

**POR LA ABOLICIÓN DE LAS MATEMÁTICAS DE LÁPIZ Y PAPEL**

**Anthony Ralston**

**SUNY at Buffalo and Imperial College**

**London**

**Este documento recoge el artículo mencionado arriba y las observaciones,  
comentarios y opiniones de**

**Antonio Ramón Martín Adrián**

**Colegio Aguere de La Laguna**

**Tenerife Islas Canarias ESPAÑA**

**[tonycapicua@yahoo.es](mailto:tonycapicua@yahoo.es)**

**Canal de youtube: ANTONIO MARTIN 2020**

**La primera observación es complementar o cambiar el título por**

**LOS ALGORITMOS TRADICIONALES DE LAS CUATRO  
OPERACIONES ARITMÉTICAS:**

**¡HAN MUERTO, PERO NO HAN SIDO ENTERRADOS!**

**¡VIVA EL CÁLCULO MENTAL Y LAS CALCULADORAS!**

**“La Educación Matemática tiene que ser un conjunto de conocimientos que  
deben contribuir a la igualdad social, no a la selección intelectual”**

**(ARMA, Lanzarote. Octubre 2001)**

**Febrero 2002**

**POR LA ABOLICIÓN DE LAS MATEMÁTICAS DE LÁPIZ Y PAPEL**

Anthony Ralston

SUNY at Buffalo and Imperial College, London

## Resumen

Este artículo propone que se abandone la enseñanza de la aritmética de papel y lápiz en la escuela elemental y que sea reemplazada por un curriculum que enfatice el calculo mental mucho mas que lo que se hace ahora y en el que las calculadoras se utilicen con propósitos educativos en todos los niveles de la enseñanza primaria, e incluso a preescolar. El artículo analiza y refuta los argumentos hechos por los que proponen 'la vuelta a lo básico' contra el uso de las calculadoras y a favor de la instrucción tradicional en los algoritmos de la aritmética de lápiz y papel (ALP). Se argumenta a favor del valor del cálculo mental para la consecución de todos los objetivos - y algunos mas - del curriculum tradicional. También se considera el diseño de un curriculum para las matemáticas de la escuela elemental sin papel ni lápiz. Igualmente se plantea el impacto de este curriculum sobre el de las matemáticas en la educación secundaria y en la universitaria. Finalmente, se valoran los obstáculos para la consecución de lo que este artículo propone.

---

**"Una persona puede ser un matemático de primer orden sin ser capaz de hacer cálculos. Es posible ser un gran calculador sin tener la mas ligera idea de las matemáticas."**

**Novalis (1772-1801)**

Si, eso es lo que quiero decir. Conseguir cualquier nivel de eficacia en la aritmética de lápiz y papel (a partir de aquí ALP) ya no debería ser un objetivo de las matemáticas de la escuela elemental. Lo cual no quiere decir - por supuesto - que los profesores no deben utilizar los algoritmos de la ALP para los objetivos que deseen. Esto solo significa que los alumnos no deberían aprender estos algoritmos y que, ciertamente, no deberían ser evaluados sobre ellos.

\*\*\*\*\***ARMA**\*\*\*\*\*

La enseñanza y el aprendizaje de los **ALGORITMOS TRADICIONALES DE LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS (ATOA)** es actualmente un tema caduco y obsoleto.

$$4.567 + 789 + 6.908 + 12.345 + 34 =$$

$$67.987 - 8.899 =$$

$$23.456 \times 78 =$$

$$789.342 : 67 =$$

$$657,89 \times 34,5 =$$

$$6789,78 : 34,5 =$$

$$\text{Raiz cuadra: } 899,8$$

En la actualidad, ninguno de estos procedimientos **se hace fuera de los centros escolares**, y no aportan ni desarrollan ninguna habilidad cognitiva que **mejore el razonamiento lógico-matemático**, siendo esto último el objetivo fundamental que debe predominar en todas las acciones que hacemos los educadores matemáticos con nuestros alumnos.

No existe ningún centro comercial , financiero (Bancos, Cajas de Ahorros,...), empresas (gasolineras, supermercados,...), laboratorios, etc; donde veamos realizando

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

En el año 2001 (lo mismo que hace dos décadas) las **operaciones aritméticas (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) con bolígrafo y papel**. Por lo tanto, **esos algoritmos deben desaparecer del trabajo escolar**.

En definitiva, deben morir, no son útiles. Son parte de la Historia de la Pedagogía.

Debemos esperar a la **III Guerra Mundial** (ojalá que nunca ocurra) , para que cambie el panorama mundial tal como lo conocemos hoy en día, y desaparezcan todos los instrumentos de cálculo electrónico, para volver a reconsiderar la utilidad de estas prácticas.

Después de lo anterior.

**¿Qué haremos ahora los docentes con el cálculo?**

Desde hace décadas, y de manera significativa en los comienzos del siglo XXI, las estrategias elementales de cálculo en la escuela deben ir dirigidos a **dotar a las niñas y niños (futuros ciudadanos) del mayor número de habilidades cognitivas posibles para el CÁLCULO MENTAL, y dentro de este para el CÁLCULO APROXIMADO (Estimación)**. El exacto lo dan las máquinas, que se equivocan menos que los seres humanos.

Por lo tanto, todas las acciones a desarrollar en las aulas deben tener como **principal objetivo: “Fomentar el desarrollo del cálculo mental”**

\*\*\*\*\*

A continuación explicaré los motivos de estos planteamientos y, en particular, argumentaré sobre lo que yo creo ha de reemplazar a esta parte de las matemáticas de la escuela elemental

Pero, en primer lugar, voy a considerar las posibles objeciones a mi propuesta con objeto de contextualizar mi alternativa.

### **Vuelta a lo básico.**

Parece peculiarmente perverso en el actual clima de la didáctica de las matemáticas, particularmente en USA e Inglaterra, proponer el abandono de la ALP. En USA el curriculum recientemente aprobado por el Gabinete de Educación del Estado de California [California, 1998] es substancialmente una versión revisada del curriculum elaborado por la Comisión de Curriculum Académico de California [California, 1997] que propugna un régimen de ALP en la escuela elemental mediante la prohibición del uso de calculadoras en los tests en todos los cursos de primaria. Este enfoque (1) de vuelta a lo básico es la antítesis de lo que este artículo propone.

(1) No todo el mundo acepta que ‘la vuelta a lo básico’ sea una correcta descripción del curriculum de California [Wu, 1998] pero, en tanto en cuanto este término implica una vuelta a la ALP solo en la escuela elemental, el curriculum de California es, verdaderamente, un curriculum de vuelta a lo básico.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Después de leer lo anterior, hay que preguntarse: ¿quiénes han elaborado ese currículum?, ¿qué modelo de escuela tienen en sus estructuras mentales?, ¿cuáles son las teorías que sustentan esas decisiones?, ¿cuáles son los argumentos para prohibir el uso de la calculadora?, ¿qué se entiende por vuelta a lo básico, los algoritmos tradicionales?

\*\*\*\*\*

En Inglaterra un informe [DFEE, 1998a] encargado por el ministro de Educación, David Blunkett, del nuevo gobierno Laborista desaconseja "tanto cuanto sea posible el uso de calculadoras" en la enseñanza de las matemáticas a los niños de hasta 11 años. Aunque el informe final [DFEE, 1998b], en respuesta a las extendidas críticas al informe preliminar, ha atemperado este consejo, recomienda un uso limitado o no usar las calculadoras hasta los últimos años de la escuela primaria (cuando los alumnos tienen 10 o 11 años). De hecho, el actual gobierno británico se adhiere, aun más que su predecesor, a una filosofía de vuelta a lo básico.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

¿Por qué no usar las calculadoras hasta los últimos años de la escuela primaria? La calculadora ha revolucionado la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, pero desgraciadamente son muy pocos los responsables educativos, inspectores, profesores, investigadores, formadores de profesores, madres y padres que se han enterado de este hecho. Hay una función en estas máquinas que la mayoría de las personas ignora, que es el **FACTOR CONSTANTE**. Esta posibilidad permite un amplio espectro para el trabajo en la clase de matemáticas en todos los ciclos de la educación primaria y la educación infantil.

La calculadora es la mejor herramienta con que cuentan los docentes para atender la DIVERSIDAD en el alumnado en la clase de matemáticas. No entendemos como se puede trabajar el cálculo mental sin calculadora. Es la herramienta ideal para dar a cada alumno lo que necesita y no limitar capacidades. El inconveniente se encuentra en que la mayoría de los docentes no saben sacar el provecho del factor constante, no por capricho, sino por desconocimiento. Con respecto a esto, y desde hace años se han aportado a la comunidad educativa varias modalidades de uso de la calculadora en clase, fruto de la investigación en la acción realizada en el **Colegio público Aguamansa de La Orotava, Tenerife, Islas Canarias (ESPAÑA)**, donde se pueden apreciar las ventajas de utilización para el desarrollo del cálculo mental. La calculadora desarrolla en la mente infantil, habilidades cognitivas que las personas no podemos. Para una información más completa se necesitaría ver los **videos-artículos** grabados en el colegio Aguamansa ([38010888@gobiernodecanarias.org](mailto:38010888@gobiernodecanarias.org))

\*\*\*\*\*

Aunque los didactas de las matemáticas en USA han condenado ampliamente el currículum californiano y en Inglaterra prácticamente todos (pero no todos - [Gardiner, 1998]) se han opuesto vehementemente a la posición del gobierno, muchas otras personas en ambos países son firmes partidarios de la vuelta a lo básico. Educadores no matemáticos, muchos padres y la

mayoría de los políticos han deplorado siempre el poner calculadoras en las manos de los niños(2)

(2) Una ironía especial es que la mayoría de estas personas aprueban fervientemente el uso de los ordenadores en la escuela. ¿Por que? ¿Será porque los ordenadores son caros y por ello prestigiosos, mientras que las calculadoras son baratas y por ello son baratijas? ¿O es que todo el mundo piensa que comprenden las matemáticas de la escuela elemental y, por ello, pueden tener opiniones validas sobre este tema mientras la mayoría de la población han olvidado, si alguna vez las aprendieron, la mayor parte de las matemáticas de la escuela secundaria?

Parece ser que los mas fuertes partidarios del nuevo curriculum de California son investigadores matemáticos, algunos de ellos de instituciones tan prestigiosas como Stanford y Berkeley. (En Inglaterra la comunidad de investigadores matemáticos ha estado relativamente calmada sobre este tema [DFEE, 1998a y 1998b] pero un significativo grupo de esta comunidad se ha opuesto claramente a que el hecho de usar calculadoras suponga poner una pica en Flandes en las matemáticas de la escuela elemental, a pesar de estudios respetables [Shuard, 1991] que muestran la eficacia de este enfoque.) La comunidad de investigadores matemáticos tiene buenas razones para estar preocupada por el estado de la educación matemática preuniversitaria, un tema sobre el cual volveré en el siguiente apartado. Aquí tan solo quiero hacer notar que la comunidad

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Generalmente, los foros de discusión sobre el fracaso de la Educación Matemática giran en torno a la educación primaria y secundaria, pero qué ocurre con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en La Universidad. En este tramo educativo el modelo imperante es, el modelo de clase tradicional, y dentro de este su máxima expresión, la lección magistral; donde el profesor es quién posee el conocimiento y el alumno no lo adquiere hasta que el profesor lo explica. ¿Por qué la utilización de calculadoras gráficas y simbólicas, sigue siendo una mera anécdota?. ¿Cuál es la formación didáctica, psicológica y pedagógica de los profesores de matemáticas universitarios?, ¿dónde se les forma en estas cuestiones?, ¿y dónde se reciclan, ¿es que no existen otros modelos de dar clases en la universidad, que no sean las lecciones magistrales de pizarra y tiza?, ¿se podrá aplicar el constructivismo a las clases de matemáticas universitarias?.

¿Quién forma a los maestros y profesores de matemáticas de secundaria?. Si la formación de los anteriores es deficiente, ¿quién se tiene que reformar en primer lugar?, ¡La Universidad!

\*\*\*\*\*

americana de investigadores matemáticos no ha comprendido muy bien el impacto de la tecnología en las matemáticas en el nivel universitario, por lo que seria muy raro que hubieran comprendido, aunque hay algunas notables excepciones, el impacto sobre el curriculum de las matemáticas preuniversitarias. Realmente, siempre con el caveat acerca de las excepciones, como regla general los investigadores no saben de que hablan cuando critican lo que sucede en la escuela elemental [American, 1995-1997]. Han diagnosticado correctamente el problema, pobre preparación para las matemáticas universitarias, pero no comprenden las causas del problema o su arreglo.(3)

(3) Se puede hacer una crítica similar respecto de los informáticos universitarios. Por ejemplo, Gelernter [1998] cree que "Las calculadoras han de ser prohibidas de las escuelas elementales de América".

\*\*\*\*\* ARMA\*\*\*\*\*

Lamentablemente, los investigadores matemáticos, salvando las excepciones correspondientes, el modelo de escuela primaria que ellos conocen, es el que vivieron como niños cuando estaban escolarizados. Y por lo general, es el modelo que demandan porque no conocen otro. La humanidad ha progresado, y las necesidades sociales y laborales son cada día más diferentes, por lo cual la escuela de hace 20 ó 30 años, es una institución que no es válida en los comienzos del siglo XXI, en lo que a la aritmética y a la Educación Matemática se refiere.

\*\*\*\*\*

### **El valor de aprender la aritmética de lápiz y papel.**

Principalmente han sido dos los **factores** que han incentivado el **movimiento anticalculadora** y de **vuelta a lo básico**:

1.- Los pobres resultados de estudiantes de América (y británicos) en comparaciones internacionales [Schmidt et al, 1997]. Ya que tales comparaciones en el nivel de escuela primaria se centran en la habilidad de ALP, si los estudiantes de América (y británicos) tienen un mal rendimiento, entonces la razón debe ser su fracaso en el correcto aprendizaje de la ALP(4) Y ¿que es mas probable que haya causado este fracaso que el creciente uso de calculadoras durante el ultimo cuarto de siglo? Para las comparaciones de la escuela secundaria, la ALP no juega un rol tan estrechamente importante (pero, no obstante, no trivial). Sin embargo, se discute a menudo que el fracaso de llegar a ser eficiente en ALP en la escuela primaria inevitablemente pone obstáculos al estudiante en todos los niveles subsiguientes de matemática

(4) Se puede dudar que los estudiantes de América fueran alguna vez muy eficientes en ALP. Johnson y Rising [1967] informan en un estudio de 1932 sobre 200.000 estudiantes de grados 5-12 en los cuales solamente el 20% de los estudiantes del duodécimo grado pudieron calcular 2.1% de 60. También remarcaron que "En 1942 Admiral Nimitz informo que el 68% de 4200 estudiantes de primer año en 27 universidades y colegios de Estados Unidos fueron incapaces de aprobar la parte de razonamiento matemático del examen de ingreso al Cuerpo de Formación de Oficiales de la Reserva Naval".

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Por lo general, las pruebas destinadas a medir "los rendimientos" tienen una gran cantidad de items donde sólo se piden cálculos numéricos, los cuales se deben hacer mediante los ATOA, los cuales **únicamente se utilizan en los centros educativos**. Estos son **residuos históricos**, que tenían su justificación hasta comienzos de los años 70, pero que en la actualidad son destrezas de supervivencia que sólo sirven para perpetuarse a sí mismas. El hecho de que las pizarras de las escuelas y los institutos sigan llenas de estos algoritmos tradicionales, constituye una **llamada de atención URGENTE, sobre una reforma del sistema educativo radical y total**, desde la educación infantil hasta la educación universitaria.

“Es cierto que algunos educadores sostienen que los estudiantes necesitan conocer esos procedimientos. Y tienen razón: los estudiantes necesitan conocerlos, pero no debido a su importancia matemática, sino porque ayudan a los estudiantes a tener éxito en la escuela. Dicho sencillamente, estos procedimientos son destrezas para la supervivencia escolar de los alumnos. Al estudiante que no sabe hacer divisiones largas o multiplicaciones con muchos dígitos se le considera un fracasado en la escuela. Se le impide hacer nuevos progresos en matemáticas y se le aleja de ellas para siempre, y no porque el estudiante carezca de las capacidades necesarias para ser un competente aprendiz y usuario de las matemáticas, sino porque así es como está estructurado el programa de matemáticas en la escuela” (HERNÁN, F.)

Debemos preguntarnos al respecto de estas pruebas, y al trabajo en la aulas, **¿qué ocurre con la resolución de problemas?** El verdadero objetivo de la educación matemática. Todos conocemos personas que resuelven bien los ATOA, pero que carecen de habilidades cognitivas dentro de la resolución de problemas, entonces de qué sirve saber hacer los ATOA.

\*\*\*\*\*

**2. La preparación** progresivamente más **pobre de los estudiantes universitarios de primer año** para estudiar matemática universitaria. Suponiendo que este sea el caso, y un muy amplio espectro de matemáticos universitarios piensan así, entonces no podría ser la causa de esta pobre preparación el uso de nuevas técnicas y materiales de moda, a menudo calculadoras, en la enseñanza de la matemática de la escuela? Las calculadoras a menudo están asociadas con la falta de rigor en la enseñanza de la matemática, con una rebaja del nivel del plan de estudios.

Mi propia opinión es que, aunque las premisas en ambos argumentos son correctas, las conclusiones son absolutamente desatinadas, sin base en los hechos y sin credibilidad. (He de hacer notar, en particular, que, a partir de mi experiencia en la enseñanza de la matemática universitaria durante 30 años desde 1965 a 1995, suscribo completamente la premisa del segundo argumento precedente. Mis estudiantes en general progresivamente sabían menos matemática a su ingreso de la universidad y, lo que es más importante, sabían progresivamente menos acerca de lo que la matemática es y de lo que es importante en ella.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Debemos empezar preguntándonos, **qué matemática se les pide a los estudiantes universitarios**, está acorde con la carrera elegida. O son conceptos desconectados de toda realidad laboral, para la que se supone se le está preparando en la universidad; o sigue siendo una enseñanza tradicional basada en algoritmos de bolígrafo y papel de funciones, límites, derivadas, integrales, matrices, etc. De los cuáles se bombardea a los alumnos universitarios durante años, sin saber bien para que sirven los conceptos matemáticos que con ellos se pretenden alcanzar. **¿Por qué hacer estos cálculos con bolígrafo y papel, si lo hacen mejor las calculadoras gráficas y simbólicas?**

\*\*\*\*\*

Mis argumentos son los siguientes:

**1.-** Puede parecer, en principio, que **no hay razón** para creer que mezclar ALP y calculadoras en un plan de estudios de aritmética **debería conducir** a un **rendimiento** cada vez **mas pobre**,

especialmente en ALP y en la comprensión de la aritmética. Es, después de todo, aceptado por casi todos que la incesante practica en aritmética, que durante muchos años fue la característica de la matemática de la escuela primaria en casi todas partes y todavía lo es en muchos lugares, no produce mucha comprensión de la aritmética, y sin embargo puede tener como resultado una gran habilidad mecánica. Verdaderamente, hay alguna evidencia [Hiebert, 1986] de que demasiada practica de aritmética conduce a que el mensaje se pierda por el camino. Lo cual significa que el mensaje de por que uno hace aritmética se pierde por el énfasis en la precisión computacional. Pero es el caso que muchos profesores sienten que el uso de calculadoras en el aula hace mas difícil para ellos conseguir alumnos expertos en ALP. Uno podría argumentar, como en este caso, que la razón es el uso ineficaz o prosaico de calculadoras en vez del uso imaginativo. Puede ser. Pero mi conclusión es que están a medias en lo cierto de que sea ineficaz: *O la aritmética de la escuela primaria debería consistir en ALP sin calculadoras o, en calculadoras sin ALP.*

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Gran parte de los que se oponen al uso de la calculadora en la escuela, es porque piensan que el uso de la máquina para niños de 6 a 8 años es la de calcular operaciones como:  $2+4=$ ,  $8-3=$ ,  $15:3=$ ,  $2 \times 3=$ . **Por supuesto que no estamos de acuerdo en que este sea el uso que se debe dar a la calculadora con niños normales.** Hay algo en estas máquinas, que la mayoría de los docentes ignora, que es el **factor constante**. Esta posibilidad permite desarrollar habilidades de cálculo mental que los profesores no podemos transmitir.

**¡Atención!, todas las calculadoras NO tienen esta posibilidad. Por lo tanto, no todas las calculadoras de cuatro operaciones sirven para trabajar en la escuela.**

\*\*\*\*\*

Extrañamente, tal vez, los únicos que probablemente están de acuerdo con esta proposición son los que proponen la vuelta a lo básico aunque ellos, por supuesto, harán una elección diferente a la que yo haría. Casi todos los que favorecen el uso de calculadoras en las aulas de la escuela primaria parecen creer, tal vez a causa del deseo de no parecer demasiado radical a la faz de la brigada de vuelta a lo básico, que su uso debería ser un suplemento de la ALP o, de todos modos, que debería ser no obstante un componente principal de la ALP en la aritmética de la escuela primaria. Una opinión típica es: "Como uno de la brigada pro-calculadora, yo, al igual que muchos otros, estoy defendiendo que los chicos deben saber calcular con fluidez en métodos de lápiz y papel" [Kitchen, 1998]. El apoyo a enseñar ALP y usar calculadoras se encuentra en estudios que muestran, casi sin excepción, que la introducción de calculadoras dentro del aula no impide la adquisición de habilidades de ALP y que incluso puede mejorarlas [Hembree, 1986].

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Si el apoyo que se menciona anteriormente hace referencia a los ATOA, no estamos de acuerdo, **estos ATOA deben desaparecer del trabajo escolar.** En la actualidad, son inútiles.

Si compartimos que los alumnos deben trabajar con bolígrafo y papel **otros algoritmos, propuestos por el profesor y también inventados por ellos**, porque les

van a ayudar a seguir sus razonamientos y a descubrir otras estrategias, que de no poner por escrito serían muy difíciles de comprender.

Por otro lado, **la calculadora me va a permitir investigar y descubrir**, propiedades y relaciones entre los números, que de no ser por ella sería muy difícil poder abordar a los 4, 5, 6 y 7 años. Entre otros temas del currículo, la calculadora es una herramienta excelente para el estudio de las tablas del multiplicar.

Para comprender esto, es necesario ver los videos-artículos del Colegio público Aguamansa de La Orotava, Tenerife, Islas Canarias, ESPAÑA. ([38010888@gobiernodecanarias.org](mailto:38010888@gobiernodecanarias.org))

\*\*\*\*\*

Pero la mayoría de estos estudios (todos?) fueron con profesores que utilizaron las calculadoras y se sintieron cómodos usándolas. Esto no es cierto para la mayoría de los profesores los cuales, mas frecuentemente que los que no, sienten que las calculadoras son una distracción aun cuando reconocen que las calculadoras son lo que casi todos usan en todas partes (en el mundo desarrollado) para hacer aritmética. Verdaderamente, tal vez el punto crucial es que los chicos casi universalmente usan calculadoras para aritmética fuera del aula, y únicamente lo único que les persuade a practicar la ALP son los deberes o los exámenes obligatorios. En realidad, es la seguridad de que el uso de la calculadora fuera del aula retarda e inevitablemente retardara la adquisición de destrezas de ALP lo que proporciona un argumento eficaz contra el régimen de vuelta a lo básico. *La instrucción de ALP clásica esta condenada a un fracaso relativo en un mundo donde la aritmética se hace casi universalmente usando calculadoras y donde aun los chicos menos brillantes verán que conseguir una cierta habilidad en ALP no tiene prácticamente valor en actividades no académicas.*

Así el problema no es tanto si la vuelta a lo básico es una buena idea sino si puede ser satisfactorio independientemente de cuanto podríamos desear que lo sea. Aun si esto es cierto, como John Saxon una vez dijo [Saxon 1990], "debes practicar todo [en matemática] para entenderla", ¿puede tal práctica ser productiva cuando los chicos reconocen que lo que están practicando no es una destreza útil para la vida?

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

**“No es válido el argumento de que es necesario martirizar a los niños adiestrándolos en el uso de los ATOA para el caso de que en la vida no dispongan de una calculadora;** es como seguir enseñando los métodos se cálculo de la hora en base a la sombra del sol y las técnicas de enviar mensajes con humo para la eventualidad de no tener reloj o teléfono” (GUZMÁN ROJAS,1979)

“En el **pasado fue imprescindible** sacrificar tiempo y energía en impartir **destrezas de cálculo numérico**. Hoy no tiene nada que ver con **formación matemática** el adiestrar seres humanos para hacer lo que las máquinas pueden hacer mucho mejor” (GUZMÁN ROJAS, 1979)

- GUZMÁN ROJAS, I.: “Niño. Vs. Número”. Khana Cruz Srl . La Paz . Bolivia.1979

Un argumento que se oye con frecuencia en aquellos docentes que quieren seguir **justificando lo injustificable**, la enseñanza de ATOA, es: **“¿y si los alumnos cuando**

**van a hacer un cálculo no tienen calculadora, qué hacen?”**. La respuesta es obvia: ¿y si cuando van a hacer un cálculo **no** tienen lápiz y papel, que hacen? Hoy en día lo que se lleva es el **CÁLCULO MENTAL**, y dentro del **mismo LA ESTIMACIÓN**, el exacto lo dan las máquinas.

\*\*\*\*\*

2.- Pero si aprender ALP no es una habilidad útil para la vida, tal vez aprenderla es útil en matemáticas subsiguientes y en otras actividades profesionales y educativas. Primero, es claro que ALP no es útil en ninguna actividad profesional. Aun cuando algunos matemáticos profesionales necesitan hacer cantidades considerables de aritmética, casi siempre usan calculadoras u ordenadores cuando se trata de números de dos o mas dígitos. Y mientras los científicos, ingenieros y otros profesionales pueden necesitar hacer efectivamente un poquito de aritmética, casi sin excepción, la harán con calculadoras y ordenadores. De este modo el argumento de aprender ALP se mantiene o se cae en tanto en cuanto esta habilidad sea necesaria para aprender la matemática subsiguiente.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Hoy en día, en qué **actividad profesional** piden que se hagan los cálculos aritméticos a mano: **¡en ninguna!**

Ahora bien, **la calculadora no piensa**. El hacer los cálculos con la misma no significa que **el resultado obtenido sea correcto**. Por eso, enseñaremos a los alumnos a que antes de apretar la tecla, deben **aventurar el resultado**, de esta forma la calculadora hace la función de autoevaluadora de los procesos mentales (**estimación**). El alumno, siempre, antes de tocar la tecla, debe hacer una estimación, un cálculo aproximado. **Siempre se hará primero el proceso mental que el digital (tocar las teclas)**.

\*\*\*\*\*

Antes de ir mas allá, permítanme derribar algunos débiles argumentos a menudo usados por el contingente anti-calculadora. Uno esta resumido en la siguiente cita de Jaime Escalante, quien ha sido justamente elogiado por sus logros en la enseñanza de la matemática en la escuela secundaria. Criticando las normas NCTM [NCTM,1989], dijo que: "Quienquiera que escribió [las normas] debió ser un profesor de educación física ... El uso de calculadoras en el aula es negativo para el proceso de aprendizaje. Todo lo que los estudiantes aprenderán es a pulsar botones". Esta es una reacción común al uso de la calculadora en el aula de gente que no sabe nada acerca de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria e incluso de aquellos que, como Escalante, deberían estar mejor enterados. No solo no hay evidencia en absoluto para sostener esta posición sino que, en mi opinión, el plan de estudios que delineare posteriormente en este artículo posiblemente no podría ser criticado sobre estas bases.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Como bien dice Ralston, Jaime Escalante al igual que un gran número de investigadores profesionales (profesores universitarios) hace gala de su gran **desconocimiento de la enseñanza en la escuela primaria**, lo cual es lógico, ya que

existe una gran mayoría de investigadores que el único referente escolar que tienen es cuando ellos fueron niños, y siguen pensando que las cosas son como ellos las conocieron. Algunos incluso, publican estudios y libros sobre didáctica de las matemáticas en la escuela, basándose en pruebas escritas pasadas a los niños y en la observación del trabajo de aula durante algunas semanas, como si eso fuera suficiente para hacer conclusiones y generalizaciones, que en ocasiones no ayudan a la mejora de la práctica escolar, porque quien marca la pauta es la publicación o el currículum personal del investigador para poder progresar en la carrera docente universitaria.

El **profesorado universitario** que forma profesores de matemáticas, **desconoce la realidad escolar** con la que se van a encontrar los futuros maestros. El formador de docentes debe compartir la enseñanza universitaria con la enseñanza en los tramos educativos para los que forma profesionales.

El uso de la calculadora **no es negativo** en la escuela. Esta herramienta ha supuesto una “**revolución**” en el tratamiento de las operaciones aritméticas, y de muchos temas del currículo, como son los números decimales y fracciones; donde la enseñanza y aprendizaje de estos conceptos ha cambiado por completo, aunque desgraciadamente son pocos los docentes que se han enterado todavía. Supone también un instrumento con muchísimas posibilidades para el cálculo mental.

La discusión no debe girar en torno a calculadoras si ó no, sino al **cómo utilizarlas en el aula** para desarrollar el mayor número posible de habilidades mentales en los alumnos.

Para tener más datos sobre esto, es necesario ver los videos-artículos del Colegio público Aguamansa de La Orotava, Tenerife, Islas Canarias, ESPAÑA. ([38010888@gobiernodecanarias.org](mailto:38010888@gobiernodecanarias.org))

\*\*\*\*\*

Un argumento débil relacionado con lo anterior es que cualquiera que apoye el uso de la calculadora en la escuela primaria debe estar a favor de rebajar el nivel del plan de estudios para hacerlo mas fácil y menos trabajoso. Tal postulado es totalmente falso. Yo desafío a cualquiera que lea este artículo hasta su conclusión a que denuncie que estoy proponiendo uno mas fácil o menos desafiante, un plan de estudios de matemática menos exigente. Otro argumento débil es que el uso de calculadoras en la escuela primaria debe estar asociado con la falta de atención a otras partes tradicionales de la aritmética de la enseñanza primaria tales como el valor de posición, las fracciones y las proporciones. Ha habido algunas críticas punzantes [Wu, 1998; Klein, 1998] en esta línea a las normas promulgadas por la Comisión de Standars Académicos de California. Pero todos estos temas tradicionales, e importantes, pueden y deberían estar en un plan de estudios de escuela primaria basado en las calculadoras. Si es cierto que a menudo cuando las calculadoras son ampliamente usadas, se reducen otros temas, entonces es un fallo de aquellos que diseñan y enseñan un currículum basado en las calculadoras; no es una consecuencia necesaria del uso de la calculadora. Nuevamente desafío a cualquiera que lea este artículo que afirme que estoy defendiendo cualquier debilitamiento del plan de estudios no-ALP de la escuela primaria.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

El uso de la calculadora en la escuela primaria, **no rebaja el nivel**. Por el contrario, **lo aumenta**. Gracias a ella es posible abordar actividades con niños de 6 y 7 años que de otra manera sería “imposible”. Como ejemplo ponemos la siguiente actividad realizada por alumnos de 1º y 2º, adaptada de un libro de enseñanza secundaria (14 años).

- *En un colegio , unos niños están trabajando con la calculadora. En la pantalla les aparece 70. ¿ Qué operaciones pudieron realizar para que aparezca ese número?*

Ver esta actividad en los videos-artículos del Colegio público Aguamansa de La Orotava, Tenerife, Islas Canarias, ESPAÑA. ([38010888@gobiernodecanarias.org](mailto:38010888@gobiernodecanarias.org))

La calculadora, no le resta tiempo a otras partes de la aritmética. Por el contrario, aumenta el tiempo que se puede dedicar a otros temas, y **permite profundizar hasta niveles donde antes nos parecía imposible**. Podremos, gracias a ella, abordar en los primeros niveles conceptos destinados tradicionalmente a los cursos superiores; por ejemplo, los números decimales. Esta herramienta no puede, ni debe ser el único material a utilizar en la clase de matemáticas, es un medio muy versátil y con muchas posibilidades, la gran mayoría, todavía están por descubrir.

El valor de posición no se puede abordar con la calculadora, debe hacerse mediante materiales estructurados, como las regletas de cuisenaire. **La calculadora no es una panacea.**

\*\*\*\*\*

Por lo tanto ¿es la ALP una facilidad necesaria, o incluso deseable, para el estudio posterior de las matemáticas?. Si un estudiante llega a la escuela secundaria, digamos a un primer curso de álgebra, incapaz de hacer ALP ¿esta ese estudiante ipso facto en desventaja comparado con los estudiantes con habilidades en ALP?. Entiendo que no es la destreza de ALP en si misma lo que los críticos del uso de la calculadora consideran importante. Después de todo, hay poco de la escuela secundaria u otras matemáticas que requieran mucho calculo en si mismo. Mas bien deben ser los beneficios auxiliares de desarrollar habilidades de ALP los que se consideren importantes. Estos generalmente son incluidos bajo la rubrica de la *alfabetización numérica* o *sentido del numero*, e incluso, además de los obvios de saber las tablas de la suma y de la multiplicación, cosas tales como saber que operación aritmética usar y cuando, tener un buen sentido del tamaño del numero y conocer estrategias para comprobar las respuestas de las operaciones aritméticas. Todo esto es importante. ¿Hay algo acerca de todo ello que un plan de estudios basado en calculadoras no podría infundir?. Pienso que la respuesta es, no, una proposición que sostendré por el curriculum que se reseña abajo.

\*\*\*\*\***ARMA**\*\*\*\*\*

Independientemente de que los alumnos hayan utilizado la calculadora en la enseñanza primaria, **¿cómo es posible que en la secundaria sigan haciendo ATOA?**, ¿Qué clase de Educación están recibiendo?, ¿A eso se va a un instituto, a principios del siglo XXI?. Cómo es posible que se siga invirtiendo tiempo de los profesores en trabajar **destrezas mecánicas**, con alumnos que no han sido capaces de

aprenderlas durante seis años de enseñanza primaria. Y aunque las hubieran aprendido, **no sé de qué les iban a servir**. Para lo único que son útiles es para sobrevivir en el sistema educativo.

En qué pueden ser útil conocer los ATOA a un estudiante de secundaria que se vaya a introducir en el álgebra: **¡en nada!**

En primaria, hablamos de la calculadora de cuatro operaciones. Pero, en secundaria, se encuentran las **calculadoras gráficas**, que suponen una revolución radical en la manera de aprender. Estas calculadoras, hacen posible que hoy se pueda comunicar la mejor educación matemática que alguna vez se haya podido pensar. Como consecuencia de su utilización, es innecesario dedicar tiempo en el aula a aprender manipulaciones simbólicas obsoletas que se realizan con bolígrafo y papel. **Estás calculadoras han cambiado para siempre la manera de enseñar matemáticas, y también han cambiado para siempre la manera en que los estudiantes las aprenden.**

Las preguntas del millón son: **¿qué hay que hacer para que los profesores de secundaria aprendan a utilizarlas?, ¿a quién les corresponde enseñarles?** El número de profesores que utilizan estas tecnologías en sus aulas es insignificantes, todavía no ha llegado a entrar en los institutos la calculadora gráfica, y ya llega: **¡la calculadora simbólica!**

- Para más información ver: "El papel de la computadora portátil. El álgebra simbólica en la Educación Matemática en el siglo XXI: ¡Un llamado para la acción! De Bert K. Waits y Franklin Demana en [WWW.ti.com/calc/spain/articulobertwaits.htm](http://WWW.ti.com/calc/spain/articulobertwaits.htm)

\*\*\*\*\*

Lo que muchos de los críticos del uso de la calculadora en la escuela primaria lamentan es la aparente pérdida de *la técnica* - si ustedes quieren, la capacidad de comprender y manipular símbolos - una pérdida que parece tan obvia a muchos matemáticos universitarios. Generalmente atribuyen este hecho al creciente uso de la calculadora. Esto es irónico ya que, pese a algunos usos de calculadoras en algunas escuelas primarias y bastante mas en aulas de la escuela secundaria, el uso real de calculadoras y ordenadores en las matemáticas escolares es todavía verdaderamente limitado. Así, este fracaso de la técnica, el cual, como muchos colegas de matemática universitaria, yo también reconozco y lamento, debe tener algún otro origen que el uso de la calculadora en el aula. En cualquier caso, convengamos que la técnica es crucialmente importante. Como dice Wu [1996], "Uno no puede adquirir comprensión sin técnica". En la transición de la escuela secundaria a la facultad, Askey [1996] se lamenta de la "falta de habilidades en álgebra" que hace muy difícil o imposible el aprendizaje del análisis. Pero lo importante aquí no es si con la ALP se puede adquirir el sentido numérico y con el la técnica operatoria. Seguramente la ALP puede lograr esto (aunque es posible dudar cuan a menudo el plan de estudios tradicional realmente lo logra). Antes bien el problema es si tanto la técnica como la numeración pueden ser plenamente adquiridas por los alumnos en un plan de estudios basado en la calculadora. Creo que el curriculum discutido abajo puede hacer ambas al igual que un plan de estudios basado en la ALP.

Un argumento aún en favor de unos mínimos de ALP es que proporciona a los niños su ‘mas temprana **introducción al poder de las matemáticas abstractas**’ [Ernest, 1998]. Verdaderamente, la ALP puede, en un principio, hacerlo, aunque uno puede preguntarse si los niños pueden captar muchas cosas acerca de la abstracción inherente a los números a partir de las manipulaciones de la ALP. En cualquier caso, aquí argumentaría de nuevo - y discutiré mas tarde en este artículo - que este aspecto de la ALP no tiene porque desaparecer en absoluto en un curriculum basado en las calculadoras.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Por favor, que alguien me explique donde está la **abstracción en los ATOA**. Son puras destrezas mecánicas, que la gran mayoría de las personas han aprendido a fuerza de fijarlas en la memoria, siendo muy pocos los que saben porque se hacen de esa manera. En los ATOA no hay abstracción.

\*\*\*\*\*

Quizás me incumbe referirme, aunque sea brevemente, al argumento de que si la ALP **siempre ha funcionado**, ¿porque no continuar enfatizándola? Primero, no siempre ha funcionado, hay mucha evidencia (tal como en [Johnson and Rising, 1967] ya referida en una previa nota al pie) de que muchos niños han permanecido esencialmente analfabetos numéricos con un curriculum clásico de ALP. En cualquier caso, por muy bien que un curriculum basado en la ALP haya funcionado en el pasado, actualmente esta funcionando pobremente de forma creciente en un mundo en el que prácticamente casi todas las personas usan calculadoras. De cualquier modo, no importa lo bien que la ALP haya funcionado y funcione, eso no es una razón para no sustituirla por algo mejor.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Los ATOA **tenían su sentido de ser hasta principios de los años 70**, donde era normal tener que hacer los cálculos con lápiz y papel. Pero, desde que se extendió la calculadora de cuatro operaciones, empezaron a dejar de ser funcionales. Por otro lado, son legiones de personas las que fueron rechazados por el sistema con la condición de fracasado escolar **por no saber hacer divisiones y multiplicaciones largas**, y como no, **raíces cuadradas**.

\*\*\*\*\*

Finalmente permítanme dejar constancia en esta sección de los tres pilares sobre los que se asienta mi argumentación:

1. **No hay evidencia en investigaciones** - mas bien al contrario - de que el uso de las calculadoras impida la comprensión por parte de los alumnos de la aritmética o la adquisición de las matemáticas posteriores.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Las investigaciones demuestran que la calculadora es una herramienta que favorece la inteligencia, y ayuda en la comprensión de los conceptos matemáticos. Además es un instrumento generador de conocimientos.

Resultados de la investigación, en los videos-artículos del Colegio público Aguamansa de La Orotava, Tenerife, Islas Canarias, ESPAÑA. ([38010888@gobiernodecanarias.org](mailto:38010888@gobiernodecanarias.org))

\*\*\*\*\*

2. No hay **experiencia**, ya sea individual o de los profesores de matemáticas de cualquier nivel, que apoye la **prohibición del uso de calculadoras en la escuela elemental**. Tal como ya indique, las razones experimentales aducidas por algunos profesores no están bien fundadas ni, creo yo, cualesquiera otras. Lo mas lastimoso del tema, a propósito, es que **matemáticos profesionales** cuya entera ethos se basa en las demostraciones, no solo no intentan demostrar lo que dicen (ciertamente "demostración" en asuntos educativos en general es un tema muy discutible) sino que ni siquiera ofrecen una mínima cadena de razonamientos para apoyar sus argumentaciones. O combinan irrazonablemente el uso de las calculadoras con otras debilidades curriculares. Por ejemplo, **Klein** [1998] critica el curriculum de la Comisión de California ya que "**permite a los estudiantes usar calculadoras en el tercer curso**, subestima el álgebra en el bachillerato y es vago y arbitrario". Una falta de énfasis en álgebra y vaguedad y arbitrariedad son bases sólidas para la critica pero no tienen ninguna relación con el uso de calculadoras en el tercer curso. ¿Por que es malo tal uso? Klein no lo dice; una razón de por que no lo hace es que carece de **argumentos sólidos** contra el uso de calculadoras en el tercer curso.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

No añadimos nada a este fragmento, porque creemos que los argumentos para confirmar las ideas de Ralston han sido expuestos en comentarios anteriores.

\*\*\*\*\*

3. Ni siquiera hay **razonamientos plausibles** para suponer que el uso de las calculadoras en la escuela elemental pudiera tener **efectos negativos** para los niños en el aprendizaje de las matemáticas. Por supuesto, si el uso de las calculadoras lleva a los niños a centrarse totalmente en ellas en la escuela elemental y en la secundaria, se convertirán en meros tecleadores con efectos mas bien desastrosos. Pero no solo no hay razón para que esto no suceda, esto no ocurriría en el tipo de curriculum que se discutirá mas adelante en este articulo.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Como hemos mencionado en las páginas anteriores, el uso de la calculadora en la escuela infantil y primaria, no produce efectos negativos. Por el contrario, produce habilidades mentales que los docentes no podemos proporcionar. La cuestión está en cómo usar la calculadora en el aula, y en cómo enseñar a los alumnos a trabajar con ella.

\*\*\*\*\*

## Cálculo mental.

Probablemente ustedes ya habrán notado que hasta ahora no ha habido ninguna mención al calculo mental en este articulo. Pero ya habrán inferido que cualquier propuesta que quiera desterrar la ALP por fuerza ha de sostenerse fuertemente en el calculo mental en cualquier curriculum propuesto para el recambio. En esta sección quiero explicar porque el calculo mental es tan importante en un curriculum sin ALP y, al mismo tiempo, como el **cálculo mental** puede proporcionar los beneficios que se supone proporciona la ALP y que raramente lo hace.

Es obvio - ¿o no? - que por razones de eficacia, dejando de lado otras razones cognitivas, cualquiera que carezca de **buenas habilidades de ALP** ha de ser capaz de hacer cantidades significativas de calculo mental. Seria muy aburrido estar obligado a tener que sacar la calculadora para, por ejemplo, **sumar 18 a 47**. Así, es importante especificar que tipo de cálculos han de realizarse mentalmente en un curriculum sin ALP. Pero aun mas importante que tal especificación es constatar los beneficios que aumentaran si los estudiantes aprenden a realizar mas cálculos mentales que los que hoy dia se suelen hacer.

Algunas veces la aritmética mental, tal como el aprendizaje de las tablas de sumar y multiplicar, es visto como un simple inicio para el aprendizaje de la ALP (como, por ejemplo, en [DFEE, 1998a, b]). Pero tal como recalcan Verschaffel y De Corte [1996], "la aritmética mental no es solo el inicio a los algoritmos computacionales estándares; mas bien al contrario es una **parte independiente del curriculum** por derecho propio".

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Coincidimos plenamente con Ralston, en que el **nuevo objetivo** dentro de los cálculos aritméticos, es el cálculo mental. ¿Dónde se hacen hoy en día los ATOA?, desgraciadamente, sólo en los centros educativos.

Aunque se tengan buenas habilidades de ALP; **¿de qué sirven?, ¿dónde se van a utilizar?**. No sólo las personas que carezcan de ellas, sino se debe intentar que todos los alumnos (futuros ciudadanos), tengan el mayor número de habilidades dentro del cálculo mental. **Si un alumno normal, recurre a la calculadora para hacer 18+47, es que se ha procedido mal con la calculadora**. Cualquier alumno normal, debe resolver esa operación mentalmente, pero no mediante el algoritmo tradicional, sino empleando otras estrategias; por ejemplo:

$$18+47=$$

$$10+40=50 \text{ y } 8+7=15, \text{ entonces } 50+10=60 \text{ y } 60+5=65. \text{ Por lo tanto, } 18+47=65$$

El trabajo en aritmética desarrollado por los profesores en las aulas, deben tener como principal objetivo: **“fomentar el desarrollo del cálculo mental (estimación)”**

\*\*\*\*\*

Ya he mencionado que a menudo la enseñanza de la ALP da como resultado buenos calculadores (humanos) que pueden comprender demasiado poco lo que están haciendo y que por tanto desarrollan muy poco sentido numérico. Esto es así porque, mientras que es perfectamente posible llegar a ser un adepto a la ALP comprendiendo lo que estas haciendo, es también posible **aprender la ALP mecánicamente, que es lo que demasiado a menudo ocurre**. El resultado es que en el momento en que llegan a la escuela secundaria, muchos estudiantes están perdidos para las matemáticas a causa de que no han aprendido nada mas allá de la ALP **mecánica y memorística**.

¿Es igualmente posible aprender el calculo mental de forma memorística? Sí, si todo lo que uno entiende por aritmética mental es la memorización de las tablas de sumar y multiplicar al igual que, quizás, las divisiones y sustracciones por un dígito. Pero si se entiende, como yo hago, algo mucho mas que eso, en particular, como mínimo todas las sumas, restas y multiplicaciones con dos dígitos, entonces no se puede, creo yo, argumentar que eso se puede hacer mecánicamente. Ciertamente, incluso **aunque uno puede, y debe, aprender algoritmos mentales** para hacer cálculos con varias cifras, la variedad de algoritmos personales (5) necesarios para ser un eficaz calculador mental excluye la aplicación memorística de estos algoritmos.

(5) Cómo hacer **el calculo mental multidígitos es un asunto individual con un enfoque personal** sobre como cada uno se encuentra mas cómodo. Aunque los profesores pueden guiar a los estudiantes en ciertas direcciones, sería poco inteligente y, prácticamente seguro, ineficaz intentar enseñar el mejor y único algoritmo mental para cualquier calculo mental multidígitos. De hecho, tal como los constructivistas puntualizarían rápidamente, dejar que los niños construyan su propia comprensión de que es lo que mejor funciona para ellos es exactamente aquello por lo que deberíamos guiarnos en la educación matemática.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Ralston es demasiado benevolente, cuando hace referencia a que los alumnos aprender los ATOA de una manera mecánica y memorística, diciendo que “es lo que demasiado a menudo ocurre”. No es lo que ocurre a menudo. Desgraciadamente es lo que ocurre en la mayoría de los casos, los alumnos aprenden los ATOA sin saber que son ni para que sirven. En la escuela, después de haber dedicado el 80% del trabajo escolar a practicar los ATOA durante años, es frecuente oír:

- *ALUMNO: ¿Maestra/maestro, este problema es de sumar, restar, multiplicar o de dividir?*

¿Qué ha pasado entonces?, ¿quién se ha equivocado?, ¿por qué hacemos los maestros lo que hacemos desde hace décadas?, ¿cuáles son la nuevas alternativas?, ¿y la resolución de problemas, dónde está?

Ver los videos-artículos del Colegio público Aguamansa de La Orotava, Tenerife, Islas Canarias, ESPAÑA. ([38010888@gobiernodecanarias.org](mailto:38010888@gobiernodecanarias.org))

Tendríamos que conocer a que se refiere Ralston cuando dice: “aprender algoritmos mentales para hacer cálculos con varias cifras”. Si son ATOA, no estamos para nada de acuerdo. Si cuando son otros algoritmos, que persiguen fomentar la psicogénesis del cálculo mental.

Cuando una persona se enfrenta a operaciones como:  $64.325 - 3.789 =$ , sin ninguna duda la debe hacer con la calculadora. Pero antes, realizaría mentalmente la siguiente estimación:  $3.789 \approx 4.000$ .

- Redondeo el sustraendo hacia la unidad de millar superior. Por lo tanto, he añadido aproximadamente 200 unidades. Entonces la resta quedaría:

$$\begin{array}{r} 64.325 \text{-----} + \text{ de } 200 \text{-----} \quad 64.500 \\ 3.789 \text{-----} + \text{ de } 200 \text{-----} \quad 4.000 \\ \hline \end{array}$$

- Decimos mentalmente a  $64.500 - 4.000 = 60.500$ . Entonces la diferencia debe ser un número alrededor de 60.500 (estimación).
- A continuación paso a calcular el exacto con la calculadora  $64.235 - 3.789 =$

\*\*\*\*\*

Consideremos entonces una multiplicación mental de dos cifras por dos cifras. Espero que vuestra reacción no sea que no podemos enseñar a todos los niños a hacerlo. ¿Como lo sabéis? (Mas abajo hablare sobre la evidencia de si esto se puede hacer o no) Precisamente cualquier partidario de la vuelta a lo básico cree que el curriculum matemático ha de **ser más exigente** y que los niños que estudian matemáticas han de **trabajar duro** en ellas. Y aunque los que se encuentran en la otra parte de la discusión son a menudo acusados de pretender "**rebajar el nivel**" del curriculum, de hecho eso es una calumnia ya que todo el mundo, si, todo el mundo, que esta a favor de un curriculum rico en el tema de las calculadoras también esta a favor de un curriculum exigente en matemáticas. Por tanto, si, muchos niños de 10 o 11 años de edad encontrarán difícil **multiplicar mentalmente  $46 \times 83$**  y requerirán **muchos días, semanas o meses** para aprender a hacer estos cálculos cuidadosamente. Pero, ¿cree algún lector de este articulo que no se puede enseñar esto a tantos niños como a los que se pueda enseñar a hacer, pongamos, una multiplicación con lápiz y papel de 5 dígitos por 5 dígitos? (Por supuesto, es una simple tontería intentar hacer a alguien eficaz en multiplicaciones de 5 dígitos por 5 dígitos; tales multiplicaciones se han de hacer *siempre* con calculadoras)

\*\*\*\*\***ARMA**\*\*\*\*\*

El trabajar con la calculadora en clase y en casa, no es un indicador de que se sea menos exigente y menos duro con los alumnos. **Todo lo contrario, permite a los profesores ser más exigentes** y abordar contenidos que de no ser por la calculadora, sería prácticamente imposible hacerlo. **En definitiva, el nivel no se rebaja, aumenta considerablemente.**

¿En qué parte del curriculum se obtienen resultados sólidos y seguros en el trabajo escolar, sin dedicar el tiempo suficiente al mismo? Por lo tanto, hay que **dedicar el tiempo que sea necesario** a desarrollar estrategias para el cálculo mental.

\*\*\*\*\*

Tal como se deduce del anterior párrafo, hay **ventajas significativas** en aprender a hacer calculo mental aparte de la eficacia calculadora. Muchos, probablemente la mayoría de los niños, lo encontrarán **difícil** pero, cuando lo consigan, no solo habrán aprendido una herramienta útil. Seguramente habrán mejorado su sentido numérico, e igualmente, habrán aprendido como organizar mentalmente un proceso de pensamiento no trivial ("pensando con tu cerebro" mejor que "en tu cerebro") [Sowder, 1992] que debería tener el beneficio subordinado de incrementar su capacidad de atención. Ciertamente, desarrollar la habilidad del calculo mental mutidigitos requiere justamente la clase de formación de la mente en el pensamiento lógico que los matemáticos han pensado siempre que es la gran ventaja de estudiar su disciplina independientemente de que tema se este aprendiendo. También he de hacer notar que, dado que hay una variedad de posibles estrategias para ejecutar cálculos mentales aritméticos, el calculo mental incorpora inherentemente formas de comprobar los cálculos, una habilidad enfatizada a menudo por los didactas de las matemáticas.

Pero **¿podemos esperar razonablemente enseñar cálculos mentales multidígitos a todos los niños?** La intuición me dice que mi respuesta es si. Pero hay ya alguna evidencia experimental [Zhang, 1997] de que puede hacerse. Adicionalmente, hay **evidencia de que no solo la adición y la substracción de 2 dígitos, sino también la de 3 dígitos puede enseñarse** incluso a los niños de tercer curso [Selter, 1995]. Aunque aun se necesita mas investigación sobre cuanto calculo mental puede ser enseñado en la escuela elemental, yo creo que sabemos lo suficiente y podemos inferir lo suficiente para incrementar ampliamente la cantidad de calculo mental que ahora se enseña en la escuela elemental.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

La ventaja más significativa de aprender cálculo mental (estimación), está en que es la habilidad que más utilizamos a diario, cuando tenemos la necesidad de hacer cálculos.

¿Por qué tiene que ser difícil? Eso dependerá de quien enseñe y de cómo enseñe. El concepto de difícil o fácil es relativo, está en función del marco teórico que envuelve al docente.

Ver los videos-artículos del Colegio público Aguamansa de La Orotava, Tenerife, Islas Canarias, ESPAÑA. ([38010888@gobiernodecanarias.org](mailto:38010888@gobiernodecanarias.org))

Intentaremos enseñar habilidades de cálculo mental a todos los alumnos. Aunque puede que nos encontremos con alumnos con dificultades de aprendizaje de muy diferente etiología, en estos, si no responden a las prácticas de la mayoría o a las adaptadas a ellos, utilizarán la calculadora como una simple máquina de cálculo. No los mortificaremos con esquemas conceptuales difíciles, para su nivel de comprensión.

En relación a la substracción de 2 y 3 dígitos, se recomienda conocer los apuntes sobre LA RESTA, elaborados por ARMA. Solicitarlos a la dirección: [antonio.martinadrian@gobiernodecanarias.org](mailto:antonio.martinadrian@gobiernodecanarias.org)

\*\*\*\*\*

Alguien podría pensar que, al poner el acento en la aritmética mental en lugar de la ALP se corre el peligro de perder la **idea de algoritmo** en las matemáticas de la escuela elemental. Recientemente este miedo ha sido expresado por un profesor de matemáticas en una lista de distribución de correo electrónico en la que escribió que "los **niveles básicos** [se refiere a la ALP] de competencia [deberían ser] requeridos **independientemente de la calculadora** (luego hay una cierta comprensión de lo que hace una calculadora!)". No deja de haber una cierta ironía en esto ya que los algoritmos usados por las calculadoras son típicamente bastante diferentes de los algoritmos de la ALP. Pero el extendido punto de vista de que los niños deben aprender la naturaleza algorítmica de las matemáticas tan pronto como sea posible es un argumento fuerte, particularmente para alguien como yo que he potenciado ampliamente el enfoque algorítmico a todos los niveles de las matemáticas. ¿Es entonces cierto que la clásica ALP da a los estudiantes una cierta percepción de la idea de algoritmo y que mi propuesta perdería este aspecto? En absoluto. En primer lugar, es dudoso que la enseñanza de la mayoría de la ALP proporcione una noción real de lo que son los algoritmos. Pero sea como fuere, el aprendizaje del cálculo mental no solo requiere, tal como indique más arriba, que los algoritmos (personales) sean desarrollados y aprendidos; también proporciona una oportunidad ideal para aclarar la noción de algoritmo.

Al aprender los niños a calcular mentalmente, ellos desarrollarán por necesidad sus propios algoritmos mentales para practicar cálculos multidígitos. Algunos de ellos (por ejemplo, para la multiplicación de dos dígitos por dos dígitos) serán bastante complejos. Pedir a los niños que escriban y expliquen sus métodos proporciona una excelente oportunidad para la introducción de ideas algorítmicas. (Por supuesto, esta es una actividad difícil. Explicar nuestros procesos de pensamiento para la mayoría de cualquier tarea no trivial es difícil, pero hacerlo es saludable y nos obliga a concretar las nociones intuitivas.)

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

¿Por qué trabajar los ATOA independientemente de la calculadora?, ¿dónde están los argumentos que sustentan esta postura? Si es porque se necesitan en la vida de todos los días, entonces mejor sería hacerlos con calculadora, que tiene la ventaja de ser más rápida y equivocarse menos. ¿Cuándo ha sido la última vez que cada uno de los lectores ha tenido necesidad de hacer los ATOA fuera de la escuela? Esta pregunta es de muy difícil respuesta.

¿Qué es lo que la práctica repetida de los ATOA aporta conceptualmente y en qué mejora la capacidad matemática de quien los hace? ¿Qué ocurre con los alumnos – la mayoría- que tienen más fallos que aciertos cuando tropiezan con las divisiones largas o las multiplicaciones con decimales?

\*\*\*\*\*

Unas palabras sobre **la división**. Aunque ya han pasado más de 15 años desde que el informe Cockcroft [1982] recomendara que las divisiones grandes no se enseñaran más en las escuelas británicas, esta recomendación ha sido, como mucho, implementada parcialmente. El curriculum estándar del Gabinete de Educación de California [California, 1998, p43] exige a los estudiantes el dominio de las **divisiones grandes**. Esto es desconcertante. La única excusa posible es que los que promulgaron los estándares de California creen que las divisiones grandes son buenas para el espíritu. No es solo que el capacitarles para las divisiones grandes no tenga ningún valor práctico,

sino que además, el **tiempo empleado** para enseñar este algoritmo es **excesivo** con respecto a cualquier beneficio que se pueda conseguir del hecho de aprenderlo. *Por supuesto*, los estudiantes han de aprender que es una división, cuando hay que aplicarla, que son los restos y como resolver mentalmente problemas con divisiones sencillas. Pero enseñar las divisiones grandes no se corresponde con ninguno de estos objetivos; es tan estúpido como enseñar el **algoritmo de la raíz cuadrada** que ha sido practica educativa corriente hasta **tiempos recientes**. No puedo evitar creer que los que están a favor de la enseñanza de las grandes divisiones en la escuela elemental (e incluyo a algunos investigadores matemáticos [Klein, 1998]) están influenciados por alguna fantasía sobre lo que es importante y útil en las matemáticas escolares (6)

(6) Me ha sido argumentado [Dubinsky, 1998] que mientras los estudiantes no **dominen las divisiones grandes con lápiz y papel**, tendrán grandes dificultades para comprender **la división con polinomios**. No es cierto. Enseñemos por todos los medios el algoritmo de Euclides en un momento adecuado y enseñemos a los estudiantes como usarlo (con una calculadora!) para calcular cocientes dígito por dígito. (Esto, a propósito, requiere que los estudiantes usen sus habilidades aritméticas mentales) Usando la comprensión de este algoritmo como base, será posible, e incluso fácil, enseñar la división de polinomios.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

En los últimos años, después de la Reforma educativa que han experimentado muchos países, es frecuente ver la discusión entre profesores con **respecto a la división**: ¿cómo es mejor hacer el algoritmo, como siempre o dejando las restas parciales?. Mucho se ha hablado respecto a este tema. Y aunque, algunos investigadores tenemos demostrado que es más comprensible cuando se dejan las restas parciales, **la gran conclusión es: “ninguno de los dos es útil”**. ¿Quién los hace fuera de un centro educativo. ¡Nadie!

¿Cómo es posible que alguien siga intentado sustentar su inclusión en los currículum? La respuesta es obvia, es porque **no conocen otras alternativas**, y defienden lo que tienen en sus estructuras mentales haciendo en ocasiones verdaderos malabarismos intelectuales.

Sigue dedicándose a los ATOA, la mayoría del **tiempo de la clase** de matemáticas. ¿Por qué?, ¿Para qué?, ¿Qué ocurre con la resolución de problemas?

Sigue Ralston siendo benevolente cuando dice que la enseñanza del **algoritmo de la raíz cuadrada** era práctica frecuente hasta hace poco tiempo. En el entorno educativo que nosotros conocemos –bastante amplio–, **es práctica habitual**, para mala suerte de los alumnos. Y no es que el profesorado sea malo, es que nadie les ha hecho ver todavía que esas destrezas ya son inútiles desde hace décadas.

¿Para que sirve **hacer divisiones de polinomios** con bolígrafo y papel?, ¿Tal vez, sólo para sobrevivir en el sistema educativo?

\*\*\*\*\*

Finalmente unas palabras sobre otra ilusión respecto al calculo mental, esto es, si deseas fortalecer el calculo mental en la escuela elemental, se deduce que desaconsejas el **uso de las calculadoras**. En Numeracy Matters [DFEE, 1998a] hay un loable énfasis en el calculo mental (también lo hay en [DFEE, 1998b]). Pero esto conduce al non sequitur de que "la importancia del calculo mental inevitablemente tiene implicaciones para un **juicioso uso de las calculadoras**" entendiendo por "juicioso" el "desalentar tanto como sea posible el uso de las calculadoras" con

**niños menores de 12 años.** ¿Por que no es tan claro para todo el mundo como lo es para mi que el calculo mental es mas importante cuando las calculadoras se usan en las clases que cuando no se usan? Esto no es así solo - o incluso principalmente - por las razones de eficacia dadas al comienzo de esta sección. Ello es así porque, como todos sabemos, la probabilidad de errores graves al usar las calculadoras (a causa de la selección errónea de la tecla) es mayor que con la ALP, los usuarios de la calculadora han de ser capaces de **estimar mentalmente** los resultados de sus cálculos. Recientemente en una lista de distribución un profesor remarco que "las viejas generaciones poseen un sentido instintivo del numero que les permite olfatear rápidamente una respuesta disparatada, esta es una capacidad de la que carecen las jóvenes generaciones". Si esto es así, debe ser porque "las jóvenes generaciones" no han aprendido a ser buenos calculadores mentales y utilizar esta habilidad para "olfatear rápidamente una respuesta disparatada"

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Los comentarios ha este fragmento han sido realizados en las observaciones de las páginas anteriores.

\*\*\*\*\*

## **Matemática de la escuela primaria sin ALP.**

**Suprimir ALP en la escuela primaria** puede sonar **radical** para algunos pero, para aquellos de ustedes que no pueden decidirse a abrazar esta idea, como se sentirían acerca de postergar cualquier instrucción en ALP hasta el 6° grado?. Esto suena algo radical, también, no es así?. Pero, en realidad es una vieja idea probada satisfactoriamente en la década de 1920 por el superintendente de la escuela de Manchester, New Hampshire y registrada en un articulo que debería ser leído por todos los educadores de matemática [Bezenet, 1935-36; ver también Gleason]. La idea de Bezenet parece haber tenido una muerte súbita pero tal vez ustedes coincidirán en que un curriculum con menos ALP no esta muy lejos de esta idea de 70 anos de antigüedad.

En cualquier caso, lo que propongo para los primeros, digamos, ocho años de escuela (K-7; una suposición implícita es que el álgebra debería ser tema de octavo grado) es lo siguiente:

**1.** Un énfasis en aritmética mental desde el momento en que cualquier idea aritmética mas allá de contar (la cual, por supuesto, es en si una actividad mental) se introduce primero. Esto significa, en particular, que a medida que se introduce cada operación aritmética, se esperara que los chicos hagan cálculos mentales usando esa operación. Por supuesto, como parte de esto, se esperara que los chicos aprendan la suma y las tablas de multiplicar en el **momento apropiado**. De acuerdo con el párrafo anterior, no hago suposiciones acerca precisamente de cuando se **debería introducir cualquier operación aritmética**. Bien puede ser que, como Bezenet sugirió y Gleason apoyo, no hay una buena razón para introducir aritmética tan tempranamente como se acostumbra ahora. Claramente los chicos tendrían muchas, variadas y substanciales experiencias con números desde el jardín de infancia en adelante. Esto es mucho mas importante que su forma precisa.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Se **deben suprimir** de una manera **radical e inmediata** los ATOA de los centros educativos, y fomentar el descubrimiento y puesta en común de algoritmos personales y más operativos.

Hay también que hacer una **reconfiguración radical de métodos y programas** de enseñanza desde la **educación infantil hasta la universidad**. Sería lamentable que un alumno de bachillerato con conocimientos de integrales sea suspendido en el examen de ingreso a la universidad por no saber “sacar “ la raíz cuadrada (GUZMÁN ROJAS, 1979).

Los conceptos que encierran los ATOA, pueden ser abordados en **cualquier nivel de la escuela infantil y primaria**. Ahora bien, los ATOA deben ser suprimidos y eliminados para siempre de la educación.

\*\*\*\*\*

2. Las calculadoras deberían estar permitidas no solo desde la etapa de **educación infantil** sino que su uso debería ser estimulado. Verdaderamente, aquí está el porque el uso de calculadoras y la enseñanza de la aritmética mental deberían estar intercalados ya que la instrucción en una será reforzada por el uso de la otra y viceversa. Por supuesto, es obvio que la parte de aritmética mental del curriculum debe ser impuesta en un ambiente no-calculadora como también la aplicación de ALP de aritmética mental en la **solución del problema**. Por otro lado, las calculadoras deberían estar permitidas en todas las situaciones de pruebas. El propósito del uso de la calculadora no debería ser el valor negativo de evitar la ALP sino uno positivo de proveer ejercicios y problemas que desarrollen el sentido del número y la comprensión de la aritmética. Cuando se introducen los **decimales y las fracciones**, las calculadoras se deberían usar para ilustrar la relación entre las dos, que son los infinitos decimales y por que aparecen, etc.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Para conocer temas relacionados con la **calculadora en la educación infantil**, Ver los videos-artículos del Colegio público Aguamansa de La Orotava, Tenerife, Islas Canarias, ESPAÑA. ([38010888@gobiernodecanarias.org](mailto:38010888@gobiernodecanarias.org))

La calculadora ha revolucionado la enseñanza y el aprendizaje de los **decimales y las fracciones**. Ver los videos-artículos del Colegio público Aguamansa de La Orotava, Tenerife, Islas Canarias, ESPAÑA. ([38010888@gobiernodecanarias.org](mailto:38010888@gobiernodecanarias.org))

\*\*\*\*\*

3. Nada de lo anterior debería servir para suponer que la aritmética mental y las calculadoras deberían ser la únicas herramientas para enseñar aritmética. **Materiales manipulativos** y otros **modelos aritméticos** (por ejemplo, el modelo de área para la multiplicación) deberían continuar jugando un rol importante. Al igual que, como ya se observo, los profesores deberían ciertamente usar los algoritmos de ALP para ilustrar operaciones aritméticas siempre que se juzgue útil y conveniente. Y, en cualquier caso, el lápiz y el papel, como un medio experimental y de registro debería continuar jugando un rol importante en las matemáticas de la escuela primaria (y secundaria). Por ejemplo, no debería haber objeción, en principio, de hacer **multiplicaciones de 2**

dígitos por 2 dígitos escribiendo abajo dos productos de 1 dígito por dos dígitos hechos mentalmente y luego sumar estos **mentalmente**.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

El uso de la calculadora, por si solo, **no constituye una panacea** para hacer una construcción adecuada del conocimiento lógico-matemático en los alumnos. Es una herramienta más, pero con “infinitas” posibilidades. Los **materiales manipulativos** son imprescindibles para formar una buena inteligencia matemática en las personas. Hay conceptos que si no es por los materiales, son de muy difícil o nula comprensión.

Estamos de acuerdo en hacer multiplicaciones de dos números, para **desarrollar el cálculo mental (CM)**, pero nunca utilizando los ATOA. Una alternativa, empezando de izquierda a derecha, puede ser:

$$23 \times 45 = 800 + 100 + 120 + 15 = 1.035$$

\*\*\*\*\*

**4.** Reitero un punto dicho anteriormente: se debería esperar que los chicos trabajen duro y piensen duro en toda su instrucción matemática. No obstante, creo que un régimen de calculadora-aritmetica mental puede completar todos los objetivos del mejor curriculum ALP imaginable con menos tiempo de instrucción total ya que, al menos, aunque se requerirá mucha practica para crear buenos calculadores mentales, el esfuerzo involucrado debería ser menor que el que es usual ahora en la practica de la ALP.

**5.** En mi opinión una de las ventajas (y atractivos) mas importantes de suprimir ALP y reemplazarla por un curriculum de calculadora y aritmética mental es el **tiempo adicional** que dejaría disponible para estudiar otras matemáticas en la escuela primaria. Por supuesto, es verdad que ahora se enseñan cosas además de la ALP en la escuela primaria, por ejemplo algo de geometría. Pero el papel dominante de ALP en el curriculum de la escuela primaria es tal que el resto de los temas se tratan de **manera somera** y los chicos rara vez salen de la escuela primaria con habilidades o conocimientos matemáticos significativos mas allá de la ALP. Pero, por supuesto, no justamente la geometría sino otras matemáticas, probablemente, una temprana introducción a **aspectos del álgebra** y otras que ustedes podrían señalar, están bien dentro del alcance intelectual de los estudiantes de la escuela primaria. La introducción de estos temas en las matemáticas de la escuela primaria debería preparar a los estudiantes para la matemática de la escuela secundaria mucho mejor de lo que generalmente están ahora y podría, a la vez, enmudecer las criticas de los matemáticos universitarios acerca del conocimiento de los estudiantes que ingresan a la universidad.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Coincidimos plenamente con Raslton en lo que plantea en este fragmento. La calculadora nos permite **profundizar en aspectos del currículo** que de otra manera sería casi imposible. Nos da la posibilidad de investigar, cuestiones impensables hace poco tiempo en 1º de primaria.

Ver los videos-artículos del Colegio público Aguamansa de La Orotava, Tenerife, Islas Canarias, ESPAÑA. ([38010888@gobiernodecanarias.org](mailto:38010888@gobiernodecanarias.org))

En relación a la **introducción al álgebra**, se pueden ver los trabajos realizados en el colegio público Aguamansa en 2º de primaria con las regletas de Cuisenaire.

Ver los videos-artículos del Colegio público Aguamansa de La Orotava, Tenerife, Islas Canarias, ESPAÑA. ([38010888@gobiernodecanarias.org](mailto:38010888@gobiernodecanarias.org))

\*\*\*\*\*

**6.** Una palabra acerca de la **abstracción**. Mencione antes que una crítica de suprimir la ALP es que la ALP provee a los estudiantes de una introducción temprana a la abstracción. Pero eso también lo hace similarmente la aritmética mental aunque dudo mucho que los niños mas pequeños sientan la idea de abstracción en absoluto cuando son introducidos a los números por primera vez. Pero la abstracción es una de las ideas mas importantes en matemática y en absoluto supera las capacidades de los estudiantes de la escuela primaria, una aseveración probada por la facilidad con la que muchos estudiantes de la escuela primaria desarrollan programas de ordenadores donde la abstracción en forma de variables puede no ser evidente pero es ciertamente inherente. Ya mencione arriba una introducción temprana al álgebra en la matemática de la escuela primaria. Ciertamente, esto es posible, tal vez en quinto grado, mas probablemente en sexto grado y ciertamente en séptimo grado. ¿Que profesor de matemática de la escuela secundaria o de la universidad no estaría de acuerdo que si todos los logros de la matemática de la escuela primaria se redujeran a la mas elemental noción de variable, esto proporcionaría un maravillosa introducción a la matemática de la escuela secundaria?.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Un elemento indispensable para llevar a los alumnos a la **abstracción**, lo constituyen los **materiales manipulativos**. Entre ellos, nosotros destacamos las regletas de Cuisenaire, con las cuales se puede abordar prácticamente todo el currículo de matemáticas de primaria, y muchos conceptos de secundaria.

Ver los videos-artículos del Colegio público Aguamansa de La Orotava, Tenerife, Islas Canarias, ESPAÑA. ([38010888@gobiernodecanarias.org](mailto:38010888@gobiernodecanarias.org))

\*\*\*\*\*

Lo anterior no es - y no intenta ser - un completo curriculum de matemática de la escuela primaria. Es, mejor dicho, un intento de convencerlos de que se podría desarrollar un curriculum de matemática de escuela primaria con menos ALP - real, creo yo, y fácilmente desarrollado - que prepararía a los estudiantes para la matemática de la escuela secundaria mucho mejor de lo que están actualmente ya no en Estados Unidos sino en cualquier parte (y mucho mejor de lo que lo lograría cualquier curriculum propuesto en los EEUU). Además, creo que lo haría - de todas maneras podría - sin el aburrimiento que muchos estudiantes sienten ahora con la matemática de la escuela primaria y que hace perder una sorprendente proporción de talento matemático inherente a los estudiantes americanos que ingresan en la escuela por primera vez.

## Escuela secundaria y Matemática posterior.

Cual seria el impacto de un curriculum de matemática de escuela primaria de menos ALP sobre la matemática de la escuela secundaria y de la universidad?. Como el intento es tener estudiantes mejor preparados para la matemática de la escuela secundaria de lo que están ahora, el impacto seria enteramente positivo. En particular, estudiantes mejor preparados permitirían al curriculum de la escuela secundaria introducir nuevas materias útiles - estadística, matemáticas discretas, etc. - como ya se esta haciendo ahora en un cierto numero de lugares, sin abandonar las materias tradicionales. Pero ¿como afectaría el estilo de matemática propuesto antes a lo que es enseñado en la matemática de la escuela secundaria y como es enseñado?

Los **matemáticos universitarios** que se oponen al uso de la calculadoras en la escuela secundaria lo hacen así principalmente porque, como señale antes, tienen la creencia, que yo también comparto, de que "no se puede tener comprensión sin técnica". He argumentado que, con respecto a la aritmética, la técnica y la comprensión que se sigue de esta se debe lograr a través de la aritmética mental. ¿Cual es la analogía relevante a la matemática de la escuela secundaria (y posterior)?.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

La gran mayoría de los **profesores universitarios y de secundaria** que se oponen a la utilización de la calculadora aritmética, gráfica o simbólica; **carecen de formación didáctica en estas herramientas**. Por lo tanto, lo que hacen es justificar su ignorancia en estos temas, la cual es superada por la mía en el uso de las calculadora gráficas y simbólicas. Pero, no hay que dejar de reconocer, que suponen una revolución psicodidáctica. Hay que **admirar, y alentar** a los profesores universitarios y de secundaria – una minoría -, que llevan años intentando enseñar a alumnos y compañeros profesores el manejo de estas tecnologías.

\*\*\*\*\*

Apenas sorprenderá a quienquiera que haya leído esto hasta aquí que, de la misma manera que estoy a favor del uso completo de la tecnología en la escuela primaria, estoy a favor de su uso en la escuela secundaria, calculadoras gráficas, ordenadores-calculadoras simbólicas y ordenadores. Pero como entonces lograran técnicas los estudiantes -la técnica algebraica es crucial aquí - si se les permite completamente el uso de calculadoras?. Como ha dicho Edward Effros [1989]: "Puedo enunciar categóricamente que si un estudiante no puede factorizar  $x^2-9$  *instantáneamente* es extremadamente probable que [el estudiante] no apruebe el análisis". Estoy de acuerdo. El camino a la técnica algebraica en un mundo de calculadoras es esencialmente el mismo que el camino a la técnica aritmética, llamada álgebra mental. Seguramente no es irracional esperar que los estudiantes de álgebra hagan una gran cantidad de álgebra de polinomios mentalmente. Además, aunque como normalmente se enseña ahora, tareas como completar cuadrados son tareas esencialmente mentales las cuales usan el lápiz y papel como medio de registrarlas. Aun voy mas allá que Effros y desearía que los estudiantes fueran capaces de factorizar una variedad de cuadráticos de 3 términos mentalmente. Y, por supuesto, como con la aritmética mental, debería haber una evaluación de álgebra mental sin calculadoras.

Mas generalmente, al igual que adquirir el sentido del numero es el objetivo esencial de enseñar aritmética, lograr el *sentido del símbolo* debería ser el objetivo esencial de álgebra. El sentido del símbolo es mas difícil de definir que el sentido del numero pero este incluye cosas tales como ser capaces de predecir *la forma* del resultado de un calculo simbólico (¿De que grado es el producto de dos polinomios?.), la capacidad de seleccionar la mas adecuada de varias formas equivalentes (por ejemplo, polinomios, cuadrados completos o forma factorizada de una cuadratica), tener juicio acerca de lo razonable de un resultado (si hay 6 veces mas estudiantes que profesores, ¿expresamos esto como  $6P=E$  o  $6E=P$ ?), desarrollar competencia en expresiones simbólicas de ingeniería (dados algunos puntos en el plano, encontrar una función algebraica o trigonométrica que pase a través o los encierre a todos ellos), etc. (Ver [Arcavi, 1994] para una buena discusión del sentido del símbolo). Los estudiantes que tienen este sentido del símbolo, sin importar si usan calculadoras gráficas o simbólicas estarán bien preparados para estudiar análisis.

Aunque los matemáticos universitarios han sido mas lentos para usar tecnología en sus enseñanzas que los científicos e ingenieros, han comenzado a hacer incursiones en años recientes. Aun hay demasiadas personas cuyas percepciones sobre los sistemas simbólicos matemáticos (sistemas de álgebra de ordenadores AKA), tales como Mathematica y Mapple, son las mismas que las que tienen sobre las calculadoras para los niños de la escuela primaria. Un resultado es que a pesar de la así llamada reforma del análisis, el propósito de la mayoría de cursos de análisis de facultades aun parecen estar para crear un estudiante-máquina el cual traga funciones por sus fauces y las derivadas e integrales emergen al otro extremo. Y esto a pesar del fracaso demostrable de los cursos de análisis para producir estudiantes con mas que una comprensión mecánica de la materia. Tanto si están de acuerdo con mi creencia de hace años de que la matemática discreta debería jugar un rol igual al calculo en el curriculum de la universidad [Ralston, 1981], como si no, no puede haber ninguna excusa mas para que los cursos de análisis no hagan un uso mas completo de la tecnología y enseñen a los estudiante a hacer mentalmente mucho de lo que hasta ahora hacen mecánicamente.

## ¿Podría funcionar mi propuesta?.

Podría — prácticamente - implementarse mañana. Se podría desarrollar un curriculum detallado, se podrían escribir libros de texto, planificar lecciones, etc. Seamos optimistas para que políticos, padres, matemáticos - todos estos grupos antediluvianos - puedan ser convencidos de la justicia de abolir la ALP. Pero ¿están los profesores de la **escuela primaria** en si listos para tal curriculum?. Temo - y me gustaría equivocarme - que aun los profesores mas excelentes de la escuela primaria tendrían serias dificultades para enseñar tal curriculum. Esto es principalmente porque su **preparación** para enseñar matemática en la escuela primaria **ha sido lamentablemente** escasa y los ha preparado para enseñar poco aparte de la ALP clásica. Pero también es porque muchos profesores (la mayoría?) atraídos para enseñar en la escuela primaria están **menos interesados en la matemática** que en cualquier otra materia; en efecto, con demasiada frecuencia los profesores de la escuela primaria sufren de **matematofobia**.

¿Cuantos **profesores de escuela primaria**, por ejemplo, están preparados para enseñar calculo mental de 2 dígitos?. ¿Cuantos de ellos tienen los conocimientos para enseñar los otros aspectos de la matemática que entrarían en el curriculum si la ALP fuera reemplazada por un curriculum de **aritmética-calculadora** mas exigente pero de menos tiempo de consumo mental? Algunos de estos problemas podrían ser aliviados con el cuadro actual de profesores de escuela primaria con una apropiada **formación permanente**. Para los futuros profesores seria necesaria una educación de matemática inicial mucho mejor, e intensiva.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

¿Están los profesores de la **escuela primaria** listos para tal currículo?. Debemos mentalizarnos todas las personas que intervenimos en la educación, que los males de enseñanza se deben a muchos factores. No exclusivamente a la formación de los maestros.

Planteamos también, ¿están los **profesores de secundaria y universitarios** preparados para un currículo basados en el CM, las calculadoras y la resolución de problemas. Por supuesto que no, los que están son una mínima expresión.

Si la preparación de los maestros ha sido lamentable, tendríamos que preguntarnos: **¿quién los preparó?** La respuesta es, la universidad. Por lo tanto, el principal tramo educativo que necesita una reforma radical en cuanto a métodos y formas de enseñar, es el universitario. Sin embargo, es el que menos se reforma y más se resiste a los cambios.

La **matemafobia** de muchos docentes se debe a que aprendimos en un sistema donde lo importante era hacer algoritmos, para poder sobrevivir en el sistema educativo. Aunque no se supiera bien para que servían, incluso por parte de algunos profesores.

Los **maestros que están preparados** para abordar un currículo diferentes, basado en las calculadoras y el CM son pocos, al igual que los de secundaria y universidad. Es necesario una formación permanente y obligatoria. Pero, **¿quién la va a dar?, ¿la universidad?** Ya sabemos que la formación inicial de los profesores es muy deficiente y desconectada de la realidad educativa, y quien los formó fue la universidad. Por lo tanto, si la formación permanente del profesorado va a estar exclusivamente en sus manos, nos aventuramos a pronosticar que los cambios no serán notables, seguiremos igual que siempre. Hace décadas que la universidad, por lo general, no da respuesta claras a los problemas que presenta la Educación.

\*\*\*\*\*

Pero en tanto en cuanto **la matemática este abajo en la escala de intereses** de los profesores de la escuela primaria actuales y posibles, es poco probable que se pueda progresar mucho de esta forma. Es justamente poco probable que personas con talento para las matemáticas y con intereses en ella que sean atraídas para la enseñanza de la escuela primaria ya que la mayoría del curriculum de la escuela primaria incorpora, como debe ser, materias basadas en el lenguaje. Esto es cierto incluso para las ciencias de la escuela primaria que es casi enteramente descriptiva.

Realmente hay una única solución. Consiste en hacer que se enseñe gran parte, si no toda la matemática de la escuela primaria por **profesores especialistas** tanto como en el caso de materias como música, educación física y lenguas extranjeras. Algunas escuelas han ensayado tentativamente en esta dirección con un especialista de matemática cuya tarea es dar consejo y ayuda a todos los profesores. Otra solución parcial es el equipo de profesores (team teaching) en el cual la enseñanza de la matemática se haga por aquellos profesores que estén mas cómodos con la matemática. Ambas ideas son del todo buenas, pero creo que, inevitablemente, no pueden ser completamente efectivas al implementar el curriculum descrito en este artículo. Aun los especialistas de matemáticas de la escuela primaria raramente tienen la formación y amplitud de conocimiento matemático y perspectiva para enseñar o aconsejar sobre un curriculum de calculadora y calculo mental.

Mi conclusión es que los **profesores de matemáticas** han de ser **especialistas** que realicen *toda* la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, desde al menos el tercer grado si no antes, y es la única solución si el curriculum se va a cambiar radicalmente. Esta es claramente una solución a largo plazo. *Pero pronostico que no se hará gran progreso en la educación matemática de los estudiantes americanos de escuela primaria (y, en consecuencia, también secundaria) hasta que esta solución sea implementada.* Hasta entonces, la permanencia del pobre rendimiento de los estudiantes americanos en las comparaciones internacionales y la desesperación de los profesores universitarios con respecto a la preparación matemática de sus estudiantes será un fenómeno continuo en la escena educativa de América.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Coincidimos con Ralston en que se necesita hacer una **revisión profunda de las especialidades** que intervienen en le educación primaria. Y que tal vez, no estén todas la especialidades que debieran haber, y también sobre alguna que actualmente está. Para conocer más sobre este tema, se recomienda leer el artículo: **“El futuro de la educación matemática después de la reforma educativa en España”**, solicitarlo a [antonio.martinadrian@gobiernodecanarias.org](mailto:antonio.martinadrian@gobiernodecanarias.org)

\*\*\*\*\*

### ¿Necesitamos la investigación?

Por supuesto, la necesitamos. Siempre necesitaremos **la investigación**. Pero la cuestión inmediata es: ¿Hay alguna propuesta en este artículo que *requiera* una investigación previa antes de someter a prueba la propuesta? O, dicho de otra manera: un principio guía de la innovación educativa debería ser, al igual que en medicina: Por encima de todo, no causar dolor. Luego, ¿es posible que los estudiantes ‘privados’ de la oportunidad de aprender ALP pueden ser dañados por ello?

Ya adelanto que mi respuesta es no. Puesto que ya nadie argumenta que el conocimiento de la ALP es un instrumento útil en la vida diaria (o en las matemáticas), la cuestión es solo si tal ‘privación’ puede dejar a los estudiantes sin la comprensión o las técnicas necesarias para estudiar las matemáticas posteriores. Podemos desconocer cuanta aritmética mental puede esperarse que aprenda el estudiante medio, y seguramente necesitaríamos investigar para saberlo, pero yo no veo como alguien pueda argumentar que un curriculum de la escuela elemental basado en el calculo mental y las calculadoras, que fue exigido para los estudiantes y que les introdujo a considerablemente mas matemáticas fuera de la aritmética de lo que hoy es usual, pueda hacerles

algún *daño*. Verdaderamente un curriculum enfatizando el sentido numérico en este contexto puede difícilmente hacerlo, y sin embargo prepararía a los estudiantes que cursaran las matemáticas de la escuela secundaria como mínimo tan bien como se les prepara hoy.

Si, muchas de las argumentaciones de este artículo han sido *ex cathedra* pero no voy a pedir disculpas por ello. Mis argumentos están, de hecho, mucho más basados en la **experiencia** y en la **investigación** que los argumentos de los que desean continuar manteniendo a los niños bajo el régimen de la ALP. Por tanto, si, más investigación por todos los medios posibles pero en cualquier caso no hay razón alguna para que las **ideas expuestas en este artículo** no puedan ser puestas en práctica antes de realizar investigaciones complementarias.

Es importante recalcar que nada en este artículo está en desacuerdo con ninguna investigación práctica, experimental o teórica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (ver, por ejemplo, **Kamii** [1985]) Realmente, yo esperarí que muchos de los proponentes de un enfoque constructivista de las matemáticas aplaudieran un curriculum que enfatiza que los niños construyan su propia comprensión de las matemáticas a través del cálculo mental.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

Algunos investigadores, **ya han aportado datos concretos y muy positivos sobre el uso de la calculadora en la escuela infantil y primaria**. Entre ellos destacamos al **colegio público Aguamansa de La Orotava, Tenerife, Islas Canarias (ESPAÑA)**, donde se lleva desde hace años un línea de investigación-acción que tiene como objetivo mejorar la calidad de los métodos de enseñanza y aprendizaje. Estas investigaciones pretenden incrementar la conciencia de los profesores sobre su "implicaciones educativas", para **influir** sobre la puesta en práctica sobre **cambios estructurales, tanto en las escuelas como en el sistema educativo**. (ELLIOT, J.).

En este centro se lleva desde hace de ocho años, poniendo en práctica la **filosofía constructivista de Constance Kamii** para la elaboración del conocimiento lógico-matemático por parte de los alumnos. La calculadora no es un instrumento nuevo en este centro.

Muchas de las **ideas expuestas en este artículo por Ralston, han sido investigadas, demostradas y confirmadas en este colegio**. Para más información, se ruega ver los videos-artículos elaborados en el colegio público Aguamansa ([38010888@gobiernodecanarias.org](mailto:38010888@gobiernodecanarias.org))

\*\*\*\*\*

## Notas finales

La reforma de la Educación Matemática es un tema muy debatido actualmente, particularmente en Estados Unidos. Lo que ha sido llamado "la guerra de las matemáticas" [Becker and Jacob, 1998; Jackson, 1997; Ross, 1998] ha opuesto a matemáticos, didactas de las matemáticas, otros educadores, padres y políticos unos contra otros en una formación desconcertante de contextos en los cuales el curriculum, la pedagogía, la formación del profesorado, los libros de texto y la tecnología son todos objetos de controversia. Una ironía de todo esto, en mi opinión, es que, mientras que las decisiones cruciales que se han de tomar conciernen a las matemáticas de la

escuela elemental, los principales protagonistas son matemáticos profesionales, que raramente comprenden los problemas de fondo con respecto a las matemáticas de la escuela elemental, y el NCTM (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas) que, aunque se trata de una organización cuyos miembros e intereses comprenden las matemáticas de la escuela elemental y secundaria, esta dominada por didactas de las matemáticas universitarios y por profesores de secundaria. El resultado es que las matemáticas de la escuela elemental obtienen muy a menudo poca atención, incomprensiones o cosas peores en los debates sobre educación matemática.

Algunos de los debates sobre educación matemática conciernen a temas tales como cuanto se ha de centrar el curriculum de las matemáticas escolares en la resolución de problemas, si la pedagogía matemática puede y debe ser influenciada por los recientes trabajos sobre las teorías sobre el aprendizaje y sobre un enfoque constructivista de las matemáticas, y sobre si las nuevas propuestas de curriculum dan un peso suficiente a los temas tradicionales como el álgebra y la trigonometría. No he discutido aquí estos temas porque opino que las propuestas hechas en este artículo son igualmente validas sea el que sea el lado en que cualquier lector se posicione en estos temas.

Mi opinión es que un curriculum basado en las calculadoras y en el calculo mental enseñado por un especialista matemático en la escuela elemental no será tan solo un curriculum mejor que el que ahora se enseña (virtualmente) en todas partes, sino que a menos que este enfoque sea adoptado en las matemáticas de la escuela elemental, unas grandes mejoras en la capacidad de los estudiantes americanos en la escuela elemental, secundaria y universitaria continuaran siendo una quimera.

\*\*\*\*\*ARMA\*\*\*\*\*

**En definitiva, los algoritmos tradicionales de las cuatro operaciones aritméticas: ¡Han muerto, y deben ser enterrados! No son útiles en siglo XXI. Son parte de la historia de la Psicopedagogía. ¡Vivan las calculadora y el cálculo mental!**

\*\*\*\*\*

## Referencias

American Mathematical Society [1995-97]: Varios articulos y cartas al director en the Notices of the American Mathematical Society .

Arcavi, A. [1994]: Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics, For the Learning of Mathematics, 14, 24-35.

Askey, R. [1996]: In Views on High School Mathematics, Notices Am. Math. Soc., 43, 866-873.

Becker, J. and Jacob, B. [1998]: `Math War' Developments in the United States (California), ICMI Bulletin, 44, 16-25.

Benezet, L.P. [1935-36]: The Story of an Experiment, J. of the National Education Association, 24, 241-244 and 301-303; 25, 7-8.

California Academic Standards Commission [1997]: Mathematics Content Standards (1 October)

<http://www.ca.gov/goldstandards>.

California Board of Education [1998]: Mathematics Framework for California Public Schools K-12 (10 December)

<http://www.cde.ca.gov/cilbranch/eltdiv/mathfw.htm>.

Cockcroft, W. H. et al [1982]: Mathematics Counts, London: HMSO.

Department for Education and Employment (UK): [1998a]: Numeracy Matters: Preliminary Report of the Numeracy Task Force, London: DFEE.

Department of Education and Employment (UK): [1998b]: The Implementation of the National Numeracy Strategy: The Final Report of the Numeracy Task Force, London: DFEE.

Dubinsky, E. [1998]: Personal communication.

Effros, E. [1989]: Commentary in Education Week, 12 April.

Ernest, P. [1998], Personal communication.

Gardiner, T. [1998]: Back to the Blackboard, The Times, 8 May 1998.

Gelernter, D. [1998]: Put Down That Calculator, Stupid!, New York Post, 21 May.

Gleason, A.: Delay the Teaching of Arithmetic?, Unpublished manuscript.

Hembree, R. and Dessart, D.J. [1986]: Effects of Hand-held Calculators in Precollege Mathematics Education: A Meta-analysis, *J. For Research in Math. Educ.*, 17, 83-99.

Hiebert, J. and Wearne, D. [1986]: Procedures over Concepts: The Acquisition of Decimal Number Knowledge in Conceptual and Procedural Knowledge: The Case for Mathematics (J. Hiebert, Ed.), Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Jackson, A [1997]: The Math Wars, Parts I and II, *Notices Am. Math. Soc.*, 44 (June/July and August), 619-702; 817-827.

Johnson, D.A. and Rising, G.R. [1967]: Guidelines for Teaching Mathematics, Belmont, CA; Wadsworth.

Kamii, C. K. (with DeClark, G.) [1985]: Young Children Reinvent Arithmetic: Implications of Piaget's Theory, Early Childhood Education Series.

Kitchen, A. [1998]: Message on the email discussion list Mathematics Education at Nottingham University, UK, 12 January.

Klein, D. [1998]: The State's Invisible Math Standards, Los Angeles Times, 3 May.

National Council of Teachers of Mathematics [1989]: Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston, VA: NCTM.

Ralston, A [1981]: Computer Science, Mathematics and the Undergraduate Curricula in Both, Am. Math. Monthly, 88, 472-485.

Ralston, A. [1997]: A Zero-Based Curriculum: What It Is and How It Might Be Used in A Zero-Based Mathematics Curriculum: Proceedings of a Working Group at the Eighth International Conference on Mathematical Education, Seville, July 1996 (H. Neill and A. Ralston, Eds.) Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham.

Ross, K. [1998]: Reality Check: At Baltimore Standards Forum, All Quiet Along "Math Wars" Front, Focus, Newsletter of the Math. Assoc. of America, 18 (May/June), 1, 4.

Saxon, J. [1990]: Transcript of 60 Minutes, CBS News, 4 March.

Schmidt, W. H., McKnight, C.C. and Raizen, S.A. [1997]: A Splintered Vision: An Investigation of US Science and Mathematics Education, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Selter, C. [1995]: From Teaching to Learning Mathematics, Keynote Lecture at Panama Conference, Noordwijkerout, The Netherlands.

Shuard, H. et al [1991]: Children, Calculators and Mathematics, London: National Curriculum Council,.

Sowder, J. [1992]: Estimation and Number Sense in Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (D. A. Grouws, Ed.): New York: Macmillan.

Verschaffel, L. and De Corte, E. [1996]: Number and Arithmetic in International Handbook of Mathematics Education, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Wu, H. [1996]: The Mathematician and the Mathematics Education Reform, Notices Am. Math. Soc., 43, 1531-1537.

Wu, H [1998]: Some Observations on the 1997 Battle of the Two Standards in the California Math War, Department of Mathematics, University of California at Berkeley.

Zhang, D. [1997]: Some Characteristics of Mathematics Education in East Asia - An Overview from China in Proceedings of the Seventh Southeast Asian Conference on Mathematics Education (N. D. Tri et al, Eds.), Hanoi 1996, Hanoi: Vietnamese Mathematical Society.

### **Otras referencias:**

- EL USO DE LA CALCULADORA EN EL AULA. I JORNADAS DE LA SOCIEDAD CANARIA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS "ISAAC NEWTON", Tenerife (Bajamar) . Mayo 1979

- LA CALCULADORA DE BOLSILLO Y LA FORMACIÓN MATEMÁTICA DEL NIÑO. NINO. Vs. NÚMERO .Iván de Guzmán Rojas  
Editorial Khana Cruz SRL (1979). La Paz .Bolivia

- ELLIOT, J: "La investigación-acción en educación". Morata. Madrid