

Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

**Trabajar los problemas
matemáticos mediante materiales
lúdico-manipulativos en segundo
ciclo de Primaria**

Trabajo fin de grado presentado por: **Anna Salas Fortià**

Titulación: **Grado Maestro de Primaria**

Línea de investigación: **Propuesta de intervención**

Director/a: **Paloma Gavilán Bouzas**

Barcelona, julio de 2013
Firmado por: Anna Salas Fortià

Categoría Tesouro: 1.1.8 Métodos pedagógicos

A mi marido y a mi hija, que me han apoyado incondicionalmente en mi aventura de mujer-mamá universitaria.

A todos y cada uno de los niños que han pasado por mis manos, pues cada uno de ellos ha puesto un granito de arena para hacer de mí lo que soy.

A mi directora de TFG, Paloma, por su paciencia y sus consejos.

RESUMEN:

El presente trabajo pretende ser una propuesta metodológica sobre cómo enfocar la didáctica de los problemas matemáticos con niños de segundo ciclo de primaria, aspecto en el que a menudo presentan dificultades. Con la aplicación de los recursos y métodos aquí propuestos se pretenderá lograr un mayor éxito en la resolución de problemas matemáticos, así como aumentar la motivación de los alumnos en relación a la asignatura de matemáticas. Para elaborar esta propuesta partimos de dos premisas básicas: primera, que la comprensión de los mecanismos de resolución de problemas está estrechamente relacionada con las estrategias didácticas usadas; segunda, que una mayor motivación hacia la asignatura facilita el trabajo matemático, por lo que es necesario usar recursos y materiales que resulten atractivos a nuestros alumnos. El trabajo empieza revisando los aspectos teóricos que sustentan esta propuesta, y a continuación se expone la propuesta en sí, con ejemplos, ideas y materiales.

Palabras clave: didáctica de las matemáticas, metodología innovadora, problemas matemáticos, segundo ciclo, materiales lúdico-manipulativos.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN	5
1.1-JUSTIFICACIÓN	5
1.2- OBJETIVOS.....	6
2. MARCO TEÓRICO	7
2.1- CONCEPTOS PREVIOS	7
2.1.1- El constructivismo.....	7
2.1.2- Teorías sobre el desarrollo cognitivo del niño	8
2.1.3- El niño de primaria	12
2.2- LA COMPETENCIA MATEMÁTICA	13
2.3- DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS	17
2.4- ¿QUÉ SIGNIFICA RESOLVER UN PROBLEMA?	20
2.5- TIPOLOGÍA DE PROBLEMAS	24
2.6- USO DE RECURSOS LÚDICO-MANIPULATIVOS	28
2.6.1- ¿Por qué recursos lúdicos?	28
2.6.2- ¿Por qué recursos manipulativos?	30
2.6.3- Aplicación en el aula.....	30
3. MARCO METODOLÓGICO	31
3.1- INTRODUCCIÓN	31
3.2- PROPUESTA DE INTERVENCIÓN.....	31
3.2.1- Objetivos	31
3.2.2- Cronograma de aplicación.....	32
3.2.3- Características básicas del entorn	33
3.2.4- Metodología:	33
3.2.5- Evaluación de los alumnos	34
3.2.6- Actividades	35
3.2.7- Evaluación de la propuesta de intervención	42
3.2.8- Limitaciones.....	43

4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES	44
5. PROSPECTIVA	46
6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	48
7. BIBLIOGRAFÍA	50
8. ANEXOS	51
ANEXO I- PRUEBA DE EVALUACIÓN INICIAL.....	52
ANEXO II- CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACIÓN.....	55
ANEXO III-CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN DE LA ACCIÓN DOCENTE	56
ANEXO IV-FASES DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SEGÚN PÓLYA:.....	58
ANEXO V-ACTIVIDADES BLOQUE 2	59
ANEXO VI-ACTIVIDADES BLOQUE 3	62
ANEXO VII- ACTIVIDADES BLOQUE 4.....	65
ANEXO VIII-ACTIVIDADES BLOQUE 5	68
ANEXO IX- ACTIVIDADES BLOQUE 6	71
ANEXO X-ACTIVIDADES BLOQUE 7	73
ANEXO XI- ACTIVIDADES BLOQUE 8.....	74

1. INTRODUCCIÓN:

1.1-JUSTIFICACIÓN:

La elección de este tema para la realización del Trabajo de Fin de Grado ha estado motivada por varias observaciones y constataciones que he podido hacer a lo largo de mi experiencia profesional, vinculada siempre con la educación. Por mi formación anterior de Licenciada en Psicología, he estado trabajando con alumnado que presentaba dificultades de aprendizaje de varios tipos, algunas de ellas relacionadas con las matemáticas. Posteriormente, he trabajado en varias escuelas de primaria y también he tenido la ocasión de comprobar que la asignatura de matemáticas, en muchos casos, no era la preferida de mis alumnos. Tanto en un caso como en el otro, he podido observar que buena parte de los estudiantes ven las matemáticas como algo difícil, abstracto e inaccesible, y también que es una de las asignaturas donde presentan un mayor fracaso escolar. Por otra parte, también he observado que a menudo los maestros trabajamos las matemáticas con una metodología arcaica, basada en la mecánica, repetición, aprendizaje de conceptos abstractos, desvinculada de la realidad, etc., lo cual no ayuda a mejorar esta cuestión. Esta situación, a mi modo de entender, debe cambiar, pues las matemáticas están en todas partes, son algo cotidiano y cercano y, en sus orígenes, se “inventaron” para resolver problemas prácticos del día a día. Eso es algo que debemos saber transmitir a nuestros alumnos para que puedan vencer una primera barrera ante las matemáticas y así se conviertan en algo más accesible y comprensible. Para que así sea, es importante que, como docentes, demos un nuevo enfoque a la forma de enseñarlas, partiendo de realidades cercanas, contextualizando conceptos y procedimientos, dando la posibilidad de tocar, experimentar, descubrir, comprender los porqués... y de hacer que los aprendizajes sean significativos. Para esta finalidad va a ser útil usar en el aula recursos y materiales atractivos, lúdicos, manipulables y diversos, que motiven a nuestros alumnos, que rompan los estereotipos negativos que se han creado en relación a las matemáticas.

Por otro lado, durante el pasado curso, estuve trabajando en una escuela donde estudiaban las matemáticas sin libros de texto, a través de juegos, materiales manipulativos, TIC, Aprendizaje Basado en Problemas, etc. y, aunque no dispongo de datos objetivos contrastados, pude constatar que el nivel de implicación y de éxito por parte de los alumnos era mucho mayor que en las escuelas donde se trabaja de forma tradicional; los alumnos estaban mucho más motivados a la hora de ponerse a trabajar, mostraban una mayor curiosidad e interés hacia la asignatura y obtenían unos buenos resultados en el sentido de una buena comprensión de los contenidos y una buena competencia matemática. En esta escuela trabajaban partiendo de las enseñanzas y teorías de María Antonia Canals, lo que me animó a apuntarme a unas sesiones abiertas a maestros donde se trabaja la didáctica de las matemáticas, hecho que ha acabado de motivarme para realizar este trabajo.

La intención del presente trabajo de fin de grado es abordar concretamente el trabajo con los problemas matemáticos a través del uso de materiales lúdico-manipulativos en el segundo ciclo de

primaria, pero las premisas anteriormente expuestas se pueden aplicar a todos los temas del currículo de matemáticas y son extensibles a todos los ciclos de primaria y a las demás etapas educativas.

Cuando los niños se enfrentan a un problema matemático, a menudo sólo quieren “adivinar” y resolver correctamente el algoritmo pertinente, es decir, resuelven los problemas mecánicamente dando sólo importancia al resultado. Sin embargo, es importante que aprendan a descifrar e interpretar los enunciados, a comprenderlos y a tomar las decisiones adecuadas para llegar a la solución; en resumen, que aprendan a pensar. Abordarlos mediante una metodología más adecuada puede ser clave para mejorar esta cuestión.

En el presente trabajo se expondrá una propuesta para trabajarlos de una forma diferente. En esta propuesta se propondrán distintos tipos de problemas matemáticos para ayudar a mejorar la lógica y el razonamiento de nuestros alumnos, se explicará el proceso a seguir para llegar a una correcta resolución de los problemas y se presentarán recursos y materiales lúdicos y también materiales manipulables que resulten atractivos y motivadores a nuestros alumnos y nos ayuden a alcanzar un mayor éxito en la resolución de problemas matemáticos. Previamente a la propuesta de intervención en sí misma, se expondrá el marco teórico que la sustenta, basado en autores y teorías, propuestas pedagógicas, metodológicas y de psicología evolutiva que nos ayudarán a contextualizar el trabajo.

Como resumen, lo que esta propuesta pretende es que los alumnos logren una mayor comprensión en el proceso de resolución de problemas matemáticos, una mejora de la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje, una mayor motivación hacia los problemas matemáticos en concreto y hacia las matemáticas en general, y una mayor adaptación a los alumnos con alguna necesidad educativa especial añadida (por la flexibilidad de este tipo de recursos).

1.2- OBJETIVOS:

Una vez explicadas las motivaciones personales hacia el tema escogido, vamos a concretar los objetivos que se pretenden lograr mediante la realización de este trabajo:

Objetivo general:

- Presentar una propuesta metodológica para trabajar los problemas matemáticos basada en el uso de materiales lúdico-manipulativos en el segundo ciclo de Educación Primaria.

Para alcanzar el objetivo general será necesario trabajar los siguientes objetivos específicos:

Objetivos específicos:

- Repasar los fundamentos del constructivismo y las diferentes teorías en psicología evolutiva que lo sustentan.
- Concretar un marco teórico sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas sobre el que basaremos nuestra propuesta de intervención.
- Revisar el concepto de problema y el proceso de la resolución de problemas matemáticos.
- Revisar las distintas tipologías de problemas matemáticos.
- Analizar los recursos y materiales lúdico-manipulativos más adecuados para trabajar los problemas matemáticos en segundo ciclo de primaria.

2. MARCO TEÓRICO:

2.1- CONCEPTOS PREVIOS:

2.1.1- El constructivismo:

En los siguientes apartados vamos a exponer las distintas cuestiones teóricas referentes a psicología evolutiva, didáctica de las matemáticas y los problemas matemáticos en sí mismos. Sin embargo, creemos que es necesario hacer unas aclaraciones iniciales que ayuden a ubicar este trabajo en un marco de referencia adecuado.

En primer lugar hay que destacar que partimos de una concepción constructivista del proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto significa que entendemos el proceso de enseñanza-aprendizaje como un proceso dinámico y participativo, dónde el aprendiz es el protagonista. Éste, a través de sus interacciones con el entorno, va construyendo sus propios aprendizajes de forma activa. Sin embargo, los aprendizajes que realiza no son una copia de la realidad, sino una reelaboración de ella influida por su propio bagaje. Desde esta concepción, se entiende que los conocimientos previos de los alumnos son de vital importancia, pues son la base sobre la cual se irán asentando los nuevos aprendizajes. En consecuencia, la tarea del docente será la de hacer de guía del alumno, facilitándole estímulos y situaciones que le permitan construir aprendizajes significativos, huyendo así de la educación entendida como simple instrucción y transmisión de saberes.

Coll y Solé (2006) resumen esta perspectiva de la siguiente forma:

Podríamos decir que con nuestros significados nos acercamos a un nuevo aspecto que a veces sólo parecerá nuevo, pero que en realidad podremos interpretar perfectamente con los significados que ya poseíamos, mientras que otras veces nos planteará un desafío al que intentamos responder modificando los significados de los que ya estábamos provistos, de forma que podamos dar cuenta del nuevo contenido, fenómeno o situación. En ese proceso, no sólo modificamos lo que ya poseíamos, sino que también interpretamos lo nuevo de forma peculiar, de manera que podamos integrarlo y hacerlo nuestro. Cuando se da este proceso, decimos que estamos aprendiendo significativamente (...). (p. 16)

En cuanto al concepto de constructivismo, varios son los autores que desde el pasado han teorizado y lo han fundamentado. El constructivismo no es una idea nueva sino que encontramos sus precursores en la antigüedad. En la Grecia Clásica, personajes como Protágoras o Pirrón de Elis ya apuntaban que el hombre construía su propia realidad; y ya en el siglo XIX, Nietzsche negaba la existencia de la objetividad y la neutralidad y ponía énfasis en la interpretación del mundo desde la subjetividad; en el S.XX, Ortega y Gasset decía que la realidad existía sólo desde la propia perspectiva. Así pues, es una cuestión debatida desde la filosofía, la ciencia, la psicología y la pedagogía desde tiempos remotos. Sin embargo, su aparición como tal se remonta al S. XX de la mano de autores como Bateson, Gergen, Watzlawick, Maturana y White entre otros, quienes desde distintas disciplinas proponen esta forma de funcionamiento de la mente y de construcción de la realidad, la cual será luego aplicada a los campos de la psicología educativa y a la pedagogía por autores como Max Wertheimer, Wolfgang Köhler, Vittorio Guidano, Jean Piaget, George Kelly, Frederic Bartlett entre otros. Llegados a este punto, ya hemos clarificado el concepto de constructivismo y qué aspectos nos interesan de él. En el apartado siguiente vamos a repasar algunos de los autores más representativos que con sus aportaciones inspiradas en el constructivismo sustentan nuestro trabajo, como son Piaget, Vygotsky, Ausubel y Bruner.

2.1.2- Teorías sobre el desarrollo cognitivo del niño:

Una vez aclarado nuestro punto de partida, me parece importante que nos detengamos en cómo es y cómo avanza el desarrollo cognitivo de los niños entre 6 y 12 años, pues será una cuestión íntimamente relacionada con su proceso de enseñanza-aprendizaje.

Hoy en día, huyendo ya de teorías deterministas y organicistas, podemos afirmar que el proceso de desarrollo cognitivo de los niños está relacionado con los intercambios que éstos realizan con su entorno social y/o físico. Uno de los primeros autores en hablar sobre esta cuestión fue Jean Piaget, psicólogo del S. XX perteneciente a la escuela de Ginebra. Las principales aportaciones de Piaget (1967, 1969, 1972, 1989) en la psicología evolutiva de mediados del S.XX fueron dos: la primera fue la idea de que el desarrollo cognitivo de los niños avanza mediante los mecanismos de asimilación y acomodación. Eso significa que cuando el niño entra en contacto con el medio físico y recibe un estímulo, responde a él de una determinada forma, lo que llamamos asimilación. Ésta respuesta en sí misma no supone ningún cambio en las estructuras mentales del niño, pero una vez se ha interiorizado y conectado con los esquemas preexistentes en él, se produce la acomodación y en consecuencia el cambio cognitivo. Vemos aquí una clara conexión con la concepción constructivista de los aprendizajes y la importancia que da a los conocimientos previos. La segunda aportación clave de Piaget (1967, 1969, 1972, 1989) fue la clasificación de los estadios de desarrollo cognitivo del niño desde la infancia a la adolescencia. Según él, el desarrollo cognitivo del niño pasa por fases cualitativamente distintas, que describe en cuatro estadios:

1- *Estadio sensorio-motor (0-2 años)*: el niño usa los sentidos y sus habilidades motrices para interactuar con el mundo y adquirir los primeros conocimientos. Predominio de respuestas reflejas y conductas instintivas.

2- *Estadio de preoperatorio (2-7 años)*: se van interiorizando las respuestas del anterior período, aun de una forma muy vaga. Existe una irreversibilidad de las acciones. Aparece el juego simbólico. Etapa del niño egocéntrico.

3- *Estadio de las operaciones concretas (7-12 años)*: el niño es capaz de usar los símbolos de forma lógica y, a través de la capacidad de conservación, de hacer generalizaciones. Así pues, el niño ya adquiere las habilidades cognitivas para resolver problemas de forma lógica, aunque para realizar estas operaciones mentales necesita el contacto con realidades concretas. Se consolidan la capacidad de conservación de las cantidades numéricas (longitudes y capacidades), de los materiales (reversibilidad) y de las superficies.

4- *Estadio de las operaciones formales (12 años en adelante)*: aparece la capacidad de razonamiento abstracto y el pensamiento de tipo hipotético-deductivo.

En el caso de los niños de primaria, pertenecerían al estadio de las operaciones concretas, de manera que ya están dotados de capacidad para el razonamiento lógico, pero todavía necesitan manipular realidades concretas y materiales tangibles pues aun presentan ciertas dificultades para trabajar con conceptos abstractos.

Las teorías de Piaget (1967, 1969, 1972, 1989), aunque empiezan a dar importancia al papel de las interacciones con el medio, aun se centran demasiado en el determinismo biológico del niño. Por otro lado, la categorización de los niños en los distintos estadios de desarrollo es demasiado rígida y se sabe que no todos los niños la cumplen. No obstante, sientan una buena base para explicar el desarrollo cognitivo y las características de los niños de 6 a 12 años que nos ocupan en este trabajo. A partir de los años 80, y después de toda una década de teorías de procesamiento de la información que se centran en descubrir cómo funciona la mente más que como se desarrolla, surgen unas nuevas corrientes neo y postpiagetianas (Pascual-Leone, Case, Kuhn...) que pretenden rescatar, refinar y actualizar las teorías de Piaget. Ellos hacen hincapié en el factor *atención* durante los procesos de aprendizaje y redefinen y concretan los diferentes estadios de desarrollo propuestos por Piaget (1967) y los mecanismos que se activan para pasar de uno al otro.

Otro psicólogo que no podemos obviar en este trabajo por la importancia de sus aportaciones en la psicología evolutiva y del aprendizaje durante el pasado S. XX es Lev Vygotski. Vygotski fue el máximo precursor del llamado constructivismo social y, aunque a primera vista no lo pueda parecer, sus teorías se complementan y están bastante en consonancia con las de Piaget. Vygotski también postulaba que los aprendizajes y el avance en el desarrollo cognitivo del niño se producían a través de los intercambios que éste realizaba con el medio. Pero a diferencia de Piaget, Vygotski entendía el medio como algo social y cultural, no sólo físico; él consideraba importante pero

insuficiente el aprendizaje por asociación estímulo-respuesta, pues se debía añadir la influencia de las relaciones sociales y del entorno cultural del niño. Como bien afirmaba:

Un proceso interpersonal queda transformado en otro intrapersonal. En el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: primero, a escala social, y más tarde, a escala individual; primero, entre personas (interpsicológica), y después, en el interior del propio niño (intrapsicológica). (Vygotski, 1978, citado en Parica, Bruno y Abancín, 2005, parr. 27).

Los otros conceptos clave para nuestro trabajo de la teoría de Vygotski (1979, 1988) son la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) y el Nivel de Desarrollo Potencial. En un niño podemos evaluar el Nivel de Desarrollo Real, por ejemplo, con las evaluaciones iniciales. A partir de aquí, podemos formular su Nivel de Desarrollo Potencial, que sería el nivel de competencia que puede alcanzar, las habilidades y aprendizajes que puede llegar a adquirir con la ayuda de un adulto o de un igual más competente. Entonces, explicaríamos la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) como la brecha entre las habilidades y aprendizajes que ya posee el niño (Nivel de Desarrollo Real), y su potencial (Nivel de Desarrollo Potencial). Así pues, las teorías de Vygotski (1979, 1988) nos interesan por varios aspectos. Por un lado, para que el niño aprenda, no se trata sólo de proporcionarle estímulos a los que deba responder hasta que, biológicamente, las estructuras cerebrales cambien y evolucionen, sino que el contexto y la interacción con el medio social y cultural es de vital importancia para que esto ocurra. Por ello, a la hora de diseñar actividades de aprendizaje, éstas deben ser significativas para nuestros alumnos, deben estar contextualizadas y debemos propiciar la discusión entre iguales y con los adultos para que se optimice el proceso de aprendizaje. Por otro lado, los docentes deberíamos ser capaces de determinar las ZDP de nuestros alumnos para poder diseñar actividades adecuadas a ellos que, mediante la guía necesaria, acaben produciendo nuevos aprendizajes. Con esa última idea, volvemos a hacer hincapié con la importancia de los conocimientos previos de los alumnos, y también con el papel del docente como guía facilitador.

David Paul Ausubel es otro psicólogo y pedagogo del pasado S.XX, clave para el enfoque constructivista. La principal aportación de Ausubel se refiere al concepto de aprendizaje significativo. Ausubel define el aprendizaje como “Un proceso por medio del que se relaciona nueva información con algún aspecto ya existente en la estructura cognitiva de un individuo y que sea relevante para el material que se intenta aprender” (Ausubel, 1970, citado en Méndez, 2008, p. 91). Así pues, considera que los aprendizajes deben ser significativos y que esto ocurre cuando son compatibles con los aprendizajes previos, es decir, el nuevo aprendizaje cobra significado porque se conecta con la red de los conocimientos preexistentes en el niño. En consecuencia, esta idea se contrapone al simple aprendizaje memorístico y sin sentido, algo a tener en cuenta en nuestra tarea diaria como docentes. Para Ausubel (1963, 1983), el contenido que un alumno va a aprender deber ser potencialmente significativo para que pueda dar lugar a nuevos significados. Para que así sea, este aprendizaje debe tener una significatividad lógica (lógico y coherente en sí mismo) y una significatividad psicológica para el alumno (que pueda asimilarlo según sus experiencias previas), y

además debe saber darle sentido, por lo que es importante que como docentes explicitemos las intenciones de las actividades didácticas que proponemos.

Jerome Bruner es otro de los psicólogos del S. XX que se enmarcan en la perspectiva constructivista y que hace importantes aportaciones a tener en cuenta. Bruner considera que el aprendizaje es un proceso activo de construcción y asociación porque entiende que cuando aprendemos a través de la interacción con la realidad que nos envuelve, organizamos la información mediante categorías, ya sea creando nuevas o modificando las ya existentes. Pero además de su sistema de categorizaciones, lo que nos interesa de las teorías de Bruner (1972) es el concepto de aprendizaje por descubrimiento. Bruner considera que las personas deben aprender por descubrimiento, es decir, los aprendizajes no deben presentarse elaborados sino que se deben presentar problemas o planteamientos que lleven al aprendiz a descubrirlos por sí mismo, lo que los convierte en más significativos. Sería algo así como que aprendemos haciendo. Entonces, a la hora de preparar material didáctico, podemos plantear actividades que estén encaminadas a este tipo de aprendizaje. Por otro lado, entendemos que el alumno es movido por la curiosidad y que el papel del profesor debe ser de guía motivador para que éste lleve a cabo su proceso de descubrimiento del aprendizaje final.

Finalmente, debemos mencionar también a María Montessori, una mujer avanzada para su época, principios del S.XX, la cual, con formación en el campo de la medicina, fue ampliando horizontes hacia disciplinas como la filosofía, la psicología y la pedagogía, hasta dedicarse plenamente a la educación de los niños, creando su propio método. Para Montessori, los niños disponen de un potencial innato que se va desarrollando a medida que se les da la posibilidad de hacerlo. Así pues, defendía que los niños necesitan libertad y oportunidades (aprendizaje activo) para que vayan construyendo sus propios aprendizajes, afirmación que conecta de lleno con la perspectiva constructivista en la que nos basamos. Afirmaba también que los niños absorben de su entorno para realizar esta construcción y que la función de los maestros era supervisar este proceso para que alcanzaran su máximo potencial, no instruir ni disciplinar. Sin embargo, de este método nos interesan también otros aspectos relacionados. Por ejemplo, Montessori (1937) defendía el trabajo partiendo de lo concreto hacia lo abstracto, de lo más simple hasta lo más complejo, idea que creemos importante de tener en cuenta en el aula. Además, daba mucha importancia también al ambiente físico y a los materiales proporcionados al niño para realizar estas experiencias, pues eran las herramientas que tenían a su disposición para realizar su proceso de construcción de aprendizajes. De Montessori podemos destacar una afirmación: “el niño tiene la inteligencia en la mano” (citado en Alsina, 2004, p. 14)”, dotando de gran importancia a la manipulación física de objetos y materiales para la adquisición de aprendizajes. Esa idea enlaza plenamente con nuestra propuesta de usar materiales de tipo manipulativo para favorecer el trabajo con los problemas matemáticos. Otras propuestas montessorianas que sustentan nuestra propuesta serían: que el interés y la motivación fomentan los aprendizajes, y que es importante aprender de los iguales y

con los iguales, por lo que debemos fomentar las actividades colectivas, compartidas o comentadas colectivamente.

Seguramente habrá otros autores y teorías de los que podríamos sacar conceptos importantes, pero enfocando el presente trabajo desde una perspectiva constructivista, éstos son los aspectos básicos a tener en consideración:

- El niño es el protagonista de su proceso de enseñanza-aprendizaje.
- El proceso de enseñanza aprendizaje es un proceso que es activo y dinámico: el niño va construyendo sus aprendizajes a partir de sus interacciones con su contexto físico, social y cultural.
- A partir de estas nuevas experiencias el niño realiza conexiones con los esquemas mentales de los que ya dispone, incorporando en ellos los nuevos conocimientos, surgiendo así el aprendizaje significativo.

Estos tres puntos ponen de manifiesto la vital importancia de los conocimientos previos por un lado, del contexto físico, social y cultural del niño por otro lado, y también de la necesidad de estimular al niño para que experimente, manipule, reflexione y descubra por sí solo, con la ayuda del maestro, que se convierte así en un guía, más que en un simple instructor o transmisor de conocimientos.

2.1.3- El niño de primaria:

Después de ubicar el presente trabajo y de hacer un repaso a las teorías más significativas sobre el desarrollo y los aprendizajes, sería interesante resaltar las cualidades cognitivas más relevantes de los niños de la etapa de primaria, siempre teniendo en cuenta que van a evolucionar a lo largo de esta etapa, que cada niño presenta su ritmo y sus peculiaridades y que esto debe ser tomado en consideración por sus maestros para poder proporcionarle una educación lo más personalizada posible.

En primer lugar, el niño de 6 a 12 años ya es capaz de resolver problemas, tiene cierta capacidad lógica y puede hacerse representaciones mentales de las situaciones. Sin embargo, estas representaciones mentales deben ser concretas, es decir, sobre situaciones o sucesos aplicables a la realidad inmediata del niño, no abstractos. Por otro lado, el niño es capaz de comprender que un objeto es el mismo aunque cambie de forma si no se le ha añadido ni quitado nada (principio de conservación) y asume la reversibilidad en algunos aspectos (deshacer una operación), el pensamiento se vuelve más flexible. Durante esta etapa también se asume el hecho de que otras personas puedan ver la realidad de una forma diferente a la suya. En cuanto a la memoria, aumenta su capacidad y se perfecciona su funcionamiento y lo mismo ocurre con la capacidad de atención. También se enriquece el vocabulario y aumenta su función socializadora, reemplazando en parte a la acción.

Así pues, a partir de este estado de desarrollo, el niño va a ser capaz de realizar acciones como las que se presentan a continuación:

- Hacer clasificaciones de objetos en distintas categorías según sus características (que cada vez pueden ser más abstractas y/o complejas).
- Comparar objetos.
- Discriminar entre el todo y sus partes, así como comprender las relaciones entre ellos.
- Ordenar seriaciones en base a una dimensión o consigna.
- Comprender y trabajar (progresivamente) con los conceptos de espacio y tiempo.
- Comprender el concepto de velocidad (relación entre los conceptos de espacio y tiempo).
- Comprender y realizar predicciones.
- Operar con los números: combinar, separar, ordenar y transformar.
- Realizar operaciones lógico-matemáticas (teniendo en cuenta la noción de conservación y la de reversibilidad).
- Realizar operaciones geométricas.
- Comprender y trabajar con la noción de cantidad y la de medida.
- Realizar generalizaciones a partir de la propia experiencia.
- Usar el lenguaje de forma social y como herramienta sustitutiva de la acción física.

Esta pequeña relación de las acciones posibles en función del desarrollo cognitivo del niño deberá darnos las pistas para plantear las actividades de aprendizajes más adecuadas en cada momento. Hay que tener en cuenta que este es un repaso muy breve del estado cognitivo del niño de primaria, y que además, el desarrollo cognitivo no se da independientemente del desarrollo en las otras áreas como la social, la afectiva... Pero está bien tener en cuenta estos puntos principales para poder comprender la propuesta que vamos a ofrecer más adelante.

2.2- LA COMPETENCIA MATEMÁTICA:

Una vez analizadas las teorías más relevantes que van a sustentar nuestra propuesta y situados en el estado de desarrollo cognitivo de los alumnos de primaria, vamos a detenernos en analizar qué significa ser competente en matemáticas.

Como sabemos, el currículo actual de Educación Primaria comprende una serie de objetivos educativos que se deben trabajar mediante los contenidos establecidos y que tienen la función de conseguir que los alumnos, al finalizar esta etapa, hayan adquirido una serie de competencias básicas. Podríamos definir las competencias básicas como un conjunto de saberes y habilidades que los alumnos podrán aplicar en sus vidas para ir resolviendo de manera efectiva las diferentes situaciones que se les van a plantear en el futuro. Entre estas competencias encontramos la competencia matemática, la más interesante en lo que a este trabajo se refiere, aunque no tenemos que olvidar que en cada una de las áreas se trabajan todas las competencias en conjunto. En el RD1513/2006 de 7 de diciembre por el que se establecen las enseñanzas mínimas para la etapa de primaria, la competencia matemática se define de la siguiente forma:

Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral. (BOE, 8 de diciembre de 2006, p.43059)

En este mismo documento se concreta esta definición explicando que los alumnos deben poder comprender y expresar datos e informaciones con claridad y precisión; conocer y manejar en situaciones reales o ficticias los elementos del lenguaje matemático como símbolos, medidas, diferentes tipos de números, conceptos geométricos, etc.; aplicar los procesos que les conduzcan a la solución de problemas diversos, en distintos contextos y situaciones, lo que implica un dominio de los pensamientos deductivo e inductivo, entre otros aspectos; saber aplicar los algoritmos de cálculo de forma mecánica y de forma contextualizada; fomentar la resolución de planteamientos varios a través del razonamiento; saber expresarse mediante el lenguaje matemático; saber integrar todo lo anterior con otros tipos de conocimiento, y saber aplicarlo en contextos reales y cotidianos.

Siguiendo con el RD1513/2006, también expone que uno de los ejes principales del área para conseguir la ya mencionada competencia matemática son los procesos de resolución de problemas, tema central de este trabajo. También en la Ley Orgánica de Educación 2/2006, de 3 de mayo, de Educación se especifica que uno de los objetivos generales de la etapa de Educación Primaria es desarrollar los distintos aspectos de la competencia matemática, especialmente aquellos relativos a la resolución de problemas, e insiste en la importancia de ser trabajados de forma contextualizada para así aprender sus aplicaciones en la vida cotidiana. Con lo anteriormente expuesto ya podemos constatar que ser competente en matemáticas va mucho más allá de dominar mecánicamente las operaciones de cálculo o saber magnitudes varias. La competencia matemática implica adquirir los conocimientos y destrezas que nos van a permitir manejarnos en situaciones reales y cotidianas o ficticias, que impliquen el uso de conceptos matemáticos o del lenguaje matemático, así como la puesta en marcha de procesos de pensamiento lógico y estrategias de resolución de problemas.

Tal y como queda patente en estos dos documentos legales, la enseñanza obligatoria en España (y en otros países) está sufriendo una transformación en el sentido de que se está pasando de un currículo organizado por contenidos a un currículo organizado por competencias. Alsina (2004) apunta que esto es debido a varios motivos y uno de los principales es la necesidad de proporcionar a nuestros estudiantes una serie de herramientas y de recursos (no sólo contenidos teóricos) que les sirvan para desenvolverse exitosamente en su vida diaria y no exclusivamente en situaciones académicas. Centrándonos de nuevo en la competencia matemática, Alsina afirma que para alcanzarla, aparte de conseguir que los alumnos adquieran una serie de conocimientos matemáticos, debemos conseguir que sean conscientes de esta adquisición. Esta consciencia la lograremos aplicando estos conocimientos a situaciones reales y significativas para los alumnos. Una vez más constatamos la importancia de dar aplicación práctica y real a las matemáticas. Por otro lado, Coll (2007) destaca cuatro cuestiones principales asociadas a la adquisición de las

competencias, que debemos tener en cuenta también cuando trabajemos para la adquisición de la competencia matemática:

- Movilización de conocimientos: los niños deben ser capaces de movilizar y usar conocimientos relevantes para la resolución de cuestiones matemáticas varias, es decir, deben poder hacer un uso estratégico de sus conocimientos, ajustándolos en cada momento a las situaciones concretas con las que se enfrenten.
- Integración de tipos de conocimientos: movilización interconectada de diferentes tipos de conocimientos (prácticos, conceptuales, valores...).
- Contexto: el contexto donde se adquiere la competencia no puede diferir en gran medida del contexto en el que se van a aplicar. Así pues, deberíamos enseñar matemáticas de una forma estrechamente relacionada con el contexto social, cultural... de nuestros alumnos, creando situaciones y problemas que les resulten próximos e interesantes.
- Priorización de las competencias que permitirán seguir desarrollando los aprendizajes durante toda la vida de forma autónoma.

También Niss (2002, citado en Planas y Alsina, 2009) definió la competencia matemática en términos similares a los propuestos hasta ahora, y concretó ocho sub-competencias matemáticas clasificadas en dos grupos. En el primer grupo incluyó aquellas relacionadas con la formulación y respuesta de preguntas relacionadas con las matemáticas:

- Dominio de modos de pensamiento matemático: plantear preguntas propias de las matemáticas y conocer las posibles respuestas que las matemáticas nos dan, comprender la extensión y las limitaciones de los conceptos; plantear hipótesis; extraer generalizaciones, etc.
- Planteamiento y resolución de problemas matemáticos: saber identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas matemáticos...
- Análisis y construcción de modelos.

En el segundo grupo incluyó las relacionadas con el uso de las matemáticas en sí mismas:

- Razonamiento matemático: seguir una cadena de argumentos, saber extraer las ideas básicas de un enunciado, conocer qué es una demostración matemática, elaborar un argumento matemático...
- Representación de entidades matemáticas como: entender y utilizar diferentes tipos de representaciones, saberlas relacionar entre ellas...
- Manejo de símbolos matemáticos y formalismos: comprender el lenguaje matemático y saberlo relacionar con el lenguaje natural, comprender y saber aplicar las normas de los sistemas matemáticos, manejar símbolos y fórmulas...
- Comunicación relacionada con las matemáticas: comprender textos con contenido matemático y saber expresar contenidos matemáticos de forma técnica y precisa.
- Uso de recursos y herramientas: conocer y usar de forma adecuada las técnicas, instrumentos y recursos para la actividad matemática.

No podíamos terminar este apartado sin hacer referencia a la definición que se hace en el Proyecto PISA (OCDE 2006, citado en OCDE, 2009) de la competencia matemática: “La competencia matemática implica la capacidad de un individuo de identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, para hacer juicios bien fundamentados y poder usar e involucrarse con las matemáticas” (p.13). Así vemos una nueva definición en consonancia con lo que hasta el momento hemos expuesto.

Resumiendo todas las aportaciones anteriores, podríamos afirmar que ser competente en matemáticas implica adquirir un tipo de conocimiento, de lenguaje y de pensamiento matemático que nos permita interpretar, resolver y expresar situaciones diversas, tanto en contextos académicos y sobretodo en contextos reales y cotidianos, mediante el uso de procesos, recursos, herramientas y técnicas propias de las matemáticas.

En cuanto a la forma como los alumnos adquieren esta competencia matemática, hay que tener en cuenta dos aspectos fundamentales: los contenidos que se trabajan en la escuela y la forma en que éstos se trabajan. Sobre el primer aspecto, el National Council or Teachers of Mathematics (NCTM) (2006) publicó los contenidos esenciales que se deberían impartir en la etapa de Educación Primaria para lograr alumnos matemáticamente competentes. Aparecen resumidos en el siguiente cuadro:

Tabla 1. Curriculum Focal Points según el NCTM (2006)

CURRICULUM FOCAL POINTS (NCTM 2006)	
6-7 años	<ul style="list-style-type: none"> • Comprensión de la suma y la resta y estrategias de cálculo • Comprensión de relaciones entre números, incluidas la decena y la centena. • Composición y descomposición de formas geométricas.
7-8 años	<ul style="list-style-type: none"> • Comprensión del sistema decimal y del valor posicional de los números. • Cálculo mental con sumas y restas. • Práctica de medidas: medición de longitudes.
8-9 años	<ul style="list-style-type: none"> • Comprensión de la multiplicación y de la división y estrategias de cálculo. • Comprensión de la noción de fracción: fracciones equivalentes. • Descripción y análisis de propiedades geométricas de formas bidimensionales.
9-10 años	<ul style="list-style-type: none"> • Cálculo mental con multiplicaciones. • Comprensión de los números decimales y de su relación con las fracciones. • Comprensión de la noción de superficie y medida de superficies bidimensionales.
10-11 años	<ul style="list-style-type: none"> • Comprensión y agilidad en la división con números enteros. • Comprensión y agilidad en la suma y resta de fracciones y decimales. • Descripción de formas tridimensionales y análisis de

	propiedades geométricas, incluidos el volumen y la superficie.
11-12 años	<ul style="list-style-type: none"> • Comprensión en la multiplicación y división de fracciones y decimales. • Relaciones entre la multiplicación y la división. • Escritura, interpretación y uso de expresiones algebraicas y ecuaciones.

Extraído de Planas y Alsina, 2009, p.100

Estos contenidos y su secuenciación casan perfectamente con los contenidos marcados en el RD1513/2006, que son los que impartimos actualmente dentro del sistema educativo español.

Ahora bien, el otro aspecto fundamental para alcanzar la competencia matemática es la forma de impartir estos contenidos. Profundizaremos en este tema en el siguiente apartado, pero basándonos en todo lo expuesto anteriormente hay que destacar dos aspectos básicos: en primer lugar, debemos impartir los contenidos de forma contextualizada, enmarcándolos en situaciones reales o posibles próximas a la realidad de nuestros alumnos. Se trata de que trabajen las matemáticas de una forma aplicada y funcional para que los aprendizajes resulten significativos, no de una mera transmisión de conceptos, herramientas y conocimientos. El niño debe saber extraer “la matemática” contenida en cada planteamiento. Y en segundo lugar, debemos crear situaciones de trabajo donde el niño tenga que integrar distintos tipos de conocimientos, aprendizajes y estrategias; el niño debe razonar, no actuar mecánicamente, debe desplegar todo su potencial, lo que implica la intervención de otros aspectos más allá de las matemáticas.

2.3- DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS:

Una vez clarificado el concepto de competencia matemática, sería conveniente repasar aspectos prácticos referentes a la enseñanza de las matemáticas en general y de los problemas matemáticos en particular. Como ya se apuntó en la introducción, una de las premisas básicas de este trabajo es la idea de que la forma en que enseñemos esta materia está directamente relacionada, ya sea de forma positiva o de forma negativa, con los resultados que obtengan los alumnos en ella. Asimismo, en el apartado anterior, ha quedado patente que se deben adoptar ciertas estrategias a la hora de enfocar nuestro trabajo docente para conseguir que nuestros alumnos sean matemáticamente competentes. Alsina (2004) apunta como aspectos metodológicos básicos: primero, procurar que las actividades estén relacionadas con situaciones reales y próximas al contexto de los niños de 6 a 12 años (aprender para aplicar y aprender aplicando); segundo, procurar que las actividades propuestas estén diseñadas para fomentar específicamente habilidades del tema concreto a trabajar (medidas, razonamiento lógico-matemático...); tercero, fomentar que los alumnos expresen verbalmente o por escrito tanto el proceso seguido como los resultados obtenidos, hecho que les ayudará a hacer una síntesis mental de la actividad llevada a cabo; cuarto, dar explicaciones claras, estructuradas y con un nivel de complejidad ajustado a la

edad y capacidad de los alumnos; quinto, explicar los objetivos y normas de las actividades a realizar; sexto, tener muy claro qué es lo que pretendemos con cada actividad que proponemos, qué procesos y resultados esperamos; y séptimo, usar diversidad de actividades, plantear tareas del mismo tipo pero de distintas formas, y también procurar que sean actividades atractivas y motivadoras para los alumnos. Sobre esta misma cuestión, Bermejo (2004) destaca la necesidad de ceder el protagonismo al niño como aprendiz, cosa que implica fomentar una actitud activa y participativa de nuestros alumnos, fomentar el trabajo cooperativo, y fomentar el diálogo entre todos los implicados en el proceso (profesor-alumno-grupo de iguales). Desde esta perspectiva, insiste en tener en cuenta que nuestro rol en el aula será el de guía-supervisor, que deberá velar por un correcto proceso de construcción de los aprendizajes por parte de nuestros alumnos, así como facilitar las situaciones que propicien este proceso constructivo. A los aspectos anteriormente expuestos, deberíamos añadir, como apuntan Armendáriz, Azcárate y Deulofeu (1993), que es sumamente importante a la hora de planificar nuestra acción docente, el hecho de organizar y secuenciar los contenidos de manera que permitan un proceso constructivo real de las matemáticas. Los mismos autores también defienden el uso de la evaluación como una herramienta pedagógica en el sentido que se ha de usar para estimular y para proporcionar *feedback* al alumno en su proceso de aprendizaje. Planas y Alsina (2009) también destacan el hecho de que plantear las actividades como un reto puede ser un buen recurso para motivar a los alumnos. Relacionado con esta cuestión, comentan la importancia de secuenciar y graduar las actividades en función de su dificultad, de manera que se puedan adaptar a los diferentes ritmos de aprendizaje.

En cuánto a la didáctica de los problemas y de las actividades de razonamiento lógico-matemático, Canals (2010) destaca una serie de criterios metodológicos a seguir:

- Siempre que sea posible, plantear problemas a partir de la vida cotidiana. Eso significa relacionarlos con el día a día, pero también aprovechar situaciones imprevistas que se puedan ir presentando sin haber sido programadas. Debemos tener la habilidad de saberlas plantear y de acompañar a los alumnos en su proceso de reflexión.
- Reflexionar mucho sobre la forma en la que formulamos las preguntas.
- Enseñar a organizar los problemas por partes: identificar la situación inicial de la que partimos, la acción central y la situación final, así como identificar la incógnita que queremos resolver. Se puede hacer mediante esquemas, dibujos, subrayado... Este paso les ayudará a comprender la estructura lógica del problema.
- Ir alternando diferentes tipos de problemas.
- Trabajar la reversibilidad del pensamiento, es decir, plantear problemas de forma inversa buscando su punto inicial o su acción central.

- Valorar el proceso que lleva a cabo el niño para la resolución del problema más que la resolución correcta o incorrecta; el primer paso es movilizar el razonamiento matemático, hacer que los niños piensen y apliquen sus estrategias.
- Hacer verbalizar a los niños los procesos usados y los resultados hallados, pues esto ayudará a integrar y a dar significado a la acción realizada.
- Variar las formas y recursos usados para trabajar los problemas. No debemos presentar siempre o principalmente los problemas por escrito, sino que debemos potenciar el uso de materiales manipulativos para su resolución, pues se comprenden más fácilmente las acciones si intervenimos directamente en ellas. Otras formas de resolución de problemas son: mediante el cálculo mental, a través de dibujos o símbolos que representen los elementos y sus relaciones, usando la calculadora y mediante el trabajo cooperativo.
- Fomentar el aprendizaje por ensayo-error: dejar que los niños vayan probando hasta descubrir la solución.
- Dedicar mucho tiempo a la solución de problemas, pues se pueden aplicar a la mayoría de contenidos matemáticos, y son una buena herramienta para ir asimilándolos.
- Vigilar nuestra actitud hacia los problemas: los alumnos deben ver que nuestra intención es hacerlos pensar y que valoraremos sus procesos y respuestas, y no que nuestro único objetivo sea que apliquen un algoritmo y que lo resuelvan correctamente.

Muñoz y Lassalle (2002), coinciden con Canals (2010) en la mayoría de puntos expuestos anteriormente. Además, ponen mucho énfasis en el uso del diálogo en grupo. Según ellas es necesario verbalizar los procesos de análisis de la información, decisiones tomadas, estrategias seguidas, resultados... y contrastarlos con los de los demás, pues esto contribuye en gran medida a la ordenación del pensamiento y a la construcción de conocimiento: “Al verbalizar sus ideas ordenan su pensamiento, al discutir sus ideas las argumentan, las van modificando al contrastarlas con sus compañeros, las complementan, las rechazan, las reafirman...” (p. 10). En ese proceso de discusión grupal será fundamental la intervención del docente, que mediante sus intervenciones, preguntando, dando pistas, reconduciendo... guiará su proceso constructivo, que además podrá ser adaptado al potencial de cada niño. Por otra parte, reconocen que un proceso de resolución de este tipo va a ocupar mucho más tiempo, pero que éste será productivo en tanto que los aprendizajes resultantes serán significativos.

Resumiendo todas las aportaciones anteriores podríamos confeccionar una lista de criterios y recomendaciones a seguir para el trabajo de las matemáticas en general y para el trabajo de los problemas matemáticos en particular, desde una perspectiva constructivista:

- » Aplicar los contenidos y los problemas a situaciones reales, próximas o significativas para nuestros alumnos.
- » Diseñar actividades que integren distintos tipos de conocimientos y que potencien el desarrollo de razonamientos propios y creativos.

- » Secuenciar correctamente las actividades en función de la edad y el nivel de desarrollo de nuestros alumnos.
- » Usar distintos recursos y materiales aparte del papel y lápiz: calculadora, juegos, materiales manipulativos...
- » Introducir elementos lúdicos y atractivos en nuestro quehacer diario: juegos de distinta índole, adivinanzas, pasatiempos, anécdotas matemáticas, olimpiadas matemáticas... Actividades motivadoras que muevan el interés y la curiosidad de nuestros alumnos.
- » Fomentar la verbalización de los procesos, las discusiones colectivas y el trabajo cooperativo.
- » Usar pedagógicamente el error: no tratar negativamente el error, sino aprovecharlo como una posibilidad para seguir construyendo conocimiento y para dar información al alumno en su propio proceso de construcción de aprendizaje.
- » Papel del maestro: guía-facilitador de aprendizajes.

Y aparte de todo lo expuesto anteriormente y especialmente para el trabajo con problemas matemáticos tendremos en cuenta:

- » Poner especial atención en la forma de formular los enunciados de los problemas.
- » Enseñar a organizar los problemas por partes (situación inicial, incógnita...) usando distintas estrategias (esquemas, dibujos, materiales manipulativos...).
- » Trabajar con distintos tipos de problemas, así como trabajarlos de distintas formas (a la inversa...).
- » Transmitir a nuestros alumnos que nos interesan sus procesos y razonamientos más que la simple aplicación de un algoritmo resuelto correctamente (la intención es hacerlos pensar, después viene la aplicación mecánica de algoritmos).

2.4- ¿QUÉ SIGNIFICA RESOLVER UN PROBLEMA?

Una vez repasadas las cuestiones metodológicas referentes al tema que nos ocupa, vamos a centrarnos en definir qué es un problema, cuáles son sus fases de resolución, y cuestiones varias referentes a los problemas que debemos tener en cuenta en nuestro trabajo en el aula.

Podríamos afirmar que si preguntamos a un niño qué es un problema muy probablemente nos respondería que es realizar unas operaciones para llegar a la solución correcta. En realidad ésta es la idea que tienen la mayoría de las personas acerca de la definición de problema matemático, pero sería conveniente matizar y completar esta definición repasando lo que dicen diversos autores sobre ello. Para Canals (2010) esta idea de problema no es acertada y debemos hacer que los niños modifiquen este concepto que tienen sobre los problemas matemáticos. Canals afirma que no se trata de ir aplicando de forma rutinaria los mismos recursos y estrategias, sino que se trata de ir buscándolos y descubriéndolos en cada situación concreta, puesto que un problema es una situación nueva (a ser posible real o próxima) a la que no nos hemos enfrentado previamente y

sobre la que tenemos que encontrar la forma de resolverla. Estas situaciones puede que tengan una solución o más de una, y puede que requieran la resolución de un algoritmo o no. Donde pone realmente énfasis la autora es en el desarrollo del razonamiento y del pensamiento lógico que estas situaciones provocan. En la misma línea Bermejo (2004) afirma: “Los problemas que se planteen en el aula deben estar encaminados al descubrimiento de nuevos conocimientos y no solamente a la aplicación de los ya adquiridos” (p. 73).

Muñoz y Lassalle (2002), por su parte, afirman que un problema es una actividad mental compleja que se pone en marcha ante una situación que no se puede resolver automáticamente y que conlleva la posibilidad de resolverla de un modo matemático. Esta actividad mental implicará elementos como los recursos lógico-matemáticos, la perseverancia, el deseo de resolución, la paciencia, etc. Así pues, relacionan el concepto de problema matemático con elementos propios de las matemáticas, pero también con aspectos que no los son y que también deben ser tenidos en cuenta. Esta idea refuerza el hecho de que resolver problemas no es una mera aplicación mecánica de unos algoritmos, sino que implica el despliegue de habilidades varias, recursos matemáticos, cualidades personales, etc.

En consonancia con las autoras mencionadas está Echenique (2006) cuando insiste en diferenciar ejercicio de problema. Según afirma, los ejercicios tienen como finalidad la aplicación rutinaria de algoritmos o fórmulas, por lo que ya se adivina claramente lo que hay que hacer, suelen tener una única solución, y se suelen resolver de forma rápida y sin demasiada implicación por parte del alumno. En cambio, los problemas suponen un reto que, para solucionarlos, requieren implicación por parte del alumno para llevar a cabo un proceso de investigación, por lo que se tarda más tiempo, y a veces, se pueden usar distintas estrategias y encontrar más de una solución válida.

Por otro lado, Nieto (2005) define el término “problema” de la siguiente forma: “Un problema es un obstáculo arrojado ante nuestra inteligencia para ser superado, una dificultad que exige ser resuelta. El ser humano vive resolviendo problemas: desde el de satisfacer sus necesidades básicas hasta los más complejos desafíos científicos y tecnológicos” (p.38). Entonces entendemos que un problema no necesariamente debe tratarse de unas cantidades numéricas con las que realizar un algoritmo, sino que se trata de usar nuestro conocimiento para encontrar una solución a una determinada situación, la cual puede ser de distintos tipos.

Más allá va el Consejo de Maestros de Matemática de los Estados Unidos de América cuando afirman que “La resolución de problemas es la piedra angular de la matemática escolar” (citado en Nieto, 2005, p. 38), en referencia al hecho de que la resolución de problemas es (o debería ser) el eje sobre el que se introducen y se aprenden el resto de contenidos matemáticos.

Podríamos seguir repasando definiciones de distintos autores, pero llegados a este punto ya podemos afirmar que el concepto de problema matemático va mucho más allá de la idea que planteábamos al principio de este apartado. Entonces, un problema matemático sería una situación que se tiene que resolver, y que para descubrir la solución (o soluciones) debemos iniciar un

proceso mental complejo en el que intervendrán factores varios, algunos relacionados con conceptos matemáticos y con el razonamiento lógico-matemático, y otros con aspectos de tipo personal, o ajenos a la matemática. En la resolución de los problemas, la aplicación de algoritmos será secundaria, pues primará el proceso de razonamiento y de descubrimiento. Es por todo ello, que la resolución de problemas es una excelente herramienta para trabajar todos los contenidos matemáticos, desde los algoritmos más simples, hasta planteamientos geométricos, medición, etc. Por otro lado, la resolución de problemas es un aprendizaje que debe trabajarse y que se va adquiriendo a lo largo de toda la vida, no sólo en la etapa escolar. Es importante tener en cuenta que los problemas matemáticos que se nos presentan en la mayoría de libros de texto responden al modelo mecánico y repetitivo que comentábamos al principio de este apartado, por lo que como docentes, debemos esforzarnos a buscar alternativas a este tipo de ejercicios.

Estamos de acuerdo que resolver un problema es un proceso, y todo proceso tiene sus fases. Sobre esta cuestión, y a pesar de su antigüedad, siguen vigentes las propuestas del matemático George Pólya, el cuál en su gran obra del 1945 *How to solve it* (Traducido al español en *Como plantear y resolver problemas*), exponía detalladamente las fases a seguir para la resolución de un problema de cualquier tipo. Pólya plantea que la resolución de un problema pasa por cuatro fases:

1- *Comprensión del problema*: implica comprender el texto y comprender la situación que en él se plantea. Esto requiere identificar la incógnita, los datos que se nos ofrecen, si tenemos suficiente información, si toda ella es relevante para la resolución del problema, si podemos usar estrategias ya conocidas...

2- *Configuración de un plan*: una vez tenemos claro el punto de partida y el punto al que queremos llegar hay que pensar qué camino vamos a seguir para llegar a la solución, planteando un posible uso de las siguientes estrategias: buscar un patrón; ensayo-error; razonamiento indirecto; hacer un diagrama, figura, lista, dibujo...; resolver un problema equivalente o uno de similar pero más simple; reformular el problema; etc.

3- *Ejecución del plan*: en este paso hay que llevar a cabo la estrategia escogida, comprobando cada uno de los pasos que se van realizando. Si no se resuelve, empezar de nuevo con una nueva estrategia.

4- *Visión retrospectiva*: se trata de revisar el proceso seguido y de reflexionar sobre la solución que hemos encontrado: mirar si es correcto el resultado y el razonamiento realizado, si responde a la incógnita inicial, si se puede solucionar de otras formas, si se puede generalizar...

Estas cuatro fases se pueden englobar dentro de dos procesos básicos: la comprensión del problema y su solución. Este método de resolución propuesto por Pólya se ha utilizado y se sigue utilizando en numerosas disciplinas, aparte de las Matemáticas. Sienta una muy buena base para trabajar los problemas matemáticos con nuestros alumnos y para enseñarlos a enfocar la resolución de problemas de una forma lógica y ordenada por lo que es aconsejable tenerlo en cuenta como recurso a usar en el aula. Sin embargo, tenemos que pensar que no existen fórmulas

universales para el caso que nos ocupa, y que ceñirnos de una forma demasiado estricta en estos cuatro pasos también puede ser contraproducente en el sentido que puede limitar el pensamiento creativo de nuestros alumnos, aparte de que deja un poco de lado la importancia de la metacognición (conocimientos conceptuales y conocimientos procedimentales). Siguiendo con esta idea, Calvo (2008) destaca que los docentes caemos en el error de usar métodos mecánicos en la resolución de problemas y que esperamos que nuestros alumnos hagan lo mismo, coartando su libertad de pensamiento creativo que puede dar lugar a soluciones alternativas o, en ocasiones, en más de una solución válida. Aun así, usar las cuatro fases del método Pólya puede dar lugar a una variada riqueza de soluciones y estrategias, por lo que bien planteado, es una buena forma de trabajar los problemas con nuestros alumnos.

Alan Schoenfeld fue otro autor que investigó sobre el tema de la resolución de problemas. Este autor se centró en investigar las causas del fracaso de numerosos estudiantes ante la resolución de problemas, aun aplicando métodos tan sencillos y clarificadores como el propuesto por Pólya. Schoenfeld, en su libro de 1985, *Mathematical Problem Solving* afirma que los cuatro pasos del método de Pólya son insuficientes para resolver con éxito un problema y pone de manifiesto la existencia de cuatro aspectos referentes al estudiante que afectan a la resolución de problemas y que por lo tanto deben ser tenidos en cuenta. Estos cuatro aspectos son:

- 1- *Recursos cognitivos*: son los conocimientos y procedimientos matemáticos de los que dispone el alumno.
- 2- *Heurísticas*: reglas y estrategias para aplicar en situaciones problemáticas.
- 3- *Control*: estrategias metacognitivas, es decir, la forma como usamos los conocimientos, reglas y estrategias para abordar el problema y usar de forma eficaz los recursos (planificar, establecer metas, revisar...).
- 4- *Sistema de creencias*: expectativas y creencias personales que tiene el estudiante hacia las matemáticas y su trabajo con ellas.

Posteriormente, Schoenfeld (1992, citado en Gavilán, 2001) matiza y redefine estos cuatro aspectos, denominándolos:

- 1- *Conocimiento de base*
- 2- *Estrategias de resolución de problemas*
- 3- *Gestión y control*
- 4- *Creencias y afectos*

Así pues, las teorías de Schoenfeld (1985, 1992) complementarían la aplicación del método de Pólya (1945), en el sentido de que no sólo se deben tener en cuenta una serie de pasos estructurados para una correcta resolución de problemas, sino que además debemos tener en cuenta una serie de aspectos personales relativos a cada alumno. En caso de seguir fracasando en la resolución de problemas, es conveniente indagar en cuál de estos aspectos el alumno presenta dificultades. Según Schoenfeld (1985), los problemas se encuentran mayoritariamente en la falta de

heurísticas o estrategias que permitan al alumno abordar correctamente la resolución del problema. En sus trabajos posteriores, añade la importancia de los afectos y creencias personales en la resolución de problemas, en tanto que unos sentimientos y creencias negativos llevarán al alumno a la desmotivación y frustración, mientras que si son positivos, le llevarán a la curiosidad y al interés para encontrar la solución.

Para terminar este apartado, concluiremos que el método de resolución de situaciones-problema en cuatro fases ideado por Pólya será un buen punto de partida para nuestro trabajo con los problemas matemáticos, pero siempre teniendo en consideración los aspectos personales de los alumnos propuestos por Schoenfeld, que intervienen claramente en este proceso. Además, no podemos olvidar en el trabajo de resolución de problemas, en primer lugar, los aspectos metodológicos comentados en el apartado anterior; en segundo lugar, la importancia que daremos a la manipulación durante el proceso y, en tercer lugar, algunas cuestiones finales que expondremos a continuación:

- Los problemas planteados deberán adaptarse al grupo al que se dirigen y también a las diferencias individuales (adaptación al contexto y flexibilidad entre distintos niveles).
- El docente tendrá como tarea orientar hacia la resolución.
- Los problemas deben ser vistos como un reto motivador, no como una dificultad insalvable. El docente tendrá estimular el proceso.
- La actitud del docente hacia los problemas puede transmitirse a los alumnos, por lo que debe ser positiva.
- La comprensión del proceso seguido por parte de los alumnos es de máxima importancia.
- Las destrezas básicas para la resolución de los problemas (comprensión, voluntad, expresión mediante símbolos, descubrimiento de estrategias, proceso de generalización de resultados, etc.) no son innatas sino que también son contenidos que se deben aprender y trabajar.

2.5- TIPOLOGÍA DE PROBLEMAS:

En el apartado anterior hemos concretado el concepto de problema y varios aspectos relativos a su resolución. En este apartado nos centraremos a analizar diferentes tipos de problemas que podemos (y debemos) presentar en las clases de matemáticas. Hay numerosos autores que han propuesto distintas clasificaciones de problemas en base a diferentes criterios. Aquí vamos a exponer algunas de las clasificaciones que nos parezcan más acordes al tipo de trabajo en el que se basará nuestra propuesta.

En primer lugar tenemos una clasificación de los problemas aritméticos de estructura aditiva y de estructura multiplicativa, la cual se basa en la estructura semántica del problema y en la ubicación de la incógnita (Echenique, 2006; Bermejo, 2004). Son las siguientes:

» Problemas de primer nivel: requieren una sola operación:

A- Problemas de estructura aditivo-sustractiva:

- *Problemas de cambio*: se parte de una cantidad inicial que posteriormente es modificada por otra, dando lugar a un resultado. Dentro de esta categoría encontraríamos 6 subtipos de problemas en función de si se añade (problemas adición) o se quita (problemas de sustracción), y en función de donde se sitúa la incógnita (primera cantidad, segunda cantidad o resultado).
- *Problemas de combinación*: se parte de dos cantidades que se diferencian en alguna característica y que se unen para encontrar el resultado. Hay tres subtipos: el primero une las dos cantidades; y el segundo y el tercero tienen la incógnita en una de las dos cantidades.
- *Problemas de comparación*: se comparan dos cantidades a través de las fórmulas “más que” y “menos que”. Hay seis subtipos en función de si se conocen las dos cantidades, la cantidad referente y la diferencia, o la cantidad comparada y la diferencia, y de si preguntamos por cuántos más o cuántos menos.
- *Problemas de igualación*: partimos de dos cantidades y buscamos la acción que las igualará, aumentando o disminuyendo una de ellas. Hay seis subtipos en función de si la acción es añadir o quitar y de qué cantidad es la incógnita.

B- Problemas de estructura multiplicativa:

- *De reparto equitativo o grupos iguales*: son los más habituales en los libros escolares, los que más sencillamente aplican la multiplicación como la suma repetida del mismo número y la división como reparto o partición. La incógnita puede ser tanto el resultado como uno de los otros dos factores.
- *De factor N o comparación multiplicativa: Problemas escalares*: implica comparación de “tantas veces más / menos que”. Son más difíciles, representan contextos no muy próximos a los alumnos y no se suelen usar mucho en las aulas, excepto cuando se trabajan los conceptos de “doble”, “triple”, “la mitad” o “un tercio”. La incógnita puede ser el resultado o uno de los dos factores.
- *De razón o de tasa*: en el enunciado incluyen informaciones de tres magnitudes diferentes, una de ellas, la tasa, resulta de relacionar las otras dos (€/kg, Km/h...). La incógnita puede ser cualquiera de las tres magnitudes.
- *De productos cartesianos*: implica calcular todas las posibilidades de combinación de los números mediante la división o la multiplicación. Resultan difíciles a los alumnos, porque los enunciados no aportan pistas sobre los pasos a seguir y requieren que se haga una representación mental de la situación.

» Problemas de segundo nivel (o combinados): requieren dos o más operaciones para su resolución:

A- Según la estructura del enunciado:

- *Problemas combinados fraccionados*: aparecen las preguntas encadenadas en el enunciado, lo que nos lleva a su resolución.

- *Problemas combinados compactos*: aparece la pregunta al final y un conjunto de datos que debemos pensar como relacionar para llegar a la solución final. Son más complejos.

B- Según el tipo de operaciones necesarias para resolverlos:

- *Problemas combinados puros*: requieren operaciones de un solo tipo (multiplicar, dividir...).
- *Problemas combinados mixtos*: requieren operaciones de distintos tipos.

C- Según la secuencia temporal descrita en el enunciado:

- *Problemas combinados directos*: los datos aparecen en el enunciado en el mismo orden en los que se tienen que usar.
- *Problemas combinados indirectos*: los datos no aparecen en el enunciado en el mismo orden en que se deben utilizar.

» **Problemas de tercer nivel: los datos del enunciado no son números naturales sino fraccionarios, decimales, etc.**

Se clasifican de formas similares a los de primer y segundo nivel, con la particularidad del tipo de números que manejan.

A continuación seguiremos con otros tipos de problemas matemáticos, pero hemos querido explicar con detalle los distintos tipos de problemas aritméticos porque son los que más presencia tienen actualmente en las aulas escolares.

Siguiendo con Echenique (2006), también nos ofrece una categorización del resto de problemas que no son de tipo aritmético:

- *Problemas geométricos*: se manejan formas, conceptos espaciales, figuras...
- *Problemas de razonamiento lógico*: se resuelven a través de razonamientos lógico-matemáticos, la mayoría de veces sin aplicar ningún algoritmo (sudokus, enigmas...).
- *Problemas de recuento sistemático*: se deben encontrar todas las soluciones posibles.
- *Problemas de razonamiento inductivo*: enuncian propiedades numéricas o geométricas en base al descubrimiento de patrones regulares (seriaciones...).
- *Problemas de azar y probabilidad*.

Por su parte, Canals (2010) en una categorización similar pero menos extensa y concreta que la anterior, clasifica los problemas matemáticos en seis bloques en función de los aspectos que principalmente trabajan, y divide cada bloque en varios subtipos según las características del problema:

- *Bloque 1: Según como nos llega la información del problema*:
 - Problemas visuales
 - Problemas manipulativos
 - Problemas de la vida cotidiana

- *Bloque 2: Directamente relacionados con las capacidades lógicas:*
 - Juegos de lógica
 - Enigmas
 - Problemas de ingenio
- *Bloque 3: Problemas de lógica centrados en la estructura del problema:*
 - Problemas que trabajan la comprensión del texto
 - Problemas que trabajan la estructura lógica
- *Bloque 4: Problemas que fomentan la capacidad de creación y la autonomía personal:*
 - Problemas abiertos
 - Problemas con la posibilidad de escoger los medios
- *Bloque 5: Problemas que preparan la investigación y fomentan la creatividad:*
 - Problemas de investigación
 - Problemas de creación propia
- *Bloque 6: Problemas aplicados a algún gran tema de la matemática (bloque que deja abierto):*
 - Problemas de cálculo
 - Problemas de geometría
 - Problemas de medición
 - Problemas para resolver con calculadora
 - Etc.

Esta clasificación nos es útil para escoger el tipo de problemas a trabajar para conseguir un objetivo concreto, aunque la misma autora reconoce que muchos de los problemas pueden situarse en más de un bloque, y que lo mismo pasa con otras muchas clasificaciones propuestas por otros autores, por lo que termina afirmando que los problemas no se deberían intentar clasificar (Canals, 2010).

Muñoz y Lassalle (2002) ofrecen una clasificación parecida a las anteriores, pero además, remarcan la importancia de trabajar todos estos problemas mediante tres ejes:

- ❖ Aprovechamiento de los problemas matemáticos que surgen en el aula en el día a día.
- ❖ Situaciones matemáticas secuenciadas en unidades didácticas o a través de temas.
- ❖ Situaciones didácticas diseñadas específicamente para trabajar los problemas matemáticos.

Así pues, debemos recordar que los problemas, sean del tipo que sean, se pueden y deben trabajar desde distintas perspectivas y aprovechando múltiples situaciones.

Como decíamos anteriormente, podríamos seguir enumerando una gran variedad de categorizaciones, pero creemos que las más útiles para nuestro trabajo serán las expuestas anteriormente, pues nos permitirán centrarnos en el nivel de dificultad, en el tipo y temática del problema y en el objetivo que queremos alcanzar cuando trabajemos en el aula. También queremos remarcar la importancia de no centrarnos sólo en el tipo más común de problemas, que son los

aritméticos, y trabajar problemas de diferentes tipos para favorecer distintas habilidades y conocimientos.

2.6- USO DE RECURSOS LÚDICO-MANIPULATIVOS:

“Dime y lo olvido, enséñame y lo recuerdo, involúcrame y lo aprendo”

Benjamin Franklin (1706-1790) *Estadista y científico estadounidense.*

(Bosch, 2006, p.56)

Hasta el momento hemos expuesto las teorías que sustentan nuestra propuesta y hemos explicado el concepto de problema matemático y los aspectos relacionados con ellos. En este apartado pretendemos explicar qué entendemos por recursos lúdico-manipulativos y por qué creemos que es tan relevante su uso para el trabajo en el aula en general y con los problemas matemáticos en concreto.

En primer lugar sería necesario clarificar qué entendemos por recursos lúdico-manipulativos. Los recursos lúdico-manipulativos son actividades que se trabajan mediante materiales y herramientas, que se pueden manipular físicamente, que tienen un componente de juego o ambas cosas a la vez.

2.6.1- ¿Por qué recursos lúdicos?

Como ya hemos comentado varias veces a lo largo del trabajo, las tendencias actuales en didáctica indican que la forma como enseñemos los contenidos está, para bien o para mal, relacionada con los resultados de los alumnos, y con su actitud de trabajo. Presentar materiales atractivos y motivadores, que les permitan percibir las tareas como un juego más que como un ejercicio, o en nuestro caso, como un problema, de entrada ya predispone a los alumnos a enfocar el trabajo de una forma positiva y con una mayor implicación. Se trata de que los niños cojan gusto a las matemáticas y además aprendan. Es por ello que debemos vencer los prejuicios existentes hacia el juego, que lo consideran como una actividad poco seria, infantil y sin utilidad. Un juego, bien seleccionado, bien organizado y bien aplicado, puede ser tan útil como cualquier otra actividad considerada más “académica”. Desde la psicología ya se apunta desde hace años que el juego es una actividad necesaria para favorecer el desarrollo cognitivo de los niños. Bettelheim (1987, citado en Alsina 2004) afirma que el juego es una actividad de tipo simbólico a través de la cual los niños resuelven a nivel inconsciente problemas que no podrían resolver en la realidad, poniendo en marcha durante en este proceso distintos procesos mentales; idea que también compartía Winnicott (1971, citado en Alsina 2004). En esa misma línea, Vygotski (1995, citado en Alsina 2004) afirma que el juego supone una zona de desarrollo potencial de los aprendizajes, en tanto que hace de puente entre fantasía y realidad. En el caso concreto de la aplicación del juego a los problemas matemáticos, el hecho de resolverlos de una forma activa y creativa provocará que los niños busquen estrategias y conecten los nuevos esquemas con los conocimientos previos, dando lugar a los nuevos aprendizajes (Abrantes, 2002).

Así pues, introducir juegos o presentar las actividades de una forma lúdica nos servirá para alcanzar dos objetivos fundamentales: el primero es que los niños trabajen las matemáticas, y en este caso, los problemas, con motivación y entusiasmo, cambiando las expectativas más bien negativas que les suele generar esta materia; el segundo es que los niños se involucren en su propio proceso de adquisición de conocimientos, construyendo sus aprendizajes de una forma significativa. En conclusión, es necesario que progresivamente introduzcamos el juego en las aulas como un recurso más, usado de una forma planificada y rigurosa, como muchos otros recursos ya presentes en el aula, y no sólo como una forma de entretenimiento. Se trata de aprender matemáticas jugando, no de jugar en clase de matemáticas. En este sentido Alsina (2004) propone diez razones para tener en cuenta el juego como recursos didáctico:

Tabla 2. Decálogo del juego en clase de matemáticas

DECÁLOGO DEL JUEGO EN CLASE DE MATEMÁTICAS	
1.	Es la parte de la vida más real de los niños. Utilizándolo como recurso metodológico se traslada la realidad de los niños a la escuela y permite hacerles ver la necesidad y la utilidad de aprender matemáticas.
2.	Las actividades lúdicas son enormemente motivadoras. Los alumnos se implican mucho y se las toman en serio.
3.	Trata distintos tipos de conocimientos, habilidades y actitudes hacia las matemáticas.
4.	Los alumnos pueden afrontar contenidos matemáticos nuevos sin miedo al fracaso inicial.
5.	Permite aprender a partir del propio error y del error de los demás.
6.	Respetar la diversidad del alumnado. Todos quieren jugar, pero lo que resulta más significativo es que todos pueden jugar en función de sus propias capacidades.
7.	Permite desarrollar procesos psicológicos básicos necesarios para el aprendizaje matemático, como son la atención y la concentración, la percepción, la memoria, la resolución de problemas y búsqueda de estrategias, etc.
8.	Facilita el proceso de socialización y, a la vez la propia autonomía personal.
9.	El currículum actual recomienda de forma especial tener en cuenta el aspecto lúdico de las matemáticas y el necesario acercamiento a la realidad de los niños.
10.	Persigue y consigue en muchas ocasiones el aprendizaje significativo.

Extraído de Alsina (2004), p. 14

Con este decálogo, entonces, queda perfectamente justificada la introducción de recursos lúdicos en el aula.

2.6.2- ¿Por qué recursos manipulativos?

En el apartado donde hemos expuesto las teorías que sustentan este trabajo hemos repasado dos autores que también nos servirán para justificar el uso de materiales manipulativos, Montessori y Piaget. Uno de los puntales de la pedagogía de Montessori era la idea de que los niños aprenden a partir de manipular y de experimentar con objetos físicos. Por su parte, Piaget y sus colaboradores (1975) afirmaban que los niños aprenden a partir de la acción, de las acciones que llevan a cabo sobre los objetos. Canals (2001, citada en Alsina, 2004), por su parte, defiende que la experimentación con materiales manipulativos, si está bien planteada y organizada, facilitará el paso a la abstracción, fomentará el descubrimiento y propiciará unos aprendizajes significativos. Bermejo (2004) recuerda la existencia de estudios que afirman que el uso de material manipulativo fomenta en los alumnos un mayor “sentido del número”, aparte de una mayor motivación hacia el trabajo. De las aportaciones anteriores se desprende la idea de que la manipulación de objetos, aparte de convertir en más atractivas las actividades, estimula una serie de acciones mentales que fomentan los aprendizajes matemáticos, por lo que es un paso necesario para realizar las tareas con éxito y para alcanzar la competencia matemática, sobre todo en las etapas de educación infantil y primaria. Además, constituye un material flexible y versátil, muy adecuado con niños con dificultades de aprendizaje. Así pues, la manipulación de objetos debe estar presente también como un recurso más en el aula, como una forma de trabajar los distintos contenidos y las distintas competencias matemáticas, y como complemento al trabajo con lápiz y papel o a otros recursos de tipo más abstracto. Como recurso didáctico que es, deberá ser cuidadosamente seleccionado y planificado, y también adecuado al alumnado al que irá dirigido, al igual que sucedía con los recursos lúdicos.

2.6.3- Aplicación en el aula:

Para finalizar el apartado de marco teórico y antes de adentrarnos de lleno en la propuesta didáctica, nos gustaría remarcar algunas ideas ya expuestas en los apartados anteriores. En primer lugar, defendemos el uso de materiales lúdico-manipulativos como recurso, por su poder motivador y por las acciones mentales que estimulan. En segundo lugar, como recurso didáctico, debe ser planificado y estar en consonancia con la programación del curso con el que vamos a usarlos, y se debe adaptar a las características del alumnado al que va dirigido. Y por último, debe quedar muy claro que usar estos recursos no es una forma de entretener, sino una forma de aprender.

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1- INTRODUCCIÓN:

En los apartados sucesivos vamos a exponer nuestra propuesta de intervención. Está propuesta consiste en una recopilación de posibles actividades para trabajar problemas matemáticos en el aula de una forma activa y atractiva, mediante recursos lúdico-manipulativos, durante el segundo ciclo de primaria. Hay que tener en cuenta que la evolución de los niños desde que empiezan hasta que acaban este segundo ciclo es notable, por lo que se deberán adaptar las actividades al momento evolutivo y a los conocimientos previos en cada caso particular. Sin embargo, en este segundo ciclo, los niños ya se encuentran de lleno en el periodo de las operaciones concretas de Piaget, por lo que son capaces de hacer la gran mayoría de tareas indicadas en el apartado 2.1 de este trabajo. Por otro lado, los contenidos marcados en el RD1513/2006 vienen especificados por ciclos, por lo que los problemas trabajados podrán adecuarse a los dos cursos del ciclo sin problemas.

En primer lugar, vamos a exponer los objetivos de nuestra propuesta de intervención, su temporalización, su metodología y su evaluación. A continuación, concretaremos las actividades a realizar en el aula para trabajar los problemas. Éstas estarán divididas en distintas categorías según la naturaleza de los problemas y los objetivos que queremos lograr a través de ellos. Cada actividad vendrá acompañada de una breve descripción, junto con una serie de indicaciones prácticas y ejemplos varios. Seguidamente, dedicaremos un apartado a la evaluación de la propuesta en sí misma. Para terminar este capítulo, analizaremos las posibles limitaciones y dificultades que se puedan derivar de la aplicación de esta propuesta.

Finalmente, insistiremos en que esta propuesta de intervención no constituye una programación didáctica en sí misma, será cada docente el que deberá escoger, y en su caso adaptar, organizar y temporalizar las actividades que le sean más adecuadas en cada momento.

3.2- PROPUESTA DE INTERVENCIÓN:

3.2.1- Objetivos:

Con la aplicación de esta propuesta de intervención, el objetivo principal que queremos conseguir es lograr que los niños segundo ciclo de primaria mejoren sus habilidades en la resolución de problemas matemáticos, trabajando de una forma atractiva y participativa.

Conseguir este objetivo principal implica conseguir otros objetivos secundarios como:

- Ampliar el repertorio de estrategias y conocimientos útiles en la resolución de problemas de nuestros alumnos.
- Promover que los niños tengan unas expectativas más positivas hacia la asignatura de matemáticas en general y a los problemas matemáticos en particular.
- Ampliar el repertorio de tipos de problemas matemáticos trabajados en el aula.

- Aprender a trabajar en distintas agrupaciones de alumnos.
- Introducir los recursos de tipo lúdico y/o manipulativo en el día a día del aula.

En resumen, la aplicación de esta propuesta de intervención puede beneficiar tanto a los alumnos, en cuanto a la mejora de aspectos relacionados con las matemáticas y en aspectos de satisfacción personal, como a profesores, en el sentido de disponer de más recursos didácticos a la hora de trabajar los problemas matemáticos.

3.2.2- Cronograma de aplicación:

Esta propuesta de intervención está pensada para aplicar durante todo un curso escolar, de octubre a junio (aproximadamente 32 sesiones). De entre todas las horas que se dispongan cada semana para impartir matemáticas, se escogerá una y se establecerá como la sesión que dediquemos a trabajar única y exclusivamente los problemas mediante recursos-lúdico manipulativos. Esto no significa que en el resto de sesiones de matemáticas no se trabajen problemas matemáticos; se pueden y se deben trabajar también a medida que trabajamos otros conceptos del área, y se pueden ir introduciendo estrategias y procedimientos que aprendamos paralelamente con la aplicación de la propuesta, pero sí que será esta sesión la que dediquemos a desarrollar la propuesta. Es importante que dediquemos el tiempo necesario para cada actividad. Debe primar la calidad en la resolución del problema por encima de la cantidad de problemas que resolvamos.

Los problemas se dividirán por bloques entre los tres trimestres de la siguiente forma (entre paréntesis el número de sesiones dedicadas a cada bloque):

1r. Trimestre:

- Bloque 1: Introducción a la resolución de problemas (1)
- Bloque 2: Análisis de los enunciados (5)
- Bloque 3: Problemas aritméticos (con materiales manipulativos, con imágenes, con esquemas gráficos, etc.) (5)

2º Trimestre:

- Continuación bloque 3: Problemas aritméticos (con materiales manipulativos, con imágenes, con esquemas gráficos, etc.) (3)
- Bloque 4: Problemas de lógica, ingenio y enigmas (5)
- Bloque 5: Problemas geométricos y de orientación espacial (3)

3r. Trimestre:

- Bloque 6: Problemas de medición (longitud, masa y capacidad) (3)
- Bloque 7: Problemas para resolver con la calculadora (2)
- Bloque 8: Problemas de creación propia (3)
- Bloque 9: Olimpiada de problemas (2)

Esta temporalización y agrupación de los problemas queda sujeta a cambios si el docente lo cree necesario.

La sesión semanal dedicada a la propuesta se estructurará de la siguiente forma: dedicaremos los cinco minutos iniciales al diálogo colectivo para recordar lo que hemos trabajado y aprendido en las sesiones anteriores y para disipar las posibles dudas. A continuación, el docente presentará la propuesta del día: en qué consistirá la actividad, qué objetivos persigue, cómo nos debemos agrupar para trabajar... Los últimos diez minutos los volveremos a dedicar al diálogo colectivo para hacer una puesta en común del trabajo realizado, recapitular sobre lo que nos ha aportado la actividad del día, reflexionar sobre los nuevos aprendizajes y resolver posibles dudas. Es importante que introduzcamos correctamente la actividad: los alumnos deben saber qué se espera que hagan y que perseguimos con aquél trabajo; asimismo, es importante recapitular al final de la sesión para que puedan integrar correctamente los aprendizajes trabajados en ella.

3.2.3- Características básicas del entorno:

Esta propuesta de intervención está pensada para llevarse a cabo con alumnos de segundo ciclo de cualquier escuela de educación primaria de nuestro país. Las actividades incluidas en la propuesta son muy variadas, adaptables y flexibles, por lo que no se deben cumplir unas condiciones concretas para poderla llevar a cabo. Se puede usar en escuelas urbanas, rurales, de entornos socioculturales y económicos de todos los tipos, con niños con necesidades educativas especiales, etc. Los únicos requisitos son que tanto los docentes como el equipo directivo crean en el uso de metodologías innovadoras de tipo participativo y estén dispuestos a realizar el esfuerzo que esto supone en beneficio de la calidad educativa que ofrecen a sus alumnos.

3.2.4- Metodología:

En los apartados dedicados al marco teórico, ya se han expuesto varios aspectos metodológicos que respaldan esta propuesta de intervención. En este apartado expondremos una serie de puntos importantes los cuales deben ser tenidos en cuenta en la aplicación de la propuesta:

1. El alumno es el protagonista de su proceso de aprendizaje. El maestro es el guía. Esto significa que debemos dejar que el alumno tome las riendas de su proceso de construcción de conocimiento, permitiéndole investigar, indagar, experimentar, aprender por descubrimiento, por ensayo-error, etc. Mientras tanto, nuestro papel será el de guía-facilitador de situaciones que propicien los nuevos aprendizajes, supervisando y moderando todo el proceso.
2. Debemos fomentar el trabajo cooperativo. Es importante que los niños trabajen en grupos o en parejas, además de trabajar individualmente. Numerosos estudios han demostrado que trabajar de forma cooperativa es enormemente enriquecedor. En caso de trabajar individualmente, es importante hacer puesta en común de los resultados y de los procedimientos seguidos.

3. Debemos fomentar el diálogo y la verbalización de las acciones llevadas a cabo. De esta forma, los alumnos son capaces de racionalizar el trabajo llevado a cabo y de integrarlo en sus esquemas de una forma más exitosa.
4. Debemos transmitir a nuestros alumnos unas expectativas positivas hacia ellos y hacia el trabajo a realizar.
5. Debemos valorar seriamente todas las respuestas de nuestros alumnos. Hay que recordar que a menudo no hay un solo camino para llegar a la solución, y que el objetivo principal de la resolución de problemas es hacer pensar a nuestros alumnos, no que apliquen estrategias aprendidas o algoritmos de forma mecánica.
6. Hay que dedicar tiempo y dejar tiempo a la resolución de problemas. Los niños tienen la creencia que los problemas se deben resolver con rapidez y sino, es que no tienen solución, y deben cambiar esta dinámica.
7. Debemos crear un buen clima. Debe reinar la confianza y el respeto, pues los niños deben sentirse confiados para realizar su trabajo. Como ya hemos comentado anteriormente, se debe hacer un uso pedagógico del error, el niño debe sentir que no es un castigo, sino una oportunidad para mejorar.
8. Debemos procurar que las actividades estén contextualizadas, es decir, se basen en situaciones reales o próximas a los contextos de nuestros alumnos.
9. Es importante que el grado de dificultad y el contenido de los problemas se ajusten al nivel de nuestros alumnos.
10. Debemos explicar las instrucciones, normas y condiciones con claridad y precisión.

Además de estos diez puntos, tendremos muy en cuenta las peculiaridades de cada uno de nuestros alumnos, proporcionándoles en cada caso, las ayudas o recursos necesarios para que puedan ir alcanzando los objetivos marcados y realizando exitosamente las actividades.

3.2.5- Evaluación de los alumnos:

Vamos a dedicar el presente apartado a explicar cómo podríamos evaluar a nuestros alumnos para comprobar si con la aplicación de la propuesta de intervención hemos alcanzado los objetivos propuestos, y en qué grado lo hemos hecho. Por otro lado, también será necesario realizar una evaluación inicial para conocer los conocimientos previos de nuestros alumnos y para marcar el punto de partida de la propuesta.

- **Evaluación inicial:** se realizarán dos actividades de distintas características y finalidades. La primera será una hoja con una relación de problemas de distintos tipos que los alumnos deberán responder individualmente. Esta actividad nos permitirá conocer los conocimientos y estrategias de cada alumno en relación a la resolución de problemas. Podemos ver un ejemplo en el Anexo I. La segunda será la puesta en común de los problemas resueltos en la prueba anterior, a través del diálogo y la manipulación de objetos. Esta actividad nos servirá para conocer cómo trabajan los alumnos como grupo, qué dinámicas tienen establecidas, qué

recursos tienen aparte del papel y el lápiz, etc., lo que nos ayudará a enfocar de la forma más adecuada las sesiones de trabajo con los problemas.

- **Evaluación continua:** a través de todas las sesiones que vayamos realizando, se realizará la evaluación continua, que permitirá, por un lado ver la evolución de cada alumno, pudiendo tomar las medidas oportunas en cada caso, y por otro lado, proporcionar *feedback* al alumno sobre su propio proceso de aprendizaje. La evaluación continua se realizará básicamente a través de la observación, la supervisión de los trabajos de los alumnos, los diálogos grupales, etc. Al docente le puede ser útil tomar notas de cómo se va desarrollando cada sesión o de aspectos destacables de cada alumno en cada sesión.
- **Evaluación final:** al finalizar cada bloque de actividades se puede realizar una pequeña prueba de resolución de problemas con ejercicios similares a los trabajados, lo que nos dará más información sobre el logro de los objetivos propuestos. En el bloque 9 se realizarán unas olimpiadas de problemas matemáticos que nos puede servir también como prueba final para observar el grado de logro de los objetivos didácticos planteados. Podemos volver a pasar la prueba de evaluación inicial y comparar.
- **Autoevaluación:** consideramos muy importante que el alumno tome consciencia del proceso de aprendizaje que irá realizando, por lo que al finalizar cada bloque de actividades les puede ser útil el rellenar un cuestionario de autoevaluación. Ejemplo en el Anexo II.
- **Evaluación de la acción docente:** un aspecto importante relacionado con la práctica docente y que en el día a día no se suele tener en cuenta es la evaluación de las acciones educativas que se realizan. Creemos que es necesario evaluar cualquier propuesta que se lleve a cabo para comprobar si ha sido útil para la consecución de los objetivos propuestos, si se ha adecuado al grupo al que ha estado dirigida, si su puesta en práctica ha funcionado, etc. con el fin de introducir las modificaciones en base a futuras aplicaciones. Para evaluar esta propuesta, aparte de la observación sistemática del desarrollo de las sesiones, el profesor debería cumplimentar un cuestionario que le ayude a reflexionar sobre las cuestiones anteriormente mencionadas. Ejemplo en el Anexo III.

3.2.6- Actividades:

En el presente apartado vamos a detallar las actividades concretas de resolución de problemas que incluimos dentro de nuestra propuesta de intervención.

Bloque 1. INTRODUCCIÓN A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

✓ **Objetivos:**

- Introducir a los alumnos en el proceso de resolución de problemas.
- Familiarizar a nuestros alumnos con el proceso de resolución de problemas propuesto por Pólya.

- Explorar los conocimientos y estrategias de resolución de problemas que tienen nuestros alumnos (evaluación inicial).
- Explorar las expectativas y creencias de nuestros alumnos hacia los problemas matemáticos.
- Contextualizar la propuesta de intervención.

✓ **Descripción:**

La primera sesión será de tipo más teórico. En ella introduciremos a nuestros alumnos en la definición del término “problema”, en las fases de resolución de un problema matemático y en el conocimiento de los factores que pueden influir en este proceso. Esta sesión también nos servirá para conocer las ideas de nuestros alumnos sobre estas cuestiones, así como sus expectativas y creencias.

En primer lugar iniciaremos un diálogo colectivo a través de la pregunta “¿Qué es un problema matemático?” Moderaremos este debate para repasar cuestiones como: pasos a seguir para su resolución, conocimientos que nos son útiles para resolverlos, tipos de problemas, creencias personales sobre los problemas, etc.

A continuación presentaremos y analizaremos una tabla con las cuatro fases de resolución de problemas propuestas por Pólya (1945) (Ver Anexo IV). Resolveremos algunos problemas conjuntamente mediante este método. Dejaremos esta tabla colgada en un sitio bien visible de la clase para que sirva de guía en las sesiones posteriores.

Finalmente realizaremos el cuestionario de evaluación inicial (Ver Anexo I).

Al final de la sesión recapitularemos sobre lo que habremos hablado y trabajado, y presentaremos la propuesta de intervención propiamente dicha.

Bloque 2. ANÁLISIS DE ENUNCIADOS

✓ **Objetivos:**

- Aprender a distinguir los datos y que nos proporciona el enunciado de un problema para su resolución y la incógnita.
- Aprender a seleccionar los datos que nos son útiles para la resolución de un problema, y a desechar los no necesarios.
- Aprender la importancia que tiene una buena comprensión de enunciado y una buena organización del proceso de resolución de problemas.

✓ **Descripción:**

Dedicaremos 5 sesiones a este bloque. Las actividades comprendidas en este bloque estarán dirigidas a la adquisición de habilidades para la comprensión de los enunciados y para la selección de los datos útiles en el proceso de resolución.

- ✓ **Ejemplos:** (aparecen algunos en el Anexo V)
 - Estas actividades pueden consistir en:
 - Marcar los datos con colores
 - Organizar los datos
 - Problemas donde los enunciados son tablas, gráficos... que se deben interpretar
 - Detectar los datos no necesarios o los datos “trampa”
 - Detectar los datos que nos faltan para resolver la incógnita
 - Problemas de planteamiento inverso
 - Situar una serie de datos numéricos en un enunciado
 - Ordenar un enunciado desordenado
 - Relacionar un enunciado con posibles preguntas (y viceversa)

Bloque 3. PROBLEMAS ARITMÉTICOS

- ✓ **Objetivos:**
 - Aprender a resolver problemas aritméticos de primer nivel usando recursos lúdico-manipulativos de distintos tipos (tarjetas visuales, materiales tangibles, juegos...).
 - Aprender a resolver problemas aritméticos de segundo nivel usando recursos lúdico-manipulativos de distintos tipos (tarjetas visuales, materiales tangibles, juegos...).
- ✓ **Descripción:**

Dedicaremos 8 sesiones a este bloque repartidas entre el primer y el segundo trimestre. En estas sesiones resolveremos problemas variados (ver apartado 2.5) de tipo aritmético de primer y de segundo nivel. La peculiaridad de la actividad está en que los problemas se incluirán dentro de actividades donde los alumnos, para llevar a cabo su resolución, deberán utilizar los siguientes recursos: materiales manipulativos, imágenes o secuencias visuales, juegos varios, realización de esquemas gráficos, dibujos, etc. En segundo ciclo los alumnos suelen trabajar con cantidades numéricas elevadas y puede ser difícil adaptar los materiales a esta circunstancia. Se deben seleccionar muy bien los problemas para que sean adecuados al nivel de los alumnos, y adaptar bien los materiales.
- ✓ **Ejemplos:** (Aparecen algunos en el Anexo VI)
 - ¡Manipulando!: resolver problemas a través de la manipulación física de objetos.
 - Las tarjetas problemáticas: trabajar con unas tarjetas que contienen uno o varios problemas que se deben resolver a través de los materiales proporcionados.
 - “El armario de la muñeca”: resolver problemas de euros planteados en unas tablas o tarjetas sirviéndose de las clásicas muñecas de papel y vestidos recortables (o la versión más moderna con magnéticos).

- Esquemas gráficos: representar gráficamente a través de un esquema las operaciones a realizar para resolver un problema.
- Dibujos: usar dibujos para representar el problema.

Bloque 4. PROBLEMAS DE LÓGICA, INGENIO Y ENIGMAS

✓ **Objetivos:**

- Analizar y comprender enunciados orales, gráficos o escritos que expresen situaciones, reales o ficticias, que requieran un proceso de resolución.
- Aplicar los conocimientos matemáticos ya adquiridos a las situaciones anteriormente mencionadas.
- Desarrollar la curiosidad para la investigación, la experimentación y el aprendizaje por descubrimiento.
- Desarrollar la capacidad de razonamiento lógico-matemático.

✓ **Descripción:**

Dedicaremos 5 sesiones a este bloque. Las actividades comprendidas en este bloque serán planteamientos y problemas que requieran la activación de habilidades lógico-matemáticas para su resolución. Estas actividades no necesitarán de la resolución de algoritmos ni operaciones para su resolución, sino que se deberán aplicar estrategias, investigar, trabajar por ensayo-error... para llegar a la solución. A parte de su vertiente más lúdica, muchas de estas actividades se podrán resolver manipulando piezas, usando tablas, realizando gráficos, observando imágenes, etc.

✓ **Ejemplos:** (Aparecen algunos en el Anexo VII)

En este apartado podríamos realizar multitud de actividades muy variadas. Algunas de ellas serían:

- Sudokus
- Cuadrados mágicos
- Seriaciones
- Problemas de verdad/mentira
- Problemas de seguir pistas
- Juegos de lógica a resolver en tablas
- Juegos con los bloques lógicos
- Enigmas

Bloque 5: PROBLEMAS GEOMÉTRICOS Y DE ORIENTACIÓN ESPACIAL:

✓ **Objetivos:**

- Aprender a resolver situaciones problemáticas relacionadas con las formas planas y otros conceptos geométricos.
- Desarrollar el sentido de la orientación espacial.
- Desarrollar el pensamiento lógico-matemático.
- Desarrollar la curiosidad y el interés por la investigación y la experimentación.

✓ **Descripción:**

Dedicaremos 4 sesiones a este bloque. Las actividades comprendidas en este bloque se caracterizan por plantear situaciones problemáticas sobre formas y figuras geométricas, y sobre conceptos de orientación espacial. Muchas de estas actividades se podrían incluir en el bloque anterior, pero las hemos agrupado aparte por sus características más específicas. En la realización de estas actividades, que suelen ser percibidas como juegos por parte de los alumnos, usaremos materiales reales o simulados con cartulinas, láminas, etc. para lograr una mayor comprensión de las operaciones realizadas.

✓ **Ejemplos:** (Aparecen algunos en el Anexo VIII)

- Buscar cuantas figuras (triángulos, cuadrados...) hay dentro de una figura concreta.
- Convertir una figura en otra moviendo un número determinado de piezas.
- Problemas de posición en el espacio
- Problemas de división de figuras
- Problemas de simetría
- Juego “Hundir la flota”

Bloque 6: PROBLEMAS DE MEDICIÓN (LONGITUD, MASA, CAPACIDAD)
--

✓ **Objetivos:**

- Comprender las unidades de medida de peso, masa y capacidad, y las relaciones entre ellas.
- Saber operar con las unidades de medida de peso, masa y capacidad.
- Aplicar a situaciones problemáticas de la vida cotidiana conceptos relacionados con las medidas de la longitud, la masa y la capacidad.

✓ **Descripción:**

Dedicaremos 3 sesiones a este bloque. Las actividades comprendidas en este bloque están enfocadas a la resolución de situaciones problemáticas relacionadas con la medición de algunas magnitudes (peso, masa, capacidad). Muchas de las actividades, en realidad, son problemas de tipo aritmético, pero que creemos que es mejor tratar de forma específica por la

naturaleza de sus datos. En estas actividades se trabajará sobre todo con información gráfica o con objetos reales que se puedan manipular.

- ✓ **Ejemplos:** (Aparecen algunos ejemplos en el Anexo IX)
 - Problemas de equivalencias entre unidades usando materiales reales (recipientes de distintas capacidades, instrumentos de medición de las distintas magnitudes, uso de básculas y balanzas de distintos tipos, etc.)
 - Problemas con soporte gráfico
 - Juegos de medición de objetos, de partes u objetos de la escuela, de peso y estatura de los alumnos, etc.

Bloque 7. PROBLEMAS PARA RESOLVER CON CALCULADORA

- ✓ **Objetivos:**
 - Aprender a usar la calculadora correctamente como una herramienta útil en la resolución de problemas.
 - Usar la calculadora para resolver problemas de investigación numérica.
- ✓ **Descripción:**

Dedicaremos 2 sesiones a este bloque. Se tratará actividades enfocadas a resolver problemas aritméticos con cantidades numéricas grandes, y también otras situaciones problemáticas y juegos, usando la calculadora.
- ✓ **Ejemplos:** (Aparecen algunos en el Anexo X)
 - Problemas aritméticos con cantidades numéricas grandes
 - Adivinar el producto de números que más se acerca a un número propuesto (con o sin condiciones añadidas)
 - Combinar números y signos para obtener un número concreto
 - Tres en raya con la calculadora
 - Reducir un número a 0 en cinco pasos
 - El valor posicional

Bloque 8. PROBLEMAS DE CREACIÓN PROPIA

- ✓ **Objetivos:**
 - Promover que los alumnos pongan en práctica los conocimientos y estrategias adquiridos con la realización de las actividades de los anteriores bloques.
 - Desarrollar la creatividad y la iniciativa de los alumnos.

✓ **Descripción:**

Se dedicarán 3 sesiones a este bloque. Las actividades comprendidas en este bloque están pensadas para que los alumnos realicen una síntesis de todo lo que han aprendido en los bloques anteriores: etapas en la resolución de problemas, tipos de problemas, conocimientos y estrategias variadas, formulación de enunciados y de incógnitas, etc. En estas actividades serán los alumnos quienes inventen y formulen sus propios problemas, ayudados por algún tipo de recurso material, o partiendo de un planteamiento lúdico.

✓ **Ejemplos:** (Aparecen algunos en el Anexo XI)

- Inventar un problema a partir de un dibujo.
- Inventar un problema a partir de los datos de una tabla.
- Inventar un problema a partir de unas condiciones dadas (de una sola operación, con 3 números que tengan el 7 en las centenas, de multiplicar y restar, que se resuelva con las piezas de un tangram, que esté relacionado con cuadrados, sobre deportes, que de un determinado número como resultado, etc.)
- Inventar problemas colectivamente (uno empieza, el otro lo continúa, etc.)
- Inventar problemas a partir de una frase inicial.

Bloque 9. OLIMPIADAS DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS
✓ **Objetivos:**

- Aplicar los conocimientos adquiridos con la realización de las actividades de los bloques anteriores.
- Practicar los mecanismos de resolución de problemas aprendidos anteriormente.
- Fomentar el gusto para las matemáticas y la resolución de problemas.

✓ **Descripción:**

Dedicaremos 2 sesiones a este bloque. Este es un bloque especial, pues no incluye una serie de posibles actividades a llevar a cabo, sino que directamente planteamos la realización de unas olimpiadas de problemas matemáticos. Mediante esta actividad pretendemos que los alumnos recapitulen sobre todo lo trabajado a lo largo del curso, integren todos sus aprendizajes, y los utilicen en una situación real y de carácter lúdico para resolver una serie de problemas de distinta índole. Se pueden plantear de la siguiente forma: cada niño tiene una hoja de 5 problemas de las características trabajadas en los anteriores bloques; los realizan y se seleccionan los 15 mejores y así vamos haciendo rondas sucesivas hasta llegar a la final. Se pueden hacer variaciones como: que los que van quedando eliminados ayudan a los que siguen concursando, que se participe por parejas, por equipos, etc.

Al finalizar las olimpiadas de problemas matemáticos y para concluir la propuesta de intervención, podemos realizar un diálogo conjunto para repasar todo lo aprendido.

3.2.7- Evaluación de la propuesta de intervención:

Para poder realizar una evaluación crítica y objetiva de la propuesta de intervención que acabamos de presentar, sería necesario poderla aplicar en un grupo real de alumnos. Aun así, creemos importante reflexionar sobre ella y analizar sus puntos fuertes y débiles y su adecuación al marco teórico en el que nos basamos.

Tal y como exponíamos al principio del trabajo, planteábamos nuestra propuesta desde una perspectiva constructivista, entendiendo que el alumno es un sujeto activo en su propio proceso de construcción de aprendizajes, y que el maestro es un guía que le acompaña en este proceso; remarcábamos la importancia de que los aprendizajes se pudieran relacionar con los conocimientos previos de los alumnos, resultando así aprendizajes significativos; apostábamos por una metodología participativa y motivadora, con actividades predominantemente lúdicas y manipulativas; creíamos en que la importancia de los problemas matemáticos estaba en el hecho de enseñar a nuestros alumnos a pensar y de proporcionarles estrategias que aplicarían en situaciones diversas de su vida cotidiana. Analizando nuestra propuesta de intervención y la forma en que aconsejamos que se lleve a la práctica, podemos decir que cumple con todos estos puntos. Creemos también que con su aplicación podemos lograr los objetivos principales y secundarios propuestos al principio de este capítulo 3. Una última ventaja de esta propuesta es que es muy flexible, por lo que las actividades se pueden adaptar a alumnado de diferentes características, incluidos los alumnos con necesidades educativas especiales. Sin embargo, creemos que toda propuesta es mejorable; en este caso, creemos que se debería perfeccionar el apartado de evaluación de los alumnos. Por la naturaleza de las actividades que recoge esta propuesta de intervención, es difícil pensar en un instrumento de evaluación válido para todas ellas. Las actividades son de tipos muy diversos, y recurrir a una prueba de evaluación tradicional para evaluarlas creemos que no es lo más adecuado. Pensamos que la consecución de los objetivos se puede ver más claramente observando si en situaciones cotidianas o en el resto de sesiones de matemáticas donde se trabajen otros contenidos, los chicos son capaces de aplicar conocimientos y procedimientos adquiridos a lo largo de estas sesiones. También en estas situaciones veremos si las expectativas que tienen sobre las matemáticas y la resolución de problemas son positivas, es decir, si hemos logrado que adquieran gusto para las matemáticas. Por otro lado, las actividades que se recogen en esta propuesta de intervención deberían definirse de una forma más concreta. Hemos agrupado las actividades por bloques, proponiendo algunos ejemplos en cada bloque. Sin embargo, las posibilidades dentro de cada bloque son muy diversas y, aunque también es una propuesta que cada docente debe terminar de definir en función de su grupo concreto de alumnos, quizás hubiera sido mejor plantear las actividades de una forma mucho más definida.

Así pues, concluiremos este apartado afirmando que aunque la propuesta de intervención se ajuste al marco teórico propuesto y sirva para conseguir los objetivos planteados, no nos debemos conformar, sino que debemos perfeccionarla en diversos aspectos para conseguir que nuestro trabajo docente sea lo mejor posible.

3.2.8- Limitaciones:

En el apartado anterior ya hemos expuesto posibles aspectos de la propuesta de intervención que se deberían mejorar y que pueden suponer una limitación para su puesta en práctica, pero insistiremos aquí en el tema de la evaluación. En el sistema educativo español actual, aunque el currículum se articula alrededor de las competencias básicas, se nos exige una evaluación final de las distintas áreas mediante una puntuación y unos instrumentos que avalen esta puntuación. Esta propuesta de intervención no está concebida para ser evaluada de esta forma, sino que muestra unos resultados de tipo más global, en términos de competencias matemáticas. Esto puede ser una limitación, aunque desde nuestro punto de vista podemos enfocar la propuesta como una herramienta que nos ayudará con el resto de contenidos del área de matemáticas, no como una actividad numéricamente puntuable.

Una segunda limitación, quizás la más importante, en cuanto a la aplicación de la propuesta, es la predisposición de los docentes para llevarla a cabo. Aunque afortunadamente los maestros cada vez están más dispuestos a aplicar metodologías innovadoras y recursos más variados en pro de una mejor calidad de la educación, todavía existen muchos maestros que son reticentes a cambiar su forma de trabajar. Materializar una propuesta de este tipo significa varias cosas: el docente deberá dedicar mucho más tiempo y esfuerzo a la preparación de las sesiones y a la selección y confección de los materiales; el docente deberá esforzarse más durante las sesiones, en el sentido de que deberá ir dirigiendo la sesión en función de cómo vaya desarrollándose, intentando sacar el máximo provecho e intentando que todos los alumnos vayan siguiendo el hilo; el docente deberá dejar de lado una de sus horas de matemáticas para materializar la propuesta, y si esto no es enfocado como una oportunidad para mejorar, puede ser tomado con recelo, en el sentido que puede impedir terminar el temario marcado para aquél curso. Así pues, es evidente que es más fácil y cómodo coger el libro de texto e ir siguiendo el temario, pero no siempre es lo más útil, y debemos luchar para introducir mejoras de este tipo en las aulas. En relación a esta cuestión también puede suceder que sea el equipo directivo quien no esté de acuerdo con la aplicación de una propuesta de este tipo, lo que también es otra posible limitación.

En relación a los alumnos, al ser ya de segundo ciclo, podemos encontrarnos con una gran variedad de niveles, tanto dentro del mismo grupo, como entre grupos de diferentes escuelas. En segundo ciclo cada niño ya ha ido haciendo su evolución y es más difícil saber cuáles son sus conocimientos previos respecto al tema. Por otro lado, los alumnos están muy influidos por su contexto social, cultural y económico, por lo que puede haber niveles muy dispares en función de la escuela en la que queramos aplicar la propuesta. Esto puede suponer una limitación, pero creemos que con una

correcta evaluación inicial la podemos superar, puesto que las actividades en sí, son fácilmente adaptables.

Finalmente, un último obstáculo con el que nos podemos encontrar son las reticencias de los padres de los alumnos, que pueden caer en el error de que sus hijos juegan en vez de hacer matemáticas. Por ello es de vital importancia que desde la escuela se les explique claramente en qué consiste la propuesta y cuáles son sus finalidades, de manera que puedan ver que los niños aprenderán a través del juego y que no es un mero entretenimiento.

Para finalizar este apartado recordaremos que, aparte de las limitaciones que ya hemos comentado, sería conveniente aplicar la propuesta a un grupo real de alumnos para poder detectar de una forma más concreta las posibles limitaciones que nos podríamos encontrar.

4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES:

En los capítulos anteriores hemos definido las motivaciones y objetivos del presente trabajo, hemos expuesto nuestro marco teórico de referencia, y hemos explicado nuestra propuesta de intervención. En el presente capítulo vamos a recapitular sobre todo ello y a resumir las conclusiones a las que hemos llegado.

El objetivo principal de este trabajo, explicado en el capítulo 1, era el de presentar una propuesta de intervención para trabajar los problemas matemáticos basada en el uso de materiales lúdico-manipulativos en el segundo ciclo de la etapa de Educación Primaria. Asimismo, para alcanzar este objetivo general, nos propusimos otros objetivos más específicos que eran:

1. Repasar los fundamentos del constructivismo y las diferentes teorías de la psicología evolutiva que lo sustentan.
2. Concretar un marco teórico sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas sobre el que basar nuestra propuesta de intervención.
3. Revisar el concepto de problema y el proceso de resolución de problemas matemáticos.
4. Revisar las distintas tipologías de problemas matemáticos.
5. Analizar los recursos y materiales lúdico-manipulativos más adecuados para trabajar los problemas matemáticos en segundo ciclo de primaria.

En el capítulo 2 de este trabajo se ha dado cumplimiento a todos estos objetivos secundarios que han posibilitado el diseño de la propuesta de intervención.

En primer lugar hemos definido la perspectiva constructivista como aquella que concibe el alumno como sujeto activo en su propio proceso de construcción de aprendizajes. En relación a esta perspectiva hemos recordado la necesidad de crearles oportunidades para que puedan investigar, experimentar, descubrir... con el objetivo de favorecer este proceso constructivo, así como la importancia de los conocimientos previos de los alumnos para que los aprendizajes resulten significativos. También hemos revisado los autores y las propuestas más relevantes para nuestro

trabajo: de Piaget hemos destacado la clasificación del desarrollo cognitivo de las personas en cuatro estadios, así como los conceptos de asimilación y acomodación a través de las interacciones con el medio, que son los responsables de este desarrollo. De Vygotski hemos resaltado la importancia que da al medio social y cultural del niño en relación a su proceso de aprendizaje, y también el concepto de Zona de Desarrollo Próximo. De Ausubel hemos puesto el acento en el concepto de aprendizaje significativo y en la importancia que debemos dar a los conocimientos previos de los alumnos. De Bruner nos hemos quedado con el concepto de aprendizaje por descubrimiento. Finalmente, de Montessori hemos extraído una serie de recomendaciones metodológicas como la importancia de proporcionar libertad y oportunidades a los niños para que aprendan, la importancia de las tareas colectivas, la recomendación de avanzar de lo simple a lo abstracto y sobre todo la relevancia que tiene el hecho de poder manipular los materiales para un correcto proceso de aprendizaje.

Centrándonos en la didáctica de las matemáticas, hemos definido en primer lugar qué entendemos por ser matemáticamente competente, y en segundo lugar, repasando una serie de autores, hemos construido una lista de recomendaciones para aplicar en el aula que nos pueden ayudar a ser mejores maestros de matemáticas. Podríamos resumir esta lista en los puntos siguientes:

- Aplicación de los contenidos a situaciones reales o próximas a los niños.
- Uso de metodologías participativas y atractivas, y de actividades variadas.
- Fomento del diálogo colectivo y del trabajo cooperativo.
- Uso pedagógico del error.
- Alumno como protagonista, maestro como guía.
- Y además, en el caso concreto de los problemas matemáticos, enseñar a los alumnos a descodificarlos y a trabajarlos por partes.

A continuación, partiendo de diferentes definiciones, hemos concretado qué entendemos por problema matemático. En relación a este tema, hemos expuesto el método en cuatro pasos de Pólya (1941) para la resolución de problemas, que es en el que nos basamos en la propuesta de intervención, pero teniendo también en cuenta los aspectos personales de los alumnos que según Schoenfeld (1985/1992) pueden interferir en este proceso de resolución.

Siguiendo con los problemas matemáticos, hemos expuesto distintas categorizaciones existentes en base a diferentes criterios. Después de analizarlas, hemos llegado a la conclusión que es difícil clasificarlos porque a menudo pueden incluirse en más de una categoría. Aun así, hemos tenido muy en cuenta la clasificación ofrecida por Echenique (2006) por ser muy completa y distinguir muy bien la naturaleza de cada tipo de problemas.

Y para terminar este capítulo 2, hemos justificado, apoyándonos en varios autores, uso de recursos y materiales de tipo lúdico-manipulativo que caracterizan nuestra propuesta de intervención.

En el capítulo 3 de este trabajo, hemos dado cumplimiento al objetivo principal de este trabajo, presentando de forma detallada una propuesta de intervención para trabajar los problemas

matemáticos con alumnos de segundo ciclo de primaria usando recursos de tipo lúdico-manipulativo. En este capítulo hemos expuesto el objetivo principal y los objetivos secundarios que se persiguen con la aplicación de esta propuesta, básicamente enfocados mejorar las competencias de nuestros alumnos en relación a la resolución de problemas, y las expectativas y creencias hacia las matemáticas en general y la resolución de problemas en general. Para poder analizar la consecución de estos objetivos tendríamos que haber llevado la propuesta a la práctica y tendríamos que haber realizado una evaluación para comprobarlo; así pues, en el presente trabajo todavía es posible discutir esta cuestión. También hemos explicado la temporalización para su aplicación a lo largo de todo un curso, repartiendo los bloques de actividades entre los tres trimestres. Hemos incluido también una serie de condiciones y recomendaciones de tipo metodológico, que están en consonancia con todo lo expuesto en el capítulo 2 y que se deben tener en cuenta al poner en práctica nuestra intervención. A continuación hemos expuesto las actividades que comprende nuestra propuesta. Las hemos clasificado por bloques en función del tipo de actividades y hemos adjuntado varios ejemplos para cada bloque. Finalmente hemos hablado de cómo se debería llevar a cabo la evaluación de los alumnos una vez aplicada la propuesta, es decir, realizando una evaluación inicial para averiguar los conocimientos previos de nuestros alumnos, basándonos en la evaluación continua a lo largo de todo el curso, y pudiendo incluir una prueba de evaluación final, para obtener una información más objetiva de su evolución. En el apartado de evaluación también hemos remarcado la importancia de que los alumnos realicen su propia autoevaluación y también de que se realice una evaluación de la acción docente. En este apartado también hemos incluido una evaluación de la propuesta en sí misma, analizando sus pros y sus contras. Para finalizar el capítulo, hemos incluido un apartado analizando las posibles limitaciones que nos podemos encontrar a la hora de materializar nuestra propuesta de intervención, dado que hasta que no la apliquemos realmente, no podemos conocer exactamente como se desarrollará. Así pues, podemos concluir que después de estos tres capítulos hemos logrado la consecución de los objetivos que nos habíamos propuesto al comienzo de este trabajo, y que hemos sentado las bases para seguir investigando en esta línea de cara a posibles mejoras, aspecto que expondremos en el siguiente capítulo.

5. PROSPECTIVA:

Para finalizar este trabajo creemos interesante analizar algunos aspectos mejorables de este trabajo, así como futuras líneas de investigación en relación a nuestra propuesta de intervención. En primer lugar debemos comentar que el tema tratado es muy extenso y muy estudiado, por lo que es difícil concretar un marco teórico de referencia. De haber contado con más tiempo y espacio para realizar el trabajo, hubiera sido interesante ahondar mucho más en las diferentes teorías y los

diferentes autores que han estudiado los campos del desarrollo cognitivo y de la psicología del aprendizaje. De la misma forma, hubiera sido interesante ahondar en estudios relativos a la resolución de problemas y a la competencia matemática.

Por otro lado, nos gustaría haber tenido la oportunidad de aplicar la propuesta de intervención en un grupo real de alumnos, aunque al ser una propuesta que dura todo un curso escolar ha sido algo imposible. Sin embargo, creemos que la aplicación real de la propuesta de intervención es una de las líneas de prospección a seguir, pues nos permitiría comprobar las limitaciones, comprobar la consecución de los objetivos de la propuesta y sobre todo introducir mejoras.

El tema de las actividades creemos que es otro de los aspectos para seguir trabajando en esta propuesta. Aquí hemos expuesto algunos tipos de actividades de una forma un poco escueta y con pocos ejemplos, dejando muy abiertas las posibilidades de realización. Pensamos que sería importante concretarlas y organizarlas mucho más, aunque después quede a criterio de cada profesor adaptarlas a sus circunstancias particulares.

Finalmente, otra futura línea de investigación sería la realización de otras propuestas de intervención similares a esta pero dirigidas al primer y al tercer ciclo de educación primaria, pues debemos tener en cuenta que esta sólo se centra en el segundo ciclo. De la misma forma, se podrían crear otras propuestas de intervención dirigidas a trabajar otros aspectos de las matemáticas pero también basadas en una metodología parecida a la explicada en el presente trabajo.

Pensamos que el tema de la didáctica de las matemáticas es muy interesante y engloba un campo de posibilidades muy amplio. Sería interesante investigar y profundizar para ir introduciendo nuevas propuestas metodológicas que mejoren la calidad educativa de nuestras escuelas, que conviertan a nuestros alumnos en personas matemáticamente competentes, y sobre todo, que transmitan a nuestros alumnos el gusto para las matemáticas.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrantes, P., Barba, C., Batlle, I., Bofarull, M.T., Colomer, T., Fuertes et al. (2002). *La resolución de problemas en matemáticas*. Barcelona: Graó.
- Alsina, A. (2004). *Desarrollo de Competencias Matemáticas con Recursos Lúdico-Manipulativos: Para Niños y Niñas de 6 a 12 Años*. Madrid: Narcea.
- Armendáriz, M.V., Deulofeu, J. , Azcárate, C. (1993). Didáctica de las matemáticas y Psicología. *Infancia y Aprendizaje: Journal for the Study of Education and Development*, 62-63, 77-100. Recuperado de <http://bv.unir.net:2116/servlet/articulo?codigo=48429>
- Ausubel, D. P. (1963). *The psychology of meaningful learning verbal*. New York: Grune & Stratton.
- Ausubel, D. P., Novak, J. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
- Bermejo, V. (2004). *Como enseñar matemáticas para aprender mejor*. Madrid: CCS.
- Bosch, X. (2006, 4 de septiembre). L'escola, a punt. *El Punt-Avui*, p.56. Recuperado de <http://paper.avui.cat/article/ultima/83677/lescola/punt.html>
- Bruner, J.S. (1972). *Hacia una teoría de la instrucción*. México: UTEHA.
- Calvo, M. M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Educación. Revista de la Universidad de Costa Rica*, 32(1), 123-138. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44032109>
- Canals, M.A. (2010). *Problemes i més problemes*. Barcelona: Rosa Sensat.
- Coll, C. (2007). Las competencias en la educación escolar: algo más que una moda y mucho menos que un remedio. *Aula de innovación educativa*, 161, 34-39.
- Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M, Onrubia, J., Solé, I. et al. (2006). *El constructivismo en el aula*. Barcelona: Graó.
- Díaz, M. V., Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *NÚMEROS-Revista de didáctica de las matemáticas*, 45, 33-41. Recuperado de <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/45/Articulo03.pdf>
- Echenique, I. (2006). *Matemáticas. Resolución de problemas*. Recuperado de <http://ebookbrowse.com/matematicas-resolucion-de-problemas-echenique-pdf-d142615878>
- Gavilán, P. (2001). *Aprendizaje Cooperativo en Matemáticas en el Nivel de Educación Secundaria Obligatoria. Proceso Global de Aprendizaje*. (Tesis doctoral). UNED, Madrid
- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de *Educación*. Boletín Oficial del Estado, 106, de 4 de mayo de 2006.
- Méndez, Z. (2008). *Aprendizaje y cognición*. Recuperado de <http://books.google.es/books?id=KzvsjxKNPQsC&pg=PR3&dq=ausubel+y+aprendizaje+si>

[gnificativo&hl=ca&source=gbs_selected_pages&cad=3#v=onepage&q=ausubel%20y%20a
prendizaje%20significativo&f=false](#)

- Montessori, M. (1937). *El método de la pedagogía científica aplicado a la educación de la infancia en "la case dei bambini" (casa de los niños)*. Barcelona: Araluce.
- Muñoz, L.; Lasalle, P. (2002). Problemas matemáticos en el aula. Más y más problemas. *SIGMA: Revista de matemáticas*, 21, p. 6-36. Recuperado de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/e_s_sigma/adjuntos/sigma_21/2_problemas_matematicos.pdf
- Nieto, J.H. (2005). Resolución de problemas, matemáticas y computación. *Revista venezolana de información, tecnología y conocimiento*, 2, 27-45. Recuperado de <http://bv.unir.net:2116/servlet/articulo?codigo=1985688>
- OCDE (2009). *El programa PISA de la OCDE. Qué es y para qué sirve*. Recuperado el 13 de junio de 2013 de <http://www.oecd.org/pisa/publicacionesdepisaenespaol.htm>
- Planas, N.; Alsina, A. (cords.) (2009). *Educación matemática y buenas prácticas. Infantil, Primaria, Secundaria y educación superior*. Barcelona: Graó.
- Piaget, J. (1967). *Seis estudios de psicología*. Barcelona: Seix Barral.
- Piaget, J. (1969). *El nacimiento de la inteligencia en el niño*. Madrid: Aguilar.
- Piaget, J. (1972). *L'épistémologie génétique*. Paris: P.U.F.
- Piaget, J. (1989). *La psicología de la inteligencia*. Barcelona: Crítica.
- Ramírez, A.; Lorenzo, E. (2012). Desarrollo de la competencia matemática en educación primaria a través de la resolución de tareas. *EDMETIC, Revista de Educación Mediática y TIC*, 2(1), 48-65. Recuperado de http://www.edmetic.es/Documentos/Vol1Num2-2012/Numero_Completo.pdf
- RD1513/2006, de 7 de diciembre, *por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. Boletín Oficial del Estado, 293, de 8 de diciembre de 2006.
- Segarra, Ll. (1987). *Encercla el cercle. Matemàtica recreativa*. Barcelona: Graó.
- Teoría del Constructivismo Social (2005). *Teoría del constructivismo social de Lev Vygotsky en comparación con la teoría Jean Piaget*. Recuperado el 31 de mayo de 2013 de <http://constructivismos.blogspot.com.es/>
- Vygotski, L.S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica.
- Vygotski, L.S. (1988). *Pensament i llengatge*. Vic: Eumo.

7. BIBLIOGRAFÍA

- Blanco, B. y Blanco, L.J. (2009). Contextos y estrategias en la resolución de problemas de primaria. *NÚMEROS-Revista de didáctica de las matemáticas*, 71, 75-78. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Articulos_03.pdf
- Educar.org. (2008). *Pedagogía de María Montessori*. Recuperado el 1 de junio de 2013 de <http://portal.educar.org/foros/pedagogia-de-maria-montessori>
- Educar.org. (sin fecha) (Vygotsky). Recuperado el 31 de mayo de 2013 de <http://www.educar.org/articulos/vygotsky.asp>
- J.C. (2009). *Apuntes de psicología*. Recuperado el 1 de junio de 2013 de <http://apuntesenpsicologia.blogspot.com.es/2009/08/aprendizaje-por-descubrimiento-de.html>
- López, R. (2010). Para una conceptualización del constructivismo. *Revista Mad*, 23, 25-30. Recuperado de http://www.facso.uchile.cl/publicaciones/mad/23/lopez_03.pdf
- Perinat, A. (1998) *Psicología del desarrollo. Un enfoque sistémico*. Barcelona: EDIUOC
- Pólya, G. (1992). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas
- Rojas, J.V. (2011). *Teorías y Paradigmas Educativos*. Recuperado el 1 de junio de <http://paradigmaseducativosuft.blogspot.com.es/2011/05/teoria-del-aprendizaje-significativo-de.html>
- Salas, A. *Apuntes de didáctica de las matemáticas*. (2013). Material no publicado.
- Salas, A. *Apuntes de psicología*. (1998-2002). Material no publicado.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Wikipedia (Jean Piaget). Recuperado el 27 de mayo de 2013 de http://es.wikipedia.org/wiki/Jean_Piaget#Los_per.C3.ADodos_de_desarrollo_cognitivo.
- Wikipedia (Constructivismo). Recuperado el 27 de mayo de 2013 de [http://es.wikipedia.org/wiki/Constructivismo_\(pedagog%C3%ADa\)](http://es.wikipedia.org/wiki/Constructivismo_(pedagog%C3%ADa))

8. ANEXOS

ANEXO I- PRUEBA DE EVALUACIÓN INICIAL

EVALUACIÓN INICIAL

1. Resuelve los siguientes problemas. Si lo necesitas, puedes realizar dibujos o esquemas para comprender mejor el problema:

» Natalia ha querido celebrar su cumpleaños en el parque de atracciones. La entrada al parque cuesta 7 euros. Ha invitado a 12 amigas. ¿Cuánto ha pagado Natalia? ¿Si ha pagado con un billete de 100 euros, cuánto le han devuelto de cambio?

» Miguel está haciendo la colección de cromos de Ben Ten, que en total consta de 250 cromos. Miguel tiene 149 cromos, 23 más que su amigo Andrés. ¿Cuántos cromos le faltan a Andrés para terminar la colección?

2. En el siguiente problema debes marcar en color rojo los datos que nos da el enunciado y en color verde la pregunta. A continuación debes resolverlo. ¿Has usado todos los datos?

» Hemos comprado 5 cajas de 12 helados para la fiesta de fin de curso. Entre las dos clases de tercero somos 47 alumnos. De todos ellos, 26 tienen los ojos marrones. Si cada niño come un helado ¿Cuántos helados sobrarán?

3. Formula una pregunta para estos dos enunciados:

» Laura tiene ahorrados 24 € y su hermana Sonia 15 € más que ella.

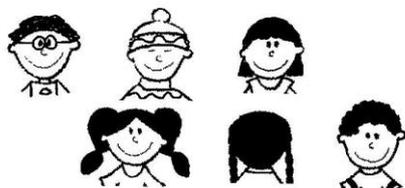
.....

» En el campeonato escolar de futbol el equipo rojo ha ganado 46 puntos, el equipo verde 38 puntos y el equipo azul 52 puntos.....

4. Rellena los huecos este cuadrado mágico sabiendo que la suma de las filas, de las columnas y de las diagonales siempre nos dará 15:

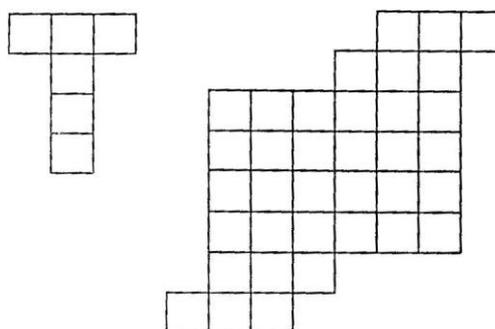
6		2
1		
		4

5. ¿Quién es quién?

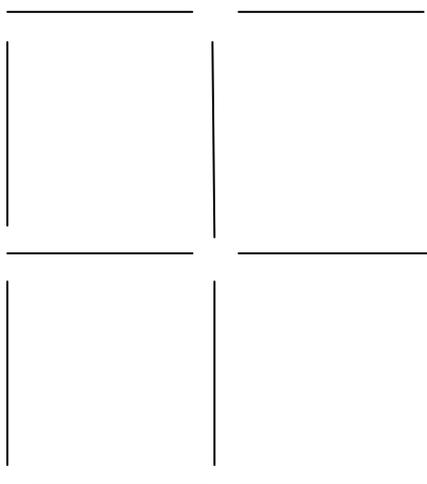


Pedro está al lado de Rosa.
 María está al lado de Carmen.
 Luís está al lado de Pedro.
 Jorge está al lado de Carmen.
 ¿Cómo se llama la chica que está de espaldas?

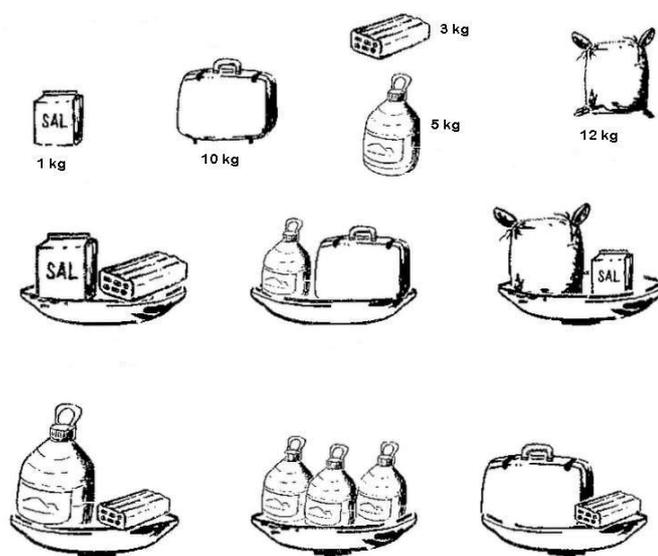
6. ¿Cuántas "T" como esta hay en el dibujo?



7. Quita dos palillos de manera que solo te queden dos cuadrados:



8. ¿Cuánto pesa?



ANEXO II- CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACIÓN

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACIÓN

Bloque de problemas número.....

- » ¿Qué actividad te ha gustado más? ¿Por qué?

- » ¿Qué actividad te ha gustado menos? ¿Por qué?

- » ¿Qué cosas has aprendido en este bloque de problemas?

- » ¿Para qué te puede servir lo que has aprendido?

- » ¿Te ha quedado alguna duda?

- » ¿Te gustaría cambiar alguna cosa?

**ANEXO III-CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN DE LA ACCIÓN
DOCENTE**

CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN DE LA ACCIÓN DOCENTE

Objetivos de la acción docente	Grado de consecución (0-5)

» **Valoración de las actividades realizadas:**

Bloque	Comentarios
Bloque 1	
Bloque 2	
Bloque 3	
Bloque 4	
Bloque 5	
Bloque 6	
Bloque 7	
Bloque 8	
Bloque 9	

» **¿La acción docente se ha adecuado a las características del alumnado? En caso negativo explica los motivos.**

- » **¿Qué cambios realizarías para una próxima aplicación de esta propuesta de trabajo?**

- » **¿Cómo te has sentido realizando esta acción docente?**

- » **¿Crees que tu rol como maestro ha sido el adecuado?**

- » **¿Crees que has conectado con los alumnos?**

- » **¿Cómo podrías mejorar tus acciones como maestro en relación a esta propuesta de trabajo?**

- » **Comentarios finales:**

ANEXO IV-FASES DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SEGÚN PÓLYA:**1- COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA:**

¿Entendemos lo que nos dicen? ¿Podemos decirlo con otras palabras? ¿Qué datos tenemos? ¿Qué nos preguntan? ¿Tenemos suficientes datos? ¿Hay datos extraños o que no necesitamos? ¿Se parece a algún problema que ya hayas resuelto antes?

2- CONFIGURACIÓN DE UN PLAN:

¿Qué estrategias podemos usar?

- Ensayo-error
- Hacer una lista
- Hacer un esquema
- Hacer una figura
- Razonar
- Resolver un problema parecido pero más fácil
- Usar las propiedades de los números
- Empezar por el final
- Usar una fórmula
- Otras estrategias

3- EJECUCIÓN DEL PLAN:

- » Vamos a poner en práctica nuestro plan hasta llegar a la solución.
- » No quieras ir demasiado deprisa... Tómate el tiempo necesario.
- » ¿El plan no funciona? ¡Diseña otro plan!

4- VISIÓN RETROSPECTIVA:

¿Has encontrado la solución correcta? ¿La solución responde a lo que te preguntaban en el problema? ¿Puedes usar tu solución en un caso general?

ANEXO V-ACTIVIDADES BLOQUE 2

➤ Marcar los datos con colores:

En la clase de tercero somos 24 alumnos. La maestra nos ha dicho que formemos grupos de 4. ¿Cuántos grupos saldrán?

➤ Problemas con enunciados no escritos:

PROBLEMA DE TRENES

R2 SEGOVIA - MADRID									
SEGOVIA	5,55	6,55	8,55	10,55	12,55	14,55	16,50	18,55	20,55
NAVAS DE RIOFRIO	-	7,04	9,03	11,03	13,03	15,04	-	19,04	21,02
ORTIGOSA DEL M.	6,06	-	9,07	-	13,07	-	-	19,07	21,05
OTERO DE H.	-	7,12	9,13	11,13	13,13	15,11	-	19,11	21,10
LOS ANGELES S.R.	-	7,15	-	-	-	15,14	17,10	-	21,13
EL ESPINAR	6,21	7,21	9,20	11,20	13,20	15,18	17,14	19,18	21,18
SAN RAFAEL	6,24	7,24	9,23	11,23	13,23	15,21	17,17	19,21	21,21
TABLADA	-	-	9,30	-	-	-	17,24	-	-
CERCEDILLA	6,37	7,37	9,35	11,35	13,35	15,33	17,35	19,33	21,35
VILLALBA DE G.	7,00	8,00	9,58	11,58	13,58	15,58	17,58	20,00	21,58
MADRID - CH	7,39	8,39	10,37	12,37	14,37	16,37	18,37	20,37	22,36
MADRID - N.M.	7,44	8,44	10,42	12,42	14,42	16,42	18,42	20,42	22,41
MADRID - R.	7,48	8,48	10,46	12,46	14,46	16,46	18,46	20,46	22,45
MADRID - AT.	7,52	8,52	10,50	12,50	14,50	16,50	18,50	20,50	22,49

- Vivo en Segovia. ¿Qué tren debería coger para llegar a San Rafael antes de las 12 del mediodía si me levanto a las 9 de la mañana?
- Mi amiga vive en Navas de Riofrío y me quiere acompañar. ¿A qué hora deberá coger el tren para que podamos ir juntas?
- El fin de semana quiero ir a pasar el día a Madrid. Mi hermana vive allí y me vendrá a esperar a la estación de Atocha. ¿A qué hora debe venir mi hermana si cojo el tren de las 8:55?

➤ **Buscar los datos necesarios para resolver el problema:**

¿QUÉ DATOS DEBERÍAS SABER PARA PODER RESOLVER EL PROBLEMA?

1. Tengo 11 años. ¿Cuántos años tenía mi madre cuando yo nací?.....
2. Ocho paquetes de cromos me han costado 4 euros. ¿Cuánto vale un cromo?.....
3. Tengo que repartir 325 manzanas en unas cajas de madera. ¿Cuántas manzanas pondré en cada caja?.....

➤ **Problemas de planteamiento inverso:**

- ❖ **A la primera columna debes poner las cantidades que faltan, a la segunda debes en cuántos grupos hemos repartido y en la tercera las cantidades finales. Fíjate en el ejemplo.**

Antes	Partes que hemos hecho	Después
24 caramelos	Repartidos entre 4 niños	6 caramelos
30 canicas	?	15 canicas
60 cromos	Repartidos entre 5 niños	?
?	Repartidos entre 7 niños	16 euros

➤ **Relacionar enunciados y preguntas:**

ENUNCIADOS Y PREGUNTAS

Tenemos tres problemas, pero se nos han mezclado los tres enunciados con varias preguntas de algunos problemas. ¿Nos ayudas a emparejar cada enunciado con su pregunta? Después resuelve los tres problemas.

PROBLEMAS:

En un hotel trabajan: la propietaria, 8 camareras de habitaciones, 1 jefe de comedor, 6 camareros y 4 cocineros.

Me he comprado una libreta por 3 euros, dos bolígrafos por 1 euro cada uno y un cuento por 7 euros.

Tenía 20 euros en la hucha y me he gastado 6 en cromos y 5 en chucherías.

PREGUNTAS:

- ¿Cuántos animales hay?
- ¿Cuántos euros me quedan?
- ¿Cuántos años tengo ahora?
- ¿Hay más hombres o mujeres? ¿Cuántos más?
- ¿Cuánto me ha costado todo?
- ¿Qué me han devuelto de cambio?

ANEXO VI-ACTIVIDADES BLOQUE 3

➤ ¡Manipulando!:



- "Tengo 12 caramelos y debo repartirlos por igual en estas 3 cajas. ¿Cuántos caramelos irán a cada caja?"
- "Tengo 2 caramelos en cada caja. ¿Cuántos caramelos tengo en total?"
- "En mi caja hay 6 caramelos y en la de Pablo 8. ¿Cuántos caramelos tenemos entre los dos?"
- "Tenía 5 caramelos y Ana me ha dado 4 más. Me he comido 3. ¿Cuántos caramelos me quedan?"

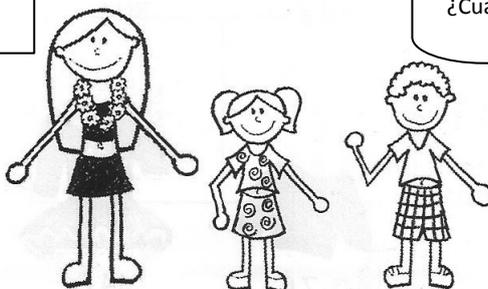
Extraído de Canals (2010)

➤ Las tarjetas problemáticas:

RESUELVE EL PROBLEMA CON EL MATERIAL QUE TE HAGA FALTA:

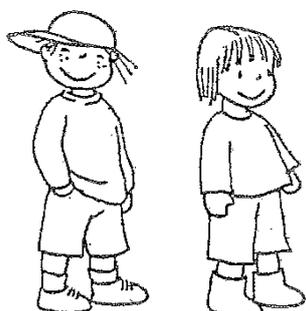
La niña mayor tiene 7 lápices y da 2 a la pequeña, que no tenía ninguno. El niño tiene 2. ¿Quién tiene más lápices, la mayor o la pequeña?

Se reparten 8 lápices entre los 3. A la mayor le tocan 3 y a la pequeña 2. ¿Cuántos lápices le tocan al niño?



Material necesario: una caja de 12 lápices.

RESUELVE EL PROBLEMA CON EL MATERIAL QUE TE HAGA FALTA:



La niña tiene 15 cromos y el niño tiene el doble.
¿Cuántos tendrá que ganar ella para llegar a tener tantos como él?

Material necesario: un paquete de 20 cromos.

➤ **El armario de la muñeca:**



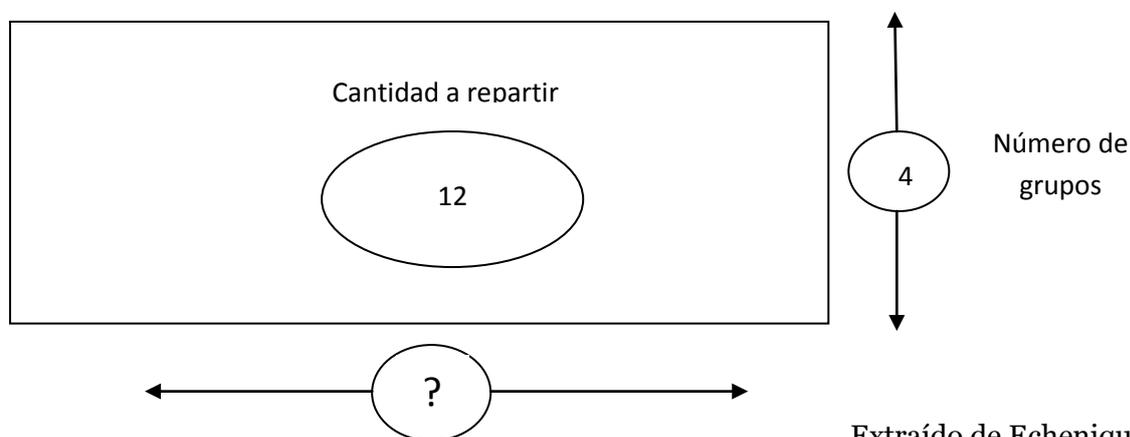
PREPARA LA ROPA QUE PODRÁ COMPRARSE LA MUÑECA EN CADA OCASIÓN SABIENDO EL DINERO QUE TIENE:

Vestido y sombrero para ir a una fiesta	45 €	
Ropa para el verano	52 €	
Pantalones y camisas	63 €	
Lo que más te gustaría ponerte tú.	49 €	

Adaptado de Canals (2010)

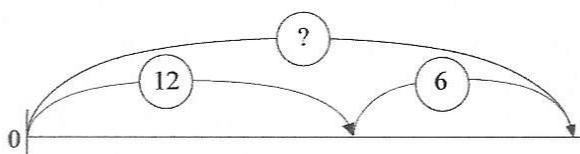
➤ **Representación del problema mediante esquemas gráficos:**

- Tengo 12 canicas para repartir entre mis 4 amigos. ¿Cuántas canicas recibirá cada amigo?



Extraído de Echenique (2006)

- En una obra de teatro participan 12 niñas y 6 niños. ¿Cuántos alumnos participan en total?



Extraído de Echenique (2006)

ANEXO VII- ACTIVIDADES BLOQUE 4

➤ Sudokus:

9	8	3			1			7
	6	5	4			3	8	
4				3		1		
				2	7	6	9	
			8		3			
	5	4	1	9				
		6		8				2
	1	7			9	4	3	
2			3			5	7	6

➤ Problemas de seguir pistas:

¿QUIÉN ES QUIÉN?

1. Luis, David y Jaime llevan un pañuelo en el cuello.

2. Tres llevan gorra: Jaime, David y Nuria.

3. Luis, Laura y Nuria montan en bici.

4. ¿Quién debe ser Blanca?

5. Inma, Eloy y Nuria llevan camiseta de manga corta.

6. Llevan botas Jaime, Nuria, Inma y Eloy.

7. Visten pantalón corto Inma, Jaime y Eloy.

8. Más pistas no te podemos dar... ¡Empieza a contestar!

Adaptado de Canals (2010)

➤ Enigmas:

EL PASTOR

Un pastor tiene que pasar un lobo, una cabra y una lechuga a la otra orilla de un río. Dispone de una barca en la que solo caben él y una de las otras tres cosas. Si el lobo se queda solo con

la cabra, se la come; si la cabra se queda sola con la lechuga, se la come. ¿Cómo debe hacerlo?

* **Solución**

El pastor pasa primero la cabra, la deja en la otra orilla y regresa a por el lobo, al cruzar deja al lobo y vuelve con la cabra, deja la cabra y cruza con la lechuga, deja la lechuga con el lobo y regresa a por la cabra.

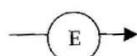
➤ **Juegos con bloques lógicos:**

BLOQUES LÓGICOS: LOS ENTRETENIMIENTOS

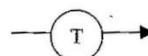
Construimos unas fichas a modo de bloques lógicos con estas categorías:

ENTRETENIMIENTO	TEMA	EDAD
Libro 	Aventuras 	6-8 años 6-8
Cómic 	Misterio 	9-10 años 9-10
DVD 	Terror 	11-12 años 11-12
Vídeo 	Risa 	

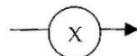
Nos hemos inventado estas "máquinas" para operar:



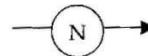
Cambia el entretenimiento



Cambia el tema



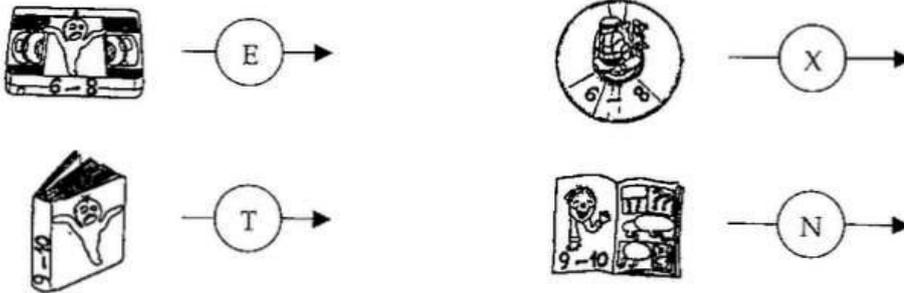
Cambia la edad



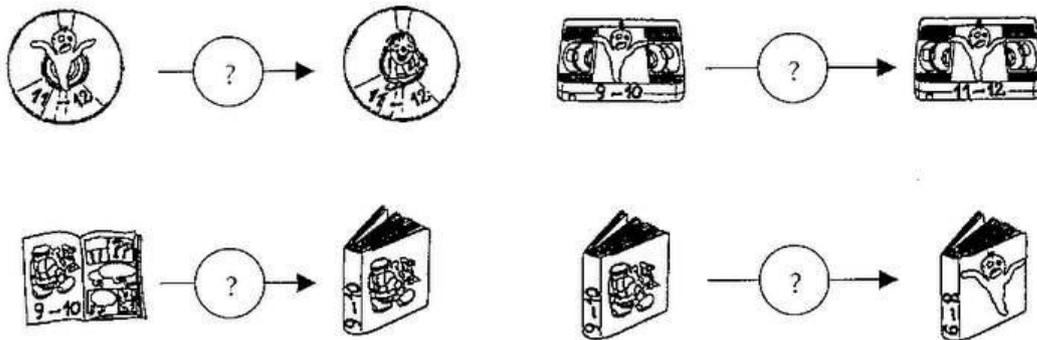
No cambia nada

ACTIVIDADES:

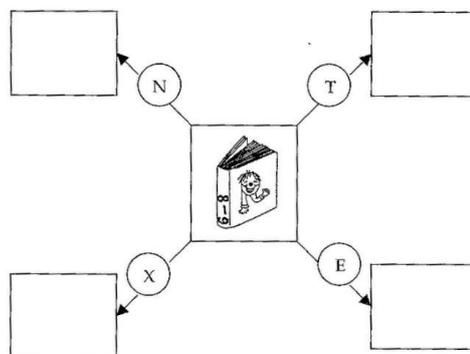
1. Realiza el cambio que te indicamos y compáralo con tus compañeros. ¿Tenéis todos la misma solución? ¿Por qué?



2. Escribe la máquina que corresponde para que los cambios sean correctos:



3. Indica los entretenimientos que faltan en esta estrella.

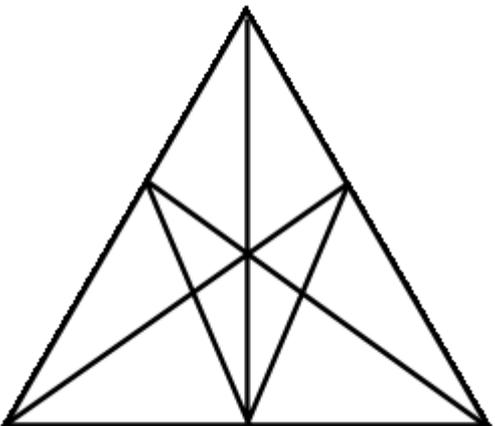


Extraído de Alsina (2004)

ANEXO VIII-ACTIVIDADES BLOQUE 5

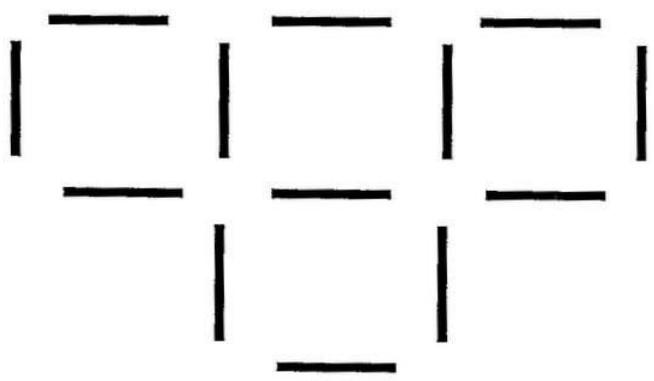
- **Buscar cuántas figuras hay dentro de una figura:**

¿CUÁNTOS TRIÁNGULOS HAY?

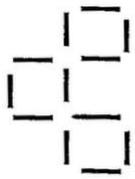


- **Convertir una figura en otra moviendo determinadas piezas:**

¿Puedes conseguir 3 cuadrados sacando un solo palillo?

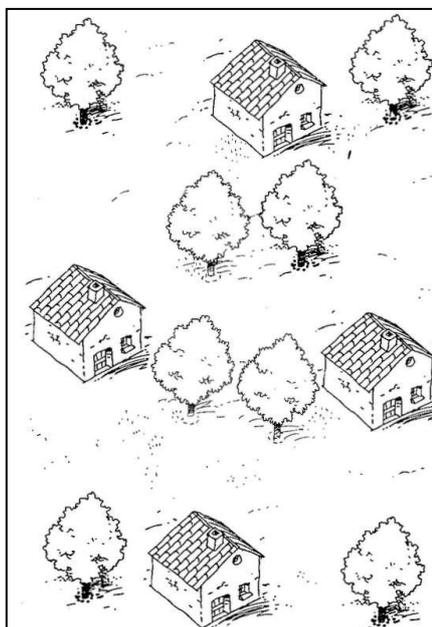


* Solución:



Extraído de Segarra (1987)

➤ **Problemas de partición del espacio:**



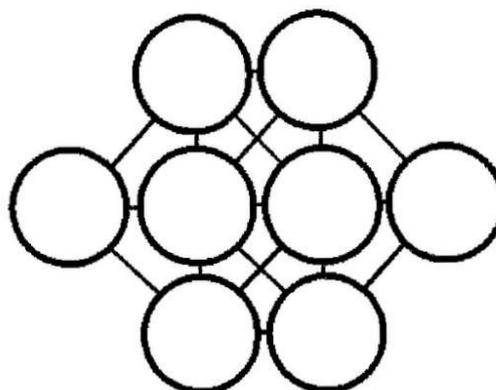
Un hombre tenía una parcela con cuatro casas y ocho árboles. Un día decidió repartir la parcela entre sus cuatro hijos de manera que a cada hijo le tocaran dos árboles y una casa. ¿Cómo partió la parcela?

Extraído de Segarra (1987)

➤ **Problemas de posición en el espacio:**

Necesitas:

- 2 fichas rojas
- 2 fichas amarillas
- 2 fichas verdes
- 2 fichas azules



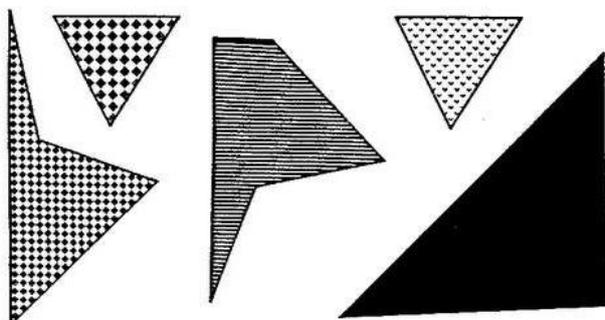
Instrucciones:

Pon todas las fichas encima de la figura. No puede haber dos fichas del mismo color unidas por una línea.

Extraído de Canals (2010)

➤ **Rompecabezas:**

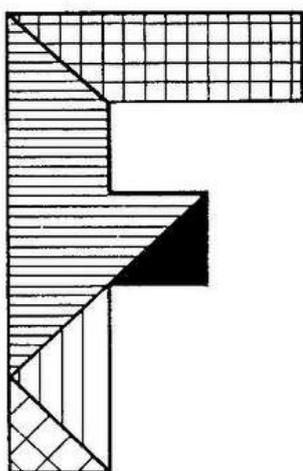
❖ ¿Puedes construir una estrella con estas cinco piezas?



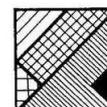
* Solución:



❖ ¿Puedes convertir esta F en un cuadrado?



* Solución:



Extraído de Segarra (1987)

ANEXO IX- ACTIVIDADES BLOQUE 6

➤ Mediciones con herramientas reales:

¿MEDIMOS LA ESCUELA?

Necesitamos:



- ¿Cuánto mide una mesa de la clase de ancho? ¿Y todas las mesas de la clase?
- Busca un objeto del patio que mida 2,5 metros.
- ¿Qué altura tendrían dos estanterías de la biblioteca si las pusiéramos una encima de la otra?
- ¿Qué es más alta, una mesa de P3 o una silla de tercero? ¿Cuánto más alta es?
- Si me subo encima de un taburete del laboratorio, ¿qué altura alcanzaré?

➤ Problemas con soporte gráfico:

¿CUÁNTOS QUILOS PESAN?

The diagram illustrates four rows of items with their weights and corresponding empty boxes for calculation:

- Row 1: 1kg bag, Medio quilo bag, 1kg box, Medio quilo box, 1 kg beans, Medio quilo beans, 1 kg peas, Medio quilo peas.
- Row 2: 2 bags, 2 small bags, 2 beans, 2 boxes.
- Row 3: 2 boxes, 1/2kg box.
- Row 4: 2 beans, 1/2kg beans, 1kg box, 1kg peas, 1kg peas, 1kg peas.
- Row 5: 1kg peas, 1/2kg peas, 1kg peas, 1kg peas, 1kg peas, 1kg peas.

Adaptado de Canals (2010)

ANEXO X-ACTIVIDADES BLOQUE 7**➤ Adivinar el producto que más se acerca:****JUEGO CON LA CALCULADORA: EL MEJOR PRODUCTO**

2 6 5 2 4 1 1 7 6 1 7 7 3 3 3 9 2 2 8 2 2 9 6 0

❖ Pensemos el producto de dos factores que más se acerque a cada uno de estos números.

Condiciones:

- Los factores deben ser menores de 20.
- El 1 no vale.

➤ Combinar operaciones:**¡COMBINEMOS OPERACIONES!**

Con los números:

1 4 2 3 7

Y los signos:

+ × -

❖ **Consigue los números siguientes:**

21→

40→

16→

23→

27→

18→

ANEXO XI- ACTIVIDADES BLOQUE 8

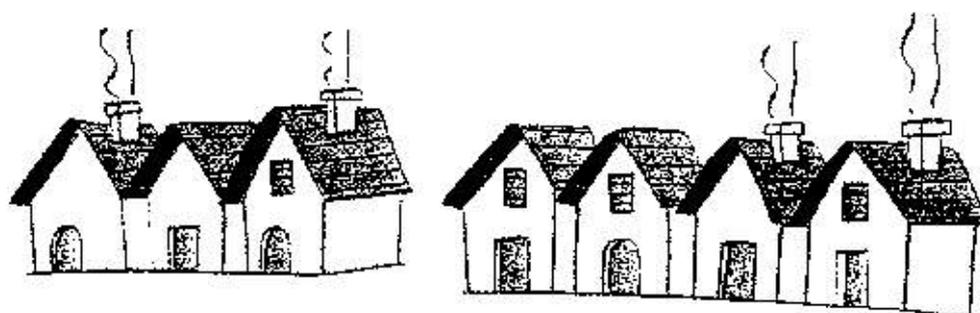
Inventar problemas con una condición:

¡A INVENTAR PROBLEMAS!

Inventa un problema que cumpla en cada caso con la condición requerida:

- Un problema de dos operaciones:
- Un problemas dónde tengas que dividir:
- Un problema sobre un partido de futbol:
- Un problema donde se hable de litros:
- Un problema que tenga como resultado el número 45:
- Un problema como tú quieras:

➤ **Inventar problemas a partir de un dibujo:**



❖ Inventar un problema a partir de este dibujo:

➤ **Inventar problemas a partir de una frase:**

¿Me ayudas? He empezado a escribir unos problemas y no sé cómo terminarlos... ¿Los escribes tú?

• ¿Cuántos cromos me quedan para pegar en una página de 20 cromos si.....

.....

• En mi jardín hay un árbol que mide 3m.

.....

.....

- Olga tenía 28 pulseras.

.....

.....

- Carlos está ahorrando 4 € cada semana

.....

.....