“ALGO SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS” AUTOR: JOSÉ ANTONIO FERNÁNDEZ BRAVO. REVISTA SIGMA, NOVIEMBRE DE 2006, NÚM 29, 29-42 SIGMA ES LA REVISTA DE MATEMÁTICAS PUBLICADA POR EL DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN Y EDUCACIÓN DEL GOBIERNO VASCO EN COLABORACIÓN CON LOS BERRITZEGUNES (ANTIGUOS CENTROS DE ORIENTACIÓN PEDAGÓGICA, COP) DE BILBAO, VITORIA Y SAN SEBASTIÁN WWW.BERRIKUNTZA.NET

ALGO SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

José Antonio Fernández Bravo

RESUMEN

Empezamos analizando el concepto que los niños y niñas, de edades comprendidas entre los 9 y los 12 años, tiene de "problema", contrastándolo con su forma de actuar en la resolución de éstos. Partiendo, entonces, de la realidad en la que desde el aprendizaje nos encontramos, analizamos el cómo se enseña, discutiendo algunas ideas sobre la intervención educativa. Los datos que obtenemos de ambos análisis nos permiten sugerir métodos que incorporen necesariamente razonamiento y creatividad. Terminamos, utilizando la “pregunta” – o mejor, el arte de preguntar- como modelo didáctico que canalice el aprendizaje para la resolución de problemas, entendiendo que resolver un problema es demostrar su solución o ausencia de ésta.

PALABRAS CLAVE. Resolución de problemas matemáticos. Educación Primaria. Didáctica de la Matemática. Método y metodología. Creatividad.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, la preocupación porque la resolución de problemas fuese una actividad del pensamiento, ha generado una inquietud de búsqueda de solución a un problema que, cada vez más, se presenta como “fracaso escolar”. Siguen siendo actuales las indicaciones del informe Cockcroft (*Las matemáticas sí cuentan*, 1985: 90-91) donde se acentúa la utilidad de las matemáticas en la medida en que pueden ser aplicadas a la resolución de problemas. Añade lo importante que es ayudar a los niños a comprender las nociones matemáticas y a reconocer el tipo de cálculo o de procesos mentales que requiere una situación problemática. Sin embargo, veinte años más tarde, los datos recogidos revelan una incorrecta aplicación de los conocimientos a las situaciones problemáticas y una elección de estrategias en las que, generalmente, interviene el azar y no el razonamiento; la impetuosa necesidad de llegar a un resultado es lo que más importa (Gaulín, 2001). La iniciativa, la creatividad, la concentración y la asimilación de técnicas de base en la resolución de situaciones, son prácticamente inexistentes y están subrayadas por una reiteración de movimientos apoyados en la imitación de intenciones vacías -muchas veces no comprendida-, y, por lo tanto, desnaturalizada en los procesos y resultados. La participación, la autoestima y la seguridad del alumno, así como el gusto por la tarea mencionada, intervienen habitualmente de forma negativa.

Alrededor del 70% de los individuos (Instituto Nacional de la Calidad y Evaluación (INCE)), presentan dificultades para la resolución de problemas matemáticos. Se observa en ellos la tendencia general a imitar modelos realizados anteriormente, articulando preguntas que dejan al descubierto su falta de seguridad y comprensión de conceptos básicos. Los diseños curriculares subrayan la necesidad de pensar, como principio activo en la resolución de problemas; pero, esto es tan escaso en la práctica como reconocido en la teoría.

Cada vez más, la resolución de problemas matemáticos como actividad escolar, depende de planteamientos metodológicos adecuados que permitan generar ideas desde la observación, la imaginación, la intuición y el razonamiento lógico. A este afán de comprensión hay que añadir la necesidad de extensión, de los conceptos adquiridos, al entorno inmediato en el que el alumno se desenvuelve, con el claro objetivo de aplicar correctamente las relaciones descubiertas, y descubrir otras nuevas que aporten al conocimiento amplitud intelectual.

EL "PROBLEMA" EN EL PROBLEMA DEL QUE APRENDE

En más de 400 casos se ha analizado el concepto que los niños, de edades comprendidas entre los 9 y los 12 años, tiene de "problema", contrastándolo con su forma de actuar en la resolución de éstos.

De las investigaciones realizadas se obtienen cinco *clases* distintas en tanto a la relación: concepción de "problema" - forma de actuar, en las que podemos incluir la generalidad de los casos. Son las siguientes:

1. *Acomodación operativa con necesidad de solución*

A esta *clase* pertenecerían aquellos alumnos que identifican problema con una determinada forma de presentación, en la que incluyen un conjunto de operaciones "disfrazadas". Estos alumnos hacen operaciones con el fin de obtener un resultado cualquiera, y no el resultado. Lo importante es llegar a una solución, y tienen la seguridad de que ésta se recoge después de hacer alguna operación. Acomodan -en una estética de la composición- algo que les haga dar por terminado el problema. No estudian la solución; expresan lo que han obtenido aunque nada tenga que ver con lo que se les ha preguntado.

Algunas de las concepciones sobre "problema" expresadas por estos alumnos son las siguientes:

- "Una serie de palabras con números y preguntas que hay que averiguar el número que tiene que salir"
- "Lo que se resuelve con operaciones"

- "Una frase que se responde con números"
- "Un escrito que hay que resolver con sumas, restas, multiplicaciones y solución"

2. *Reflexión operativa*

A esta *clase* pertenecerían los que admiten que un problema es algo que ayuda a pensar. No obstante, esta clasificación está enmarcada en una complejidad; existen alumnos que admiten que hay que pensar, pero no actúan pensando, y existen, también, los que son consecuentes con lo que admiten. En este sentido, dentro de esta *clase* habría dos subclases: *Reflexión operativa consciente* y *Reflexión operativa inconsciente*. Estarían en la primera de las subclases, aquellos niños que reflexionan, razonando la estrategia que utilizan. Suelen ser ágiles de pensamiento y creativos. Generalmente, terminan correctamente el problema y son capaces de explicar el proceso seguido. A la segunda de las subclases, pertenecerían aquellos sujetos que saben que hay que pensar pero que no lo han asimilado en su forma de actuar; suelen proceder de manera similar a la expresada en la clase 1 - Acomodación operativa...-

La concepción de "problema" de todos estos alumnos es la misma, distinguiéndose, únicamente, en su forma de actuar:

- "Algo muy pensativo que tienes que resolver"
- "Una situación difícil que nos ayuda a pensar"

3. *Sustitución de contenido*

Estos alumnos confunden el instrumento con su función. Entienden por problema un conjunto de operaciones difíciles. Una operación es un problema siempre que ésta sea difícil. Generalmente, no llegan a la solución. Dejan la resolución del problema a medias. Lo dan por terminado cuando aun no es así; es el "hacer por hacer".

Utilizan expresiones parecidas a las siguientes para definir lo que entienden por problema:

- "Una división, una suma o una resta difícil"
- "Un lío de operaciones cada año más largas y mas difíciles"
- "Algo que nos dicen los profesores para aprender las cuentas"

4. *Imitación de iniciativas*

A esta *clase* pertenecen aquellos alumnos que hacen bien, únicamente, lo que saben hacer. No son creativos y se sienten felices con la reiteración de ejercicios. Protestan cuando no se han hecho problemas similares, descargando la responsabilidad en la enseñanza del profesor. Mecanizan procedimientos a partir de asociaciones intuitivas, buscando imitar algo que se haya hecho anteriormente. Son aquellos alumnos que no saben calcular el área de un rectángulo que aparece en posición vertical, porque su mente siempre asocia un rectángulo en posición horizontal.

Estos alumnos suelen expresar su concepción de problema con un ejemplo o señalando una función práctica; así, podríamos encontrar formulaciones como las siguientes:

- "Es aprender lo que le falta de dinero"
- "Es cuando te dicen tengo 10 caramelos y te dan 8 ¿cuántos caramelos tengo?"
- "Es lo que sirve para aprender mucho"

5. *Negación consciente*

Pertenecen a este grupo los sujetos que se han rendido ante la resolución de problemas. Creen que es algo inaccesible para ellos. Suelen dejar el problema en blanco, ni lo intentan. Aunque, en ocasiones, se limitan a rellenar el espacio que se deja para su resolución con un dibujo, o copian algún dato del enunciado que expresan de distinta forma a como aparece en el problema. Así, si en el enunciado del problema aparece, por ejemplo, el dato numérico 30, en la resolución aparece este dato como resultado de alguna operación: 10 + 20 = 30.

La concepción que estos alumnos tienen sobre "problema", la expresan con estructuras similares a las siguientes:

- "Una manera de complicarte la vida"
- "Un rollo"
- "Un lío"
- "Algo difícil y aburrido"

Como se pude observar, después de haber analizado las cinco clases, una mejora de los resultados indicaría un considerable volumen de alumnos integrados en la clasificación de la *Reflexión operativa consciente*: "Lo que importa sobre todo es que el niño aprenda a pensar. Que obre por principios, de los cuales se origina toda acción" (Kant, 1803:39).

LA “RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS” EN EL PROBLEMA DEL QUE ENSEÑA

En el terreno educativo, las estrategias de elaboración se relacionarían con actividades tales como intentar poner en relación la nueva información con la que ya poseemos, hacerse preguntas, utilizar analogías y modelos que ayuden a la comprensión (Gagné, 1991). Los heurísticos de Polya (1992) o las indicaciones de las distintas fases y subfases de realización de un problema, se podrían considerar estrategias de elaboración para el aprendizaje de la resolución de situaciones problemáticas. No obstante, no dejan de ser formulaciones de reglas, imposiciones adscritas al qué se hace y cómo se hace con las que, en ocasiones, no se consigue elaboración alguna. Las estrategias de elaboración deben permitir crear las reglas, no seguirlas. Si se sigue la regla se habitúa al alumno a actuar de una determinada manera, pero ¿sabrá qué hacer cuando esa regla no se pueda aplicar? Si se crean, en un contexto de investigación y en un entorno de descubrimiento, se sabe por qué y para qué se han creado, a partir de qué

necesidad se han generado. "¿Podría decirse: "Al calcular, las reglas te parecen inexorables; sientes que sólo puedes hacer eso y no otra cosa, si quieres seguir la regla?" Wittgenstein (1987: 279) El celo de explicar al niño las distintas formas de hacer anula, en cierto modo, la creatividad. Cuando el alumno sigue la regla, la información, "el ser así": en cálculo, en situaciones problemáticas,... no sólo está aprendiendo que "esto" es "así", sino que todo lo que no sea "así", no es "esto". "Nuestra enfermedad es la de querer explicar" Wittgenstein (1987: 281). Es el alumno el que escribe los criterios, el que los codifica. Nosotros codificamos sus códigos en tanto a un lenguaje y simbología matemática, en tanto a una nomenclatura y unas formas científicas de proceder, pero después, y sólo después de que hayan sido por ellos descubiertos. La estrategia de elaboración debe conseguir que el alumno acceda a la construcción de criterios necesarios.
De lo que estamos hablando, entonces, es de la elaboración causal de la estrategia de elaboración. La diferencia consiste en que la estrategia de elaboración pertenece al alumno, y la elaboración de actividades en las que estas estrategias sean posibles, al profesor. La función de un programa de intervención en el que se plantean una serie de actividades, no es la de indicar las distintas formas de hacer éstas, sino la de favorecer, en el alumno, la creación de estas posibles formas de hacer.

Para Polya, la resolución de un problema se apoya en cuatro fases: "Comprender el problema. Concebir un plan. Ejecución del plan. Visión retrospectiva" (Polya, 1992: 19). Como epistemología de la resolución de problemas puede ser respetado, aunque sea ésta, actualmente -por el carácter de la enseñanza/aprendizaje- incompleta. Como estrategia de elaboración para el alumno, inaceptada. La información de estas fases únicamente nos advierten de las partes del proceso de elaboración, que no podemos confundir con la estrategia que forma parte del proceso creativo. Por un lado, entonces, lo externo a la realización; por otro, lo intelectual. Supongamos que para andar se deben realizar cuatro fases, a saber: " Querer moverse. Estar de pie. Avanzar una pierna con respecto a la otra. Avanzar la otra, respecto a la primera". ¿Todos los que no supiesen andar, aprenderían de esta manera? Esto podría ser lo externo de la realización del andar. Pero, ¿sólo hay que considerar lo externo? ¿Y el cerebro? ¿Y el sistema nervioso? ¿Y la madurez del individuo? ¿Logra andar el que realiza esas cuatro fases?

Analicemos: "Comprender el problema". Es evidente la necesidad de su comprensión para poder llegar a resolverlo. 1) Existen alumnos que lo resuelven perfectamente. Es lógico suponer que lo han comprendido. 2) De los que no lo resuelven, algunos de estos: a) Lo comprenden; otros: b) No lo comprenden. ¿Qué necesidad, como estrategia de elaboración, tenemos de informarle al alumno que para resolver el problema es necesario comprenderlo? El que lo comprende lo comprende sin decirle que es necesario comprenderlo. El hecho de comprenderlo no implica saber hacer el problema. Y, en el hecho de saber hacer el problema está implícita su comprensión. Los alumnos que no comprenden el problema no lo van a comprender porque les informemos de lo necesaria que es su comprensión. Para leer un libro es necesario abrirlo, y nadie dice: "Abre el libro", "lee".

Analicemos: "Concebir un plan". Nada de lo que el niño hace es por azar. Todo, absolutamente todo, tiene un por qué; otra cosa es que desconozcamos sus causas. El desconocimiento de éstas no implica su inexistencia. El conocimiento científico se apoya en esta consideración como principio de avance. El respeto al hacer del alumno es de esencia pedagógica. Todo alumno que ha resuelto un problema ha concebido un plan, aunque este no le haya llevado a la solución correcta. Lo importante es cómo enseñar al alumno a concebir planes. Son muchas las ocasiones en las que las formas de enseñar no se acercan a las formas de aprender, y se acercan "recetas mágicas" con las que se cree cubierta la enseñanza, aunque no el aprendizaje. Desatar los paradigmas que oprimen la creatividad y la intuición del alumno es principio prioritario para aprender a concebir un plan. La receta apuesta por un pensamiento paralelo al que ha tenido el que la ha creado; y una cosa es enseñar y que el niño aprenda, y otra, muy distinta, es permitir que desarrolle su propio pensamiento. La información de concebir un plan, nada dice sobre concebirlo si no se ha concebido, y si se ha concebido, ¿para qué informar? Yo puedo comprender intelectualmente el concepto dinero, pero eso no quiere decir que sea millonario.

Analicemos: "Visión retrospectiva". Se trata de comprobar la validez de lo que se ha realizado, verificar el resultado y el razonamiento. ¿Qué entiende el niño de Educación Primaria por "comprobar"? ¿Qué hay que hacer para "comprobar"? La comprobación, en estas edades, debe formar parte del proceso de explicación, de la escucha a los demás, de la contrastación con sus compañeros; en definitiva, de la comunicación. Esta debe estar apoyada en el diálogo, no en la exposición; y debe hacer intervenir al profesor como un elemento más. El desarrollo de la reversibilidad de pensamiento es la esencia de esta dialéctica de interacción personal.

No obstante, la intención de Polya se aleja mucho de la receta dogmática que genera ideas brillantes. La indicación de las fases de realización de un problema va dirigida a la atención de la mente adulta que es capaz de dirigir y tener en cuenta para la consecución de objetivos claros, y no para que se ofrezcan, como se ofrecen en las aulas[1], a la independencia del pensamiento y a la oportunidad del recurso. Las fases, como reglas, obturan la capacidad inventiva y las facultades intelectuales de descubrimiento. "Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. [...] Si [El profesor] dedica su tiempo a ejercitar a sus alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad" Polya (1992 : 5)

LO QUE SE PROPONE: LA "RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS" EN EL RAZONAMIENTO, LA MATEMÁTICA Y LA CREATIVIDAD

---

1 .- Seminario "Ramón Aller" (1994). Puig, L./ F. Cerdán (1988: 26-28) (En esta obra la fase "Elaboración de un plan" de Polya, se denomina "Traducción" y a la fase "Ejecución del plan", fase de "cálculo") La distinción entre lo que el profesor debe conocer sobre la actividad y lo que debe conocer el alumno, es importante. El papel del profesor es distinto al papel del alumno. El profesor debe saber que el alumno tiene que concebir un plan; el alumno tiene que concebirlo. Estas fases forman parte del conocimiento didáctico para la elaboración de la actividad. Del mismo modo hablaríamos si hubiésemos analizado otros modelos, por ejemplo, el de Mason, J./ Burton, L. (1989)

La elaboración de la actividad por el profesor, y la creación de estrategias de elaboración por el alumno, son fuentes de recursos diferentes. Se sabe, que la primera fase de realización de un problema es la comprensión de éste. Se sabe, que la lectura detenida y reflexionada ayuda a la fase en cuestión. Esta información es para el profesor, no para el alumno. La función del profesor no es la de transmitir la información que posee, sino la de provocar su realización. Haciendo uso del conocimiento que se tiene se elaborarán actividades cuya finalidad esté ligada, más a generar ideas, que a escuchar contenidos. Así, por ejemplo, ante un enunciado dado, se plantean distintas soluciones. El trabajo del alumno consiste en crear las preguntas que, a partir del enunciado, se corresponden con todas y cada una de las distintas soluciones[2]¿...? Solución: No... El niño tendrá que leer atentamente, y varias veces, el enunciado, hasta comprender las relaciones que debe tener en cuenta para la expresión lógica de la pregunta en cuestión. Se abrirá la oportunidad de saber cuáles son los datos significativos, cuál es la incógnita, o si la condición es suficiente. No será necesario que informemos de la necesidad de su lectura y comprensión; se ha provocado la lectura del texto las veces que se precise desde una acción totalmente libre; se ha elaborado una actividad que ha supuesto, en definitiva, la estrategia de elaboración pretendida.

Más que conocer las fases que intervienen en la resolución de un problema, lo que necesita el alumno son situaciones significativas que le aporten posibilidades de enfrentamiento a dicha resolución. Cuando a un alumno se le propone un problema lo primero que hace es leerlo, pero leerlo significa seguir unas palabras que el cerebro descodifica para proyectar la idea de lo que éstas significan; más que leer lo que dice, intenta entender lo que pone. Esa intención provoca una fotografía mental que va a permitir que el alumno enuncie el problema con sus palabras, en una formulación interior que establece una dinámica de relaciones en correspondencia con lo que ha entendido.

Goza de exagerada importancia en la resolución de problemas matemáticos permitir que el alumno elabore, enuncie y genere ideas, -como si desglosásemos las necesidades que se requieren para resolver problemas por orden de prioridad- No es conveniente exigirle más, en un principio.

Las etapas, aparentemente necesarias, para la resolución de problemas, son: **Elaboración**, **Enunciación**, **Generación de ideas**, **Trascripción simbólica de las ideas** -traducir al lenguaje matemático el plan abordado en la generación de ideas-, **Realización** -utilización de los instrumentos de cálculo necesarios que me permiten llevar a cabo las ideas traducidas, **Contrastación** -se establece una correspondencia entre el resultado obtenido y todas y cada una de las etapas anteriores, estudiando la concordancia lógica en función de la solución que se haya indicando, mediante la comunicación de ideas llegando a conclusiones válidas.

---

2 .- A partir del siguiente enunciado, escribe la pregunta que se corresponde con todas y cada una de las soluciones presentadas: " Dos barras de pan del mismo precio cuestan, entre las dos, 13 céntimos menos que un litro de leche. He comprado esas dos barras de pan y ese litro de leche. He pagado con 2 euros y me han devuelto siete céntimos."
¿...? Solución: 90 céntimos
¿...? Solución: 58 céntimos
¿...? Solución: El litro de leche.

Las primeras situaciones problemáticas a las que se tiene que enfrentar el alumno son aquellas en las que el número no existe, es secundario o va apareciendo en la medida que él lo considera necesario, y en este orden. "Se deja caer una pelota que está encima de un armario y una pelota que está encima de una silla. ¿Qué pelota llegará antes al suelo?" Observemos, a partir de esta situación, mediante el dialogo, cómo ha sido elaborada, cómo enunciada en sus mentes y cuáles son las ideas que pueden generar; que cojan confianza y seguridad en sí mismos, que todos puedan hablar, que se enfrenten a una pluralidad de alternativas: ¿Se han dejado caer las dos pelotas a la vez?, ¿dónde has supuesto que estaba la silla?, ¿podría estar la silla en una posición más alta que el armario?, ¿crees necesario completar el enunciado para contestar con seguridad?,...

Otra situación problemática que en estos comienzos se puede plantear: "Me he quedado sin dinero" (sí, ya está); que elaboren, que enuncien, que busquen lo necesario, que determinen lo que es o, no es, lógico, que construyan lo que falte: ¿Por qué te habrás quedado sin dinero?, ¿Cuánto dinero llevabas?, ¿has prestado dinero a algún amigo?, ¿Te has comprado algo?, ¿te has quedado sin dinero antes o después de comprarlo?,...

Existen un sin fin de situaciones capaz de generar ideas y permitir que el alumno profundice en el contenido implícito que se representa en la composición del lenguaje, entendiendo que, más que palabras lo que tiene es una relación de significados.

Cuando lo que se pretende es dirigir la mente del alumno a situaciones cuya solución depende de operaciones matemáticas, se parte de situaciones capaces de generar ideas de distinción y comprensión de todas y cada una de las distintas operaciones. El cómo lo indican las reglas de cálculo que permiten obtener una solución. Antes de hacer la suma, que me permite, por ejemplo, dar solución a un problema, el alumno ha tenido que elegirla de entre todas las demás operaciones. El cómo se hace está subordinado al saber hacer.

La adición o Suma

Una cosa es hacer sumas y otra, muy distinta, es saber qué es sumar. En ocasiones, el hacer no implica el saber y el saber no implica el hacer, y ambas implicaciones son necesarias en la resolución de problemas. Empezaremos por interpretar mentalmente una acción sumativa a partir de una propiedad fundamental: El resultado de una suma es siempre mayor que todos y cada uno de sus sumandos, cuando estos son distintos de cero. Mediante una situación abierta capaz de generar ideas canalizaremos las respuestas del alumno hacia el descubrimiento y la comprensión de esta propiedad fundamental. Sirva, como ejemplo, la siguiente situación como propuesta de diálogo: "En una caja en la que hay un número de canicas se echan 5 canicas. ¿Cuántas canicas hay, ahora, en esa caja?" Sus expresiones serán variadas. La palabra "depende" saldrá rápidamente; el concepto de función está en sus mentes: puede haber siete, ocho,... pero, no puede haber cinco, no habrá menos de cinco, siempre más. "Se sabe que esa caja está rota y que al moverla se pierden las canicas. Se sabe que se mueve, una y otra vez. ¿Cuántas canicas se pueden perder?" No se sabe exactamente pero, sí podemos decir que se pierden más de dos, y más de tres y, con seguridad, más de cinco, ¿Más de cinco?, ¿cuántas más? Las que hubiese en la caja antes de echar las cinco. Entonces, si antes de echar las cinco, había tres canicas en la caja, ¿cuántas se pueden perder? Digamos ocho, pero… seguimos diciendo más que cinco.

El alumno interpreta mediante este tipo de situaciones una acción sumativa debido a que el alcance de las consecuencias previstas a partir de la información indica la obtención de un número mayor. Como se puede observar se huye intencionadamente de la asociación lingüística de palabras con la operación; sumar no es juntar, porque si fuese juntar todo lo que no fuese juntar no sería sumar. También se suma cuando se "pierde", cuando se "da", cuando se "presta"; podemos decir, entonces, que sumar es aumentar, siendo el alumno el que interprete en las expresiones de una multitud de situaciones la infinita extensión de esta idea.

La sustracción o resta

El resultado de una resta representa la diferencia numérica, atendiendo al orden de los números naturales, que existe entre dos números: a - b = c. Esta diferencia cumple una propiedad fundamental: c + b = a, sin entender esta propiedad difícilmente se puede comprender la naturaleza del contenido intelectual de una sustracción. Sirva como ejemplo la siguiente situación para una propuesta de diálogo: Se dibujará en la pizarra un tramo de escalera de diez escalones entre dos descansillos, de tal forma que para ir de un descansillo a otro sea necesario subir esos diez escalones. Dibujando a dos niños en el descansillo inferior y una puerta en el superior, plantearemos el siguiente desafío: "¿Qué crees tú que se disponen a hacer estos niños?"

Diálogo: ¿Por qué? ¿Cuántos escalones pueden subir?, ¿Pueden subir más de diez?, ¿Pueden subir menos de diez?, ¿Se pueden parar?, ¿Por qué se paran?, ¿Dónde se paran? "Un niño se para en el segundo escalón mientras que el otro no ha empezado a subir, ¿a quién le quedarán menos escalones que subir?", ¿Cuántos menos? Y, si se hubiese parado en el sexto escalón, mientras el otro aún no hubiese subido ninguno, ¿a quién de estos niños le quedarían menos escalones que subir?, ¿A quién le quedarían más escalones que subir?, ¿Cuántos más? Se sabe que un niño se para en el tercer escalón, ¿cuántos escalones le quedan a este niño por subir? ¿Por qué, si tiene que subir diez?, ¿Cuántos escalones le quedarán por subir al otro niño? Se sabe que un niño se encuentra en el descansillo superior, mientras que el otro aún no ha terminado de subir porque está descansando en uno de esos escalones, ¿cuántos escalones tiene que bajar el que ya ha subido para situarse en el mismo escalón en el que está el niño cansado?, ¿...?

Esta interacción de preguntas-respuestas genera ideas, capaces de intelectualizar los factores intervinientes más importantes para la interpretación mental de la resta; a saber:

-La diferencia entre la parte y el todo no puede ser mayor que el todo.
-La diferencia entre una parte A y el todo es otra parte B tal que la suma de A y B equivale al todo.

Si un señor está en el kilómetro 23 y tiene que llegar al kilómetro 32, para averiguar los kilómetros que le faltan por recorrer es necesario advertir que le faltan menos, pero menos que qué. Si situamos al alumno en la posición cero, el número de kilómetros que tiene que recorrer para llegar al kilómetro 32 es 32; si le situamos en el kilómetro 10 observará que no son 32, que son menos que antes, que son 10 menos que 32.

La complementariedad implica la consideración de un total respecto a una parte de ese total. Será el alumno quien extienda la idea de disminución a un sin fin de situaciones capaces de ser reconocidas por esta idea, con independencia de las expresiones utilizadas -siempre que sean conocidas por él- en la información cuya pregunta indique consecuencias de esta índole.

La clasificación de los problemas que se define por problemas de Cambio, de Combinación, Comparación e Igualación, no tiene, a nuestro juicio, incidencia alguna como aportación didáctica, ni por su estructura, ni por su tipología. El alumno no debe distinguir un problema por su tipología porque estará memorizando una forma de análisis que cuando no recuerde le hará fallar; su aprendizaje se debe apoyar en la selección, distinción y discernimiento intelectual mediante una dinámica de relaciones lógicas.

La multiplicación

La interpretación mental de las situaciones multiplicativas no equivale a la interpretación mental de las situaciones sumativas. Ver los problemas en los que interviene la multiplicación como una suma repetida aporta caracteres de confusión en la distinción de las situaciones. En las situaciones sumativas aparece una sola clase de elementos, en las multiplicativas, sin embargo, aparecen dos clases de elementos[3] bien diferenciadas y una relación constante entre ellas; así, bolsillos y canicas, cajas y peras, estanterías y libros, duros y pesetas,... Esta sería la diferenciación clara. Tendremos tantos factores distintos como clases de elementos haya. Si se habla de cinco armarios, de siete cajones en cada armario y de 9 camisas en cada cajón y se pregunta por el número de camisas, la relación se verá expresada en la forma: 5 x 7 x 9. No habrá extensión de una idea multiplicativa mientras no se advierta la relación constante entre clases de distintos elementos. Por mucho que repita la suma de una longitud, jamás obtendré una superficie. Sirva, como ejemplo, la siguiente situación para una propuesta de diálogo: " Me he comprado tres globos. ¿Cuántos euros he tenido que pagar?" Podemos suponer que los globos no son iguales; la relación entre los euros y los globos no es constante. En la consideración de la igualdad de los globos está la consideración de la igualdad del precio -que saldrá como alternativa- es ésta relación constante la que implica una idea multiplicativa que estará en función del precio de cada globo; así podrá ser 3 veces 1 Euro, 3 veces 2 Euros, 3 veces ... Si planteamos, a continuación, el problema en función del número de globos se percibirá mejor la relación entre las dos clases de elementos "globos-euros": "Un globo me cuesta 2 Euros. He comprado algunos de esos globos. ¿Cuánto he pagado?" Volvemos a la palabra "depende", depende ¿de qué? Si el número de globos fuese dos: dos veces 2 Euros; si fuese cinco: cinco veces 2 Euros;...

Es el alumno quien extenderá la idea multiplicativa a un sin fin de situaciones, identificándola en una relación constante entre distintas clases de elementos directamente proporcionales.

La división

[3] Nos referimos aquí al producto de dos factores. Si hubiera tres factores habría tres clases de elementos; es decir, tantas clases distintas de elementos como factores haya.

La interpretación mental de la división comporta una multiplicación en la que se busca uno de los factores. La división como consecuencia tiene por causa la multiplicación.
"He comprado algunas piruletas de igual precio. He pagado por todas 2 Euros. ¿Cuál es el precio de una de ellas?" No se sabe, ¿por qué no se sabe? ¿He podido comprar 20 piruletas?, ¿Por qué?, ¿quizás 10?, ¿por qué? ¿Es posible que haya comprado siete piruletas? ¿Por qué es o no es posible?,... conduciremos abiertamente la posibilidad o imposibilidad de sucesos apoyándolos en la comprobación lógica de la idea multiplicativa: sí he podido comprar diez y cada una de ellas me habrá costado dos pesetas, porque diez veces dos equivale a veinte; no he podido comprar siete, porque no hay un número exacto de veces por las que siete equivalga a veinte,... Buscar el número que multiplicado por b equivale a c, se representa matemáticamente mediante la expresión "c : b", que se lee: "c dividido por b".

"Tengo que repartir ocho caramelos entre cuatro niños. ¿Cuántos caramelos recibe cada uno?" Esta situación sería posterior. Es necesario que el alumno perciba, entre la pluralidad de repartos, aquel en el que todos reciben lo mismo. Que se tengan que repartir ocho caramelos entre cuatro niños no significa que todos tengan que recibir el mismo número de caramelos; al niño uno se le pueden dar 3 caramelos, un caramelo a otro de los niños, y dos a cada uno de los restantes. Dialogaremos con los alumnos desde todos y cada uno de los distintos repartos que se hayan considerado, viendo cuales de ellos se pueden expresar mediante una multiplicación, con la palabra veces. Así, el reparto descrito en el ejemplo no sería posible expresarlo mediante la palabra veces debido a que todos y cada uno de los niños no han recibido el mismo número de caramelos. Observado esto se conducirá de tal forma que si en el enunciado introducimos la necesidad del reparto equitativo, el alumno pueda libremente traducir la situación a la simbología "8 : 4", debido a que habrá que buscar qué número de caramelos cuatro veces equivale a ocho. La información por parte del profesor/a de las propiedades expuestas en todas y cada una de las distintas operaciones debilitará la comprensión por parte del alumno que se dedicará a imitar lo que le ha sido indicado, cuando lo importante es que llegue por sus propios medios a descubrir estas relaciones teniendo a su disposición la opción de decidir mediante lógicos razonamientos.

La división no existe como operación independiente. Se define como la operación inversa de la multiplicación. Es por ello por lo que también se apoya en dos clases de elementos y una relación constante; caramelos-niños, piruletas-euros,...

No obstante, no se puede confundir el mecanismo de realización con el mecanismo intelectual de identificación de situaciones, si se confundiese no se distinguiría una situación multiplicativa de una situación de partición, indicando así que multiplicar y dividir son una y la misma cosa. En la multiplicación el resultado es mayor que todos y cada uno de los factores -siendo estos distintos del número cero y del número uno-, en la división el resultado es menor (divisor mayor que 1).

Es el alumno quien extenderá la idea de división a un sin fin de situaciones identificándola por la búsqueda de una relación constante inversamente proporcional[4] a dos clases distintas de elementos.

---

[4].- En la medida en que el divisor aumente el cociente disminuye.

Estudiadas y comprendidas las propiedades que definen a todas y cada de las distintas operaciones, se hace necesario, como decíamos anteriormente, no sólo saber hacer sino saber cómo se hace, siendo imprescindible un dominio de las reglas de cálculo para obtener resultados precisos y correctos en la realización de la situación problemática, como etapa independiente. Las cuatro reglas algorítmicas se basan en la propiedad de construcción de un sistema posicional decimal, que es el que utilizamos para la numeración: Diez elementos de un orden inferior equivalen a un elemento de un orden inmediatamente superior, y viceversa.

Consideradas las etapas para el aprendizaje de la resolución de problemas como etapas distintas por las que el alumno debe pasar, se pueden establecer fases de resolución, en la medida en que la necesidad de éstas ha sido interiorizada significativamente mediante una libertad de acción creativa con posibilidades de extensión impredecibles. La escuela nunca podrá poner a disposición del alumno todos los problemas que en un futuro tendrá que resolver, pero si podrá hacer que el alumno se enfrente con una disposición de éxito a la resolución de cualquier problema. Llegados a este punto, nos gustaría hablar de la última de las etapas, aquella que se ocupa de la comunicación y elaboración de conclusiones.

Comunicación y conclusiones. El alumno comunica su proceso de resolución, sus estrategias, sus ideas. Se genera un diálogo que sirve de contrastación del proceso. Se defienden las iniciativas y se aceptan las refutaciones. Se desarrolla la autonomía desde la explicación a los demás de su decisión creativa. Este ejercicio libre tiene poder de expansión desde la investigación conjunta, y no competitiva. Las situaciones problemáticas deben desplegar la capacidad inventiva del alumno para que la capacidad de diálogo sea eficaz, alcanzando el gozo que este actuar proporciona, independientemente del éxito obtenido. El aprendizaje se alimenta, más que del acierto de la comunicación, de las conclusiones derivadas de ella. Conclusiones que anotan el por qué de su acierto o de su error; la calidad de comprensión del problema, las falacias utilizadas en su razonamiento, los métodos que han demostrado la validez de la solución del problema: ensayo y error, generalización, analogía, particularización, empezar desde atrás,... Las conclusiones serán ideas que podamos utilizar en las sucesivas resoluciones de situaciones problemáticas. El respeto y la tolerancia, la aceptación de ideas, la honestidad, la colaboración y la asimilación de técnicas de base pertenecerán al contexto de resolución de problemas. Si no hay comunicación las conclusiones no se objetivarán y serán subjetivas en tanto al modo de proceder del alumno, o en tanto a la forma de corregir del profesor. Cuando la conclusión es estrategia para el profesor y elaboración para el alumno, el proceso de resolución, correcto o incorrecto, no importa como calificación del sujeto, sino como cualificación del aprendizaje a partir de unos fundamentos de los que somos capaces de responsabilizarnos.

La actividad escolar debe apostar esencialmente por tareas creativas, desde las que puedan profundizar para encontrar nuevos conocimientos, inventar y reconstruir problemas para llegar a conclusiones válidas mediante relaciones en sí y relaciones entre relaciones, sin accidentalidad, sin adivinación y sin arbitrariedad. Inventar por inventar, no sirve de nada; la creatividad como forma de conocimiento no consiste en permitir que el alumno haga todo lo que se le ocurra, sino en conseguir que al alumno se le ocurra todo lo que científicamente se puede permitir.

EL ARTE DE PREGUNTAR

Mientras que el ser humano se comunique mediante el lenguaje toda didáctica que articule aprendizaje descubrirá necesariamente el arte de preguntar.

> *Un lapicero cuesta menos que un bolígrafo.*
> *¿Puedo comprarme el lapicero y el bolígrafo?*

Alumno1: Yo sí porque a mí me lo paga mi madre.
Alumno2: Pero, dice que si te lo puedes comprar tú.
A1: Yo no, porque no tengo dinero.
Profesor: Supongamos que nosotros tenemos dinero. ¿Podríamos comprarlo?
Alumnos: Podríamos sacarlo de la hucha; o de la paga; ...
P: Entonces, veo que si lo sacamos de la hucha, o de la paga, podríais comprarlo.
A3: Eso depende de lo que saquemos.
A4: O de lo que tengamos en la hucha.
P: ¿Por qué?, no lo entiendo; si sacamos dinero podremos comprarlo. (Contraejemplo)
A3: No, depende del dinero que tengamos.
P: Vamos a suponer un dinero. Abrimos la hucha, y ¿qué dinero sacamos? (Ejemplo)
(Anotamos lo que nos van diciendo: 2, 5, 10, 20, 200,...)
- Entonces, ¿con 200 euros podremos comprarlo?
A: Sí, porque es mucho dinero.
P: De acuerdo. Entonces, borraremos 2 Euros, porque al ser poco dinero, estamos seguros de que no podremos comprarlo con esos 2 Euros.
A: Claro.
P: ¿Si tuviésemos 2 Euros nos faltaría dinero?
A: Sí, bastante.
P: ¿Para qué nos faltaría dinero, para comprar el bolígrafo o para comprar el lapicero? (Contraejemplo)

(Algunos hay que dicen que nos faltaría dinero para las dos cosas; otros, para el lapicero; y los más para el bolígrafo porque, según ellos, cuesta más que el lapicero. Dialogando deberíamos llegar a establecer una clasificación de las posibilidades:

- Que nos falte dinero sólo para el bolígrafo.
- Que no es posible que nos falte dinero sólo para el lapicero.
- Que si nos falta dinero para comprar una y sólo una de las dos cosas, nos falta dinero para comprar las dos cosas juntas.

Durante esta conducción de ideas, aparece con premura la cuestión lógica; algún alumno hay que asegura que todo esto depende de lo que cueste el bolígrafo y el lapicero)

A: Depende de lo que cueste el lapicero y el bolígrafo.
P: Entonces, ¿no depende del dinero que tengamos?
A: Sí, porque si no tienes dinero no puedes comprarlo.
P: ¿Cómo sabes si tienes dinero suficiente para poder comprarlo?
A: Tengo que saber cuanto cuesta el lapicero y el bolígrafo.
P: Según lo que dices, ¿con 2 Euros, podremos, o no?
A: Es que hay que saber...
P: Entonces, ¿vuelvo a escribir en la pizarra 2 Euros?

A: Claro, porque... (Y es en este momento, cuando te explican con sus propias palabras la relación que han descubierto. Como si tú hasta ahora no te hubieses enterado y ellos se encontrasen con la clara necesidad de informarte de algo evidente que tú no quieres comprender. Te ponen ejemplos que muestran la necesidad de tener el mismo o más dinero de lo que cuesta para poder comprarlo. -Podemos asegurar que esta sencilla idea ha sido comprendida por vez primera en algunos de estos niños-)
P: Esta bien, fijemos los precios de los objetos que aparecen en el problema.
(Diálogo. Unos hablan de caro y de barato, que depende..., que en su librería son muy careros. Surge la necesidad de inventar un nombre para la librería: "Lapicerín", del mismo modo que surge la necesidad de determinar qué tipo de lapicero o bolígrafo porque, como alguno dice, "y si es de oro...", y obtenemos la formulación del siguiente enunciado: "En la librería Lapicerín un lapicero de la marca A cuesta 80 céntimos y un bolígrafo de la marca B cuesta 1 Euro"
P: Si tengo 1 Euro, ¿tengo 80 céntimos?
(Algunos dicen que sí; otros, que no. Hablamos)
P: Si tienes 100, y sólo 100, ¿tienes 110?
A: No, porque nos falta.
P: ¿Lo que no tienes es lo que te falta?
A: Claro, porque... (Ponen sus propios ejemplos)
A: Yo no estoy de acuerdo porque si yo tengo 3 Euros, no tengo 10 pero tampoco me faltan 10. Lo que me falta no siempre coincide con lo que no tengo, sólo en el caso de que no tenga nada. (Ayudado por el profesor en la formulación de la idea. - Los niños suelen tener dificultad de expresión, no de comprensión-)
P: ¿Estáis de acuerdo con lo dice...?
A: Sí.
P: Entonces, podemos decir que lo que no tenemos es lo que nos falta para llegar a tenerlo.
- Si tienes 80 céntimos, ¿qué te falta para tener 70?
A: Nada, me sobra.
P: Si tienes 80, ¿tienes 70?
(Todos afirman que sí, porque no te falta)
P: Volvamos al problema, ¿cuánto hemos dicho que cuesta el bolígrafo?
-¿Cuánto hemos dicho que cuesta el lapicero?
- Si tenemos 1 Euro, ¿tenemos 80 céntimos?
- Sí
- Entonces, con 1Euro, y sólo 1 Euro, podemos comprar las dos cosas, porque tenemos para el bolígrafo y para el lapicero. ¿Qué pensáis? (Desafío) (Perplejidad absoluta. Silencio. Tímidamente empiezan a hablar diciendo que si tenemos 1 y sólo 1 Euro, sólo podemos comprar una de las dos cosas. Ellos dan sus explicaciones oportunas. Callamos. Cada vez participan más niños apoyando la misma idea. Es entonces, cuando se les hace dudar: Decíais que: "si tienes 1 Euro, tienes también 80", no entiendo por qué no podemos comprar las dos cosas. Ellos, lo explican perfectamente)

Seguimos trabajando, establecemos "diferencia entre precios" para redactar el enunciado:

"... Un lapicero cuesta 20 céntimos menos que un bolígrafo. Un bolígrafo cuesta 1 Euro."

Intentamos averiguar el mínimo dinero que necesitamos tener para poder comprarlos. No hay muchas dificultades: Primero, el precio del lapicero, después, el precio del bolígrafo.

Construimos una tabla de precios lapicero-bolígrafo, cuyo criterio constante es que el lapicero siempre va a costar 20 céntimos menos que el bolígrafo, y completamos, según corresponda.

LAPICERO	BOLÍGRAFO	LAPICERO + BOLÍGRAFO
10 CÉNTIMOS	30 céntimos	
30 CÉNTIMOS	50 céntimos	
40 CÉNTIMOS		
	90 céntimos	
	2 Euros	
		1,80 Euros
		2 Euros
		3 Euros
		10,10 Euros

Dado un precio cualquiera del lapicero, descubrir la regla general que me permita obtener el precio del lapicero y el bolígrafo.

Dado un precio cualquiera del bolígrafo, descubrir la regla general que me permita obtener el precio del lapicero y el bolígrafo.

Dado un precio cualquiera del lapicero y el bolígrafo, descubrir la regla general que me permita obtener el precio del lapicero.

BIBLIOGRAFÍA

COCKCROFT, W. H. (1985): Las matemáticas sí cuentan. Madrid. MEC
FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2000): Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos. Barcelona. Praxis
GAGNÉ, E. (1991): La psicología cognitiva del aprendizaje escolar. Madrid. Visor.

GAULIN, C. (2001): “Tendencias actuales en la resolución de problemas”. *Revista Sigma*, 19, 51-63
HALMOS, P.R. (1980): “The heart of mathematics”. *American mathematical Monthly*, (87), 519-524.
HATFIELD, L.L. y D.A. BRADBARD (Eds.)(1978): Mathematical problem solving: papers from a research worhshop. Ohio. ERIC Clearinghouse for Science.
KANT, I. (1803): Pedagogía. Madrid. Akal, 1983.
MASON, J. /BURTON, L. /STACEY, K. (1988): Pensar matemáticamente. Barcelona. Mec-Labor.
MAYER, R (1986): Pensamiento, resolución de problemas y cognición. Barcelona. Paidós
POLYA, G. (1966): Matemáticas y razonamiento plausible. Madrid. Tecnos.
POLYA, G. (1992): Cómo plantear y resolver problemas. México. Trillas.
PUIG, L.; F. CERDÁN (1988): Problemas aritméticos escolares. Madrid: Síntesis
SEMINARIO "RAMÓN ALLER" (1994): "Ilustración de las diferentes fases en la resolución de problemas". *Revista Suma*, 17, pp. 65-67
WITTGENSTEIN, L. (1987): Observaciones sobre los fundamentos de la matemática. Madrid. Alianza Editorial