debido a que hay mucha menos población, la proporción de médicos es mayor en Cantabria. (Lo tacha todo)

Es la misma probabilidad en las 2 comunidades.

ALUMNO 20.

Cálculos:

600000:200=3000 200----1
3000---x x=45000

500-------1
17000----34 34x17000=578000
45000/600000=0,075
578000/8500000=0,068

Respuesta: Es más probable que encuentres un médico en Cantabria (0,075)que en Andalucía (0,068) porque la probabilidad es mayor.

ALUMNO 21.

Cálculos: No hace.

Respuesta: En Cantabria puesto que la probabilidad es mayor entre un número más reducido de personas.