DELEGACIÓN PROVINCIAL DE EDUCACIÓN.

SERVICIOS DE INSPECCIÓN Y DE ORDENACIÓN EDUCATIVA.

DOCUMENTO MODULAR ARTICULADO DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA.

TERCER CICLO.

POR JAIME MARTÍNEZ MONTERO.
Inspector de Educación.

CÁDIZ, NOVIEMBRE DE 2009

DOCUMENTO MODULAR ARTICULADO DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA.

0. JUSTIFICACIÓN.

Con la presente entrega culminamos un trabajo que comenzó hace dos cursos y que se ha ido desarrollando al tiempo que entraban en vigor los nuevos currícula de cada uno de los ciclos de Educación Primaria. Tras la experiencia acumulada, creemos que los Documentos Modulares han sido una ayuda para el trabajo diario de los centros y por ello hemos puesto en marcha este nuevo trabajo, que en su espíritu continúa lo establecido en los dos anteriores, y que se complementa con algunas nuevas aportaciones.

El Área de Matemáticas aparece siempre como la que acapara mayor número de suspensos. Los datos que se reflejan en las actas y en exámenes externos, como sea la Selectividad, han venido a ser corroborados en los procedimientos de evaluación ajena a los centros que se han puesto en marcha, como son las Pruebas de Diagnóstico o el test PISA. En tal sentido, la enseñanza de las matemáticas se convierte a menudo en una fuente de frustración para los maestros. Suele requerir muchos esfuerzos y mucho tiempo para los resultados que a veces se obtienen. No se ocultan las dificultades que, en sí, presenta la materia. Es, sin duda, la más abstracta de las que componen el currículum; emplea un lenguaje específico, con su propia simbología, códigos y signos; requiere gran cantidad de memoria, tanto de trabajo como a largo plazo, dado su carácter acumulativo; por último es muy concreta y admite pocos rodeos.

Nos engañaríamos si se pensara que no se hacen esfuerzos de renovación en los centros: la búsqueda de nuevos materiales, centrar la atención y el trabajo en el descubrimiento y tratamiento de los aspectos más dificultosos, las consultas a internet, la asistencia a cursos y a seminarios, etc., son algunas manifestaciones de estos esfuerzos renovadores. La puesta en marcha de las Pruebas de Diagnóstico han intensificado todas estas actuaciones. La entrada en vigor del nuevo currículo para el Tercer Ciclo puede ser una ocasión para replantearnos, con renovadas esperanzas, la necesaria innovación del proceso. Los nuevos incentivos puestos en marcha para la mejora de los resultados escolares pueden proporcionar los estímulos necesarios para abordar la tarea de la mejora de los resultados en matemáticas con nuevos bríos.

La propuesta que se hace se enmarca dentro de este contexto. Se trata de ofrecer a los centros un documento que promueva la renovación, que aporte enfoques nuevos a los maestros y maestras que no están satisfechos con lo que hacen, pero que tampoco saben con seguridad cómo lo podrían hacer mejor.

Si no es aventurado decir que todos los centros se esfuerzan por hacer las cosas de otra manera y por mejorar los rendimientos de sus alumnos en matemáticas, sí lo es pensar en que tales acciones tienen altos grados de homogeneidad o se ocupan de asuntos similares o, si lo hacen, lo llevan a cabo desde enfoques muy distintos. Tres aspectos que ejemplifican lo que se ha dicho y en los que los diversos colegios suelen presentar agudas diferencias: el apoyo, los procedimientos de evaluación y los niveles que se exigen para la promoción.

1. APOYO: No suele haber una definición previa sobre qué contenidos, y en qué profundidad, deben ser recuperados por los alumnos. En la mayoría de los casos es el tutor el que manda al chico o a la chica al apoyo, de acuerdo con su propio criterio. Este criterio puede variar de un profesor a otro, no sólo en función de la propia concepción matemática, sino también de acuerdo con la propia experiencia profesional y con el grado de compromiso y sentido de la continuidad que tenga el maestro.
2. EVALUACIÓN: Es casi obvio señalar las enormes diferencias que se presentan y los modos muy distintos de entender esta parte fundamental del proceso de enseñanza-aprendizaje. La falta de definición de la dificultad de los contenidos y una mínima clasificación en función de los mismos permite contemplar procedimientos que desembocan en juicios sobre alumnos que serían diferentes, respondiendo a las mismas destrezas adquiridas, no ya en ocasiones si hubiera cursado las enseñanzas en otro colegio, sino si hubiera tenido otro profesor en el mismo centro.
3. NIVELES DE ADQUISICIÓN. Es el eterno debate en el ámbito de los colegios y los institutos. ¿Qué debe saber un niño para poder progresar al escalón siguiente? ¿Qué es lo mínimo imprescindible, aunque no sea ni mucho menos lo único? Es lo cierto que las etapas superiores aparecen permanentemente descontentas con el nivel que traen los alumnos, y el reproche baja en cascada como caen las aguas desde una altura superior a otra inferior.

Ante este estado de cosas entendemos que es positivo y puede ayudar a mejorar la situación el documento que se presenta. Se trata de un conjunto de propuestas que pretenden ordenar, dar pautas, sentar referentes y organizar la participación y la aportación de todos los estamentos a la tarea siempre incompleta y difícil de enseñar matemáticas.

El documento presenta varias propuestas, como se ha dicho. De manera sintética, son las siguientes:

1. Una propuesta curricular articulada en un doble eje: por un lado, se definen tres niveles de dominio de los mismos; por el otro, se reflejan los bloques oficiales de contenido del nuevo currículum, con determinadas adaptaciones, integrando la legislación correspondiente a Andalucía.
2. Una ficha de seguimiento que recoge los progresos del alumnado. Es de una cumplimentación sencillísima, responde al concepto de evaluación curricular, y permitirá que cualquier profesor que tenga que trabajar con un alumno o alumna cualquiera sepa con exactitud en qué etapa de su recorrido por las matemáticas se encuentra.
3. Unas precisiones y aclaraciones conceptuales, que explican algunos de los contenidos que se incluyen en el documento.
4. Unas pruebas de evaluación que ejemplifican algunos de los contenidos de los anteriores niveles. Al fin y a la postre, no sólo es importante que se sepa cómo trasladar un conocimiento o un concepto a un alumno, sino también cuándo, con seguridad, éste lo ha adquirido.
5. Unos Anexos en los que, específicamente, se tratan de manera más detallada algunos aspectos que requieren de una recapitulación por haber sido tratados parcialmente en los dos primeros Ciclos, unas sugerencias metodológicas para el tratamiento de la

numeración en cualquier base y, por último, una pequeña colección de trabajos de los alumnos, en los que aparecen realizaciones de cálculos que se apartan mucho del modelo tradicional, y que emplean los algoritmos abiertos basados en números (Algoritmos ABN).

El documento curricular presenta virtualidades notables. Destacamos:

- Al contemplar el mínimo dominio de las competencias básicas imprescindibles para el posterior progreso, sirve de criterio para establecer qué alumnos deben recibir apoyo y qué alumnos no. Al mismo tiempo, deja también claro qué debe ser objeto del apoyo y de qué no debe ocuparse éste.
- Al venir articulado en bloques y módulos, facilita la ordenación del proceso de enseñanza-aprendizaje y, como consecuencia de ello, la posibilidad de intercambio de propuestas metodológicas, buenas prácticas y un sistema sencillo de inventario de recursos.
- Ayudará a superar las diferencias de criterio respecto a los niveles de adquisición de competencias y contenidos, así como puede ser el referente que en su día sirva de punto de encuentro entre la evaluación final de la Educación Primaria y la evaluación inicial de la Educación Secundaria.

El documento curricular es un proyecto, un embrión, algo que necesita ser desarrollado para que alcance la entidad necesaria y provoque los efectos para los que está concebido. En ese desarrollo y en sus formulaciones definitivas tienen que participar los maestros y maestras del Tercer Ciclo, el Equipo Técnico, los asesores del CEP, los técnicos del EOE y los inspectores. Los maestros y maestras porque ellos son los que trabajan día a día con los niños, los que saben de la posibilidad real de que ciertos planteamiento o diseños puedan aplicarse o no, porque influyen en las familias del alumnado para que acepten y ayuden en el empleo de las nuevas prácticas. Los asesores del CEP son los grandes suministradores de recursos, de materiales, los que gestionan encuentros, grupos de trabajo, cursos, los que ponen el soporte para que los diversos centros sean los nódulos de una gran red de intercambio y facilitación de experiencias. Psicólogos y pedagogos de los EOEs se ocupan de los aspectos más delicados de la personalidad infantil, son expertos en procesos de aprendizaje y conocen a fondo la forma de ayudar a los niños. Por último, a los inspectores les corresponde coordinar los esfuerzos de unos y de otros para que sean fructíferos, amén de procurar que las actuaciones de los diversos protagonistas alcancen el máximo nivel de calidad.

En el ámbito escolar se está empleando mucha energía en revitalizar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el ámbito del Lenguaje y de las Matemáticas. ¿Por qué entonces empezar por Matemáticas? No es por casualidad que esta iniciativa se ocupe de la didáctica de las Matemáticas. Se trata de una didáctica ante la que los profesionales de la enseñanza se sienten más inseguros que ante la de la Lengua. Es cierto también que los recursos y materiales para mejorar su didáctica no son tan abundantes ni están tan al alcance de la mano como en el caso del Lenguaje. Y es cierto, finalmente, para terminar por donde se había empezado, que la situación está peor y es más urgente arreglarla.

Como decía san Juan de la Cruz: “Si no nos gusta donde estamos, no podemos seguir por donde vamos”. Ojalá que con la colaboración de todos la presente iniciativa ayude a ello.

1. CONCEPTO Y VIRTUALIDADES.

1.1. ¿Qué se pretende?

El documento que se acompaña es el resultado de operativizar y articular el currículum actual, estableciendo unos módulos que incluyan aspectos competenciales básicos y conceptos previos para el posterior progreso del alumno en las enseñanzas básicas.

El documento pretende desencadenar en los centros dinámicas de trabajo que vengan a satisfacer necesidades sentidas en el ámbito de la enseñanza matemática. Entre ellas podríamos señalar:

- La elaboración de documentos de mínimos objeto de recuperación en los centros de primaria, adaptados a la peculiaridad de cada uno y de su entorno.
- La elaboración de documentos de referentes para el paso de un Ciclo a otro y para la promoción de Primaria a ESO. En este sentido, puede ser el soporte y objeto de la evaluación final en Primaria e inicial en ESO.
- El avance en la homologación de los contenidos matemáticos de Primaria, con el fin de conseguir productos acumulativos de los maestros que imparten este área.
- Una mayor racionalización y uso de los recursos metodológicos a emplear.
- El establecimiento de bases de datos de evaluación y de pruebas objetivas.
- La fijación de modelos de fichas de seguimiento individuales de los alumnos, concebidas según el modelo de evaluación curricular.

1.2. Sus componentes.

El contenido del documento curricular articulado presenta los siguientes contenidos:

1.2.1. <u>LA DEFINICIÓN DE LOS CONTENIDOS BÁSICOS, DE SUFICIENCIA Y DE MAESTRÍA, ASÍ COMO LA EJEMPLIFICACIÓN DE LOS MISMOS.</u>

Es la pieza clave y abarca la totalidad de los contenidos matemáticos del Segundo Ciclo. Se ofrece completo, y debe pasar la valoración que del mismo se haga en los centros, antes de ser elevado a definitivo.

En la determinación de sus contenidos se articulan tres niveles de dificultad:

1. ***Mínimo o básico***, o aspectos competenciales que el alumnado debe ineludiblemente poseer para no ver imposibilitado su progreso dentro del área.
2. ***De suficiencia***. No en el sentido que tal concepto tiene en las actuales calificaciones, sino en el que expresa un dominio muy aceptable del concepto o competencia de que se trate. Tiene más que ver con actuar con suficiencia que con alcanzar un suficiente “raspado”.
3. ***De maestría***. Se ha elegido este término siguiendo la tradición francesa y en ese sentido: el niño o la niña tiene maestría a la hora de manejar un concepto o una competencia cuando su dominio de la misma es total y, por tanto, es capaz de realizar cualquier ejercicio o práctica que se le proponga, sin importar la dificultad que presente.

1.2.2. LAS FICHAS DE SEGUIMIENTO DE LOS ALUMNOS.

Adapta a cada uno de los alumnos y alumnas el anterior documento, y permite un registro individualizado de sus logros, dentro de un enfoque de evaluación curricular analítica y cualitativa.

Se ofrece a los centros un modelo completo que recoge la totalidad del Documento Modular. Los centros, caso de que así lo decidan, podrán utilizar este modelo o bien crear el suyo propio.

1.2.3. ALGUNAS EXPLICACIONES Y PRECISIONES SOBRE LOS ANTERIORES CONTENIDOS.

No siempre, en un Documento de estas características, se puede ser lo suficientemente explícito en cada uno de los Módulos. Por ello, se ha optado por incluir un apartado nuevo en el que se incluyan explicaciones y ejemplos de los contenidos que puedan ser interpretados de diferente manera o confundidos.

1.2.4. ALGUNOS EJEMPLOS DE ÍTEMS DE EVALUACIÓN.

No se trata de ofrecer un repertorio completo y ajustado a todos y cada uno de los contenidos. Se trata más bien de ilustrar con algún ejemplo el modo en que se puede indagar el grado de adquisición de los conceptos por parte del alumnado. Un buen propósito de este documento sería, precisamente, la construcción de preguntas o pruebas de evaluación específicas a cada módulo, que podrían ser abordadas por los diferentes centros que participan en el proyecto, y puestas posteriormente a disposición de todos, para su valoración y uso.

1.2.5. CUATRO ANEXOS CON CONTENIDOS CLARAMENTE DIFERENCIADOS.

El primero de ellos presenta la taxonomía de problemas de una operación, así como su distribución a lo largo de toda la Educación Primaria. Permitirá una visión completa de todos ellos y una reagrupación en sus correspondientes categorías semánticas de los que han ido apareciendo parcialmente en los anteriores ciclos.

El segundo se ocupa de los problemas de más de una operación. Intenta acercar al docente los últimos avances en la investigación de este aprendizaje, así como la complejidad de los mismos.

El tercero aporta unos ejemplos para trabajar en el aula la numeración en cualquier base. No es esto algo sencillo ni sobre lo que exista una gran tradición escolar. Por eso se quiere mostrar una vía de acceso sencilla, intuitiva, y que no requiere de sofisticados materiales.

El último anexo es una pequeña colección de fotos de trabajos de los niños que se han iniciado en los nuevos algoritmos ABN, y que están dando muy buen resultado. Son cuadernos de niños y niñas de colegios públicos algunos de cuyos docentes se han embarcado en la hermosa tarea de renovar un proceso de enseñanza-aprendizaje que ha quedado ya muy obsoleto.

2. OPERATIVIZACIÓN.

Tras la experiencia de los cursos anteriores, creemos interesante no fijar fechas ni procesos cerrados. Los CEPs establecerán el proceso de difusión y traslado a los centros de las iniciativas que se pudieran tomar, así como de difundir aquellas experiencias o prácticas que los docentes quieran poner en común con sus compañeros.

Respecto al autor del documento, estaría encantado de recibir en el correo electrónico Jaime.martinez.ext@juntadeandalucia.es todas las aportaciones, críticas y sugerencias que los destinatarios de este documento tuvieran a bien hacer.

El DMAM3 que sigue a esta presentación continua el espíritu con el que se realizaron los dos anteriores para el Primer y el Segundo Ciclo. Se espera una buena acogida y aceptación y, sobre todo, que se establezca como cauce por el que puedan circular las ideas, aportaciones y buenas prácticas que el profesorado de Primaria pone en marcha todos los días.

DOCUMENTO MODULAR ARTICULADO DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA.

TERCER CICLO.

CONTENIDOS

TERCER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA.
MÓDULO Nº 1. NUMERACIÓN.
BÁSICO: B.1. Leer, escribir (con cifras y letras) y usar en situaciones reales del nombre y grafía de los números de más de seis cifras. B.2. Intercalar un número natural entre dos dados. B.3. Establecer equivalencias entre los diversos órdenes de unidades. B.4. Leer, escribir (con cifras y letras) y usar los números ordinales, al menos hasta el cincuenta. B.5. Adquirir los conceptos de múltiplo y divisor. B.6. Conocer en sus aspectos más básicos la numeración romana. B.7. Comprender el sentido de los números positivos y negativos. Utilizarlos en contextos reales. B.8. Adquirir el concepto de fracción. Identificar fracciones equivalentes. B.9. Comprender los aspectos básicos de la numeración decimal, utilizando como referencia el euro y sus divisores. Sistematizar el conocimiento informal del alumno. B.10. Ordenar números decimales a partir de listas de precios. B.11. Aprender el valor de posición y las equivalencias entre números decimales, a partir del manejo de euros y sus divisores. B.12. Hallar las equivalencias entre fracciones decimales y numeración decimal. Saber pasar de una a otra, y viceversa. B.13. Conocer en sus aspectos más básicos el concepto de porcentaje.
SUFICIENCIA: S.14. Componer y descomponer números en sus órdenes de unidades y en combinaciones mixtas. S.15. Descomponer cualquier número de hasta seis cifras de forma aditivo-multiplicativa. S.16. Conocer los números ordinales y las reglas de generalización de los mismos. S.17. Comprender la numeración romana y saber utilizarla para datar fechas históricas. S.18. Comprender los números positivos y negativos. Aplicarlos a contextos reales y establecimiento de recorridos. S.19. Comparar fracciones con distintos numerador y denominador (debe existir relación entre los denominadores). Explicitar el criterio de comparación. S.20. Expresar una fracción impropia como número mixto y como fracción. S.21. Comprender la extensión del sistema de numeración a los números decimales. Conocer el valor de posición y equivalencias. Usar los números decimales en la vida cotidiana. S.22 Ordenar números enteros, decimales y fracciones por comparación y representación gráfica. S.23. Componer y descomponer números decimales a partir de sus unidades constitutivas, en orden ascendente, descendente o sin orden establecido. S.24. Expresar el número de partes utilizando porcentajes. Establecer la correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes. S.25. Tener nociones sobre sistemas de numeración en culturas anteriores e influencias en

la actualidad.

MAESTRÍA:

M.26. Sumar y restar números enteros. Tener una aproximación intuitiva con ejemplos reales.
M.27. Intercalar números decimales en una serie dada.
M.28. Descomponer cualquier número de hasta seis cifras como sumas de productos de números naturales por potencias.
M.29. Aprender los sistemas de numeración en bases dos y cinco.

TERCER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA.

MÓDULO Nº 2. OPERACIONES Y PROBLEMAS.

BÁSICO:

B.1. Automatizar el cálculo del producto y la división, al menos por una cifra.
B.2. Sumar y restar con números decimales.
B.3. Utilizar la calculadora para hallar el valor numérico de cualquier fracción.
B.4. Ordenar fracciones de distinto denominador, utilizando la calculadora para hallar el valor numérico de cada una.
B.5. Sumar y restar fracciones con el mismo denominador.
B.6. Iniciarse en el concepto de potencia como productos iguales. Hallar el cuadrado y el cubo de un número, utilizando la calculadora.
B.7. Utilizar la calculadora para hallar el valor de una potencia.
B.8. Resolver problemas de estructuras aditivas de Cambio 3, 4 y 6; Comparación 1 e Igualación 2.
B.9. Resolver problemas de estructuras multiplicativas de Isomorfismo de Medidas 3 y Escalares Grandes 1 y 2.
B.10. Componer un problema de dos operaciones a partir de dos problemas de una operación (que sepan resolver previamente) encadenados entre sí.
B.11. Descomponer un problema de dos operaciones en dos de una operación.
B.12. Resolver problemas de dos operaciones de estructura jerárquica.
B.13. Resolver problemas de tantos por ciento en situaciones muy básicas.

SUFICIENCIA:

S.14. Dominar la tabla de multiplicar. Extender todos los productos aprendidos a las decenas, centenas y millares.
S.15. Automatizar los algoritmos de la multiplicación y división, sin que el multiplicador o el dividendo pase de dos cifras, salvo casos especiales: 309, 2004, etc.
S.16. Sumar, restar y multiplicar números decimales en todas sus variantes.
S.17. Dividir un número con parte decimal entre un divisor sin parte decimal.
S.18. Multiplicar y dividir por la unidad seguida de ceros, incluyendo parte decimal en sus diversos términos.
S.19. Adquirir el concepto de potencia como producto de factores iguales. Conocer y usar adecuadamente los términos: base, exponente, potencia.

S.20. Adquirir y aplicar el concepto de jerarquía de las operaciones. Resolver los casos en que aparezcan paréntesis.
S.21. Resolver problemas de estructuras aditivas de Comparación 6 e Igualación 4.
S.22. Resolver problemas de estructuras multiplicativas de Escalares Grandes 3, Escalares Pequeños 3, y Producto Cartesiano 1 y 2.
S.23. Resolver problemas de tantos por ciento: hallar porcentajes y el tanto por ciento. Aplicar los conocimientos al cálculo del IVA.
S.24. Resolver problemas de dos operaciones de estructura de compartir el todo.
S.25. Resolver los casos más sencillos de los problemas de dos operaciones de estructura de compartir la parte.

MAESTRÍA:
M.26. Adquirir el concepto de producto y división de fracciones. Resolver problemas en que intervengan fracciones de este tipo.
M.27. Dividir números decimales en todos sus supuestos.
M.28. En los problemas de porcentajes, hallar la cantidad de referencia, el porcentaje y el tanto por ciento.
M.29. Resolver todos los casos de problemas de dos operaciones de estructura de compartir la parte, y de doble inclusión.

TERCER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA.

MÓDULO Nº 3. CÁLCULO MENTAL.

BÁSICO:

B.1. Realizar sumas y restas sencillas con términos que tengan parte decimal: 4,5 + 7,3; 28,4 + 30,3; 65,8 – 23,4
B.2. Redondear a las decenas, centenas y millares más próximos a un número dado.
B.3. Identificar múltiplos y divisores sin necesidad de utilizar la tabla de multiplicar.

SUFICIENCIA:

S.4. Calcular productos de bidígitos hasta el veinte.
S.5. Calcular productos de decenas, centenas y millares: 20 x 300; 4000 x 50; 300 x 40.
S.6. Calcular divisiones exactas entre millares, centenas y decenas: 300 : 60; 4000 : 500; etc.
S.7. Identificar, dentro de un número, múltiplos de un número dado (hasta las unidades de mil) y saber encontrar la diferencia (¿Qué múltiplo de ocho es el más próximo a 8756? R: 8000. Dif = 756).
S.8. Redondear números decimales a la unidad, la décima y la centésima.
S.9. Calcular sumas y restas con términos que tengan parte decimal y que impliquen rebasamiento de unidad de orden: 4,5 + 7,6; 28,4 + 30,72; 65,3 – 23,7.

MAESTRÍA:

M.10. Calcular todos los productos de dígito por bidígito. Extenderlos a órdenes de numeración superiores. 78 x 4; 78 x 40.

M.11. Sin ayuda de la tabla, encontrar múltiplos dentro de un número y hallar los restos hasta que no sea posible continuar. 8756? R: 8000 (1000). Dif = 756. 756? R: 720 (90). Dif. 46. 46? R: 40 (8). Dif. 6. Múltiplo más aproximado: 1098.
M.12. Calcular el tamaño del producto y del cociente de términos enteros y términos decimales: 128 x 0,25 = Decenas. 788 : 0,5 = millares.

TERCER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA.

MÓDULO Nº 4. SISTEMA DE MEDIDAS.

BÁSICO:
B.1. Relacionar el funcionamiento del SMD con el sistema de numeración decimal. Saber identificar las unidades correspondientes de uno y otro sistema.
B.2. Establecer las equivalencias entre las diversas unidades de longitud, masa y capacidad. Hacer transformaciones sencillas.
B.3. Expresar de forma compleja e incompleja cualquier medida correspondiente a las magnitudes de longitud, masa y capacidad.
B.4. Conocer las unidades de tiempo, así como sus equivalencias y transformaciones más sencillas.
B.5. Conocer las unidades de amplitud angular, así como sus equivalencias y transformaciones más sencillas.
B.6. Conocer las unidades básicas de superficie, y establecer la equivalencia con la hectárea.
B.7. Conocer las unidades básicas de volumen: m^3, dm^3 y cm^3.
B.8. Establecer las equivalencias básicas entre masa, capacidad y volumen.

SUFICIENCIA:
S.9. Trasladar expresiones complejas a incomplejas, y viceversa, en medidas de longitud, peso y capacidad.
S.10. En un contexto de realización de problemas, emplear los algoritmos de suma y resta con expresiones complejas e incomplejas, en medidas de longitud, peso y capacidad.
S.11. En un contexto de realización de problemas, emplear los algoritmos de suma y resta con expresiones complejas e incomplejas en medidas del tiempo y de la amplitud angular.
S.12. Conocer las unidades de superficie, y establecer las equivalencias entre ellas.
S.13. En un contexto de realización de problemas, emplear los algoritmos de suma y resta con expresiones complejas e incomplejas de medidas de superficie.
S.14. Establecer la equivalencia entre el área y la hectárea y sus equivalentes unidades de superficie.
S.15. Conocer las unidades de volumen. Establecer las transformaciones y equivalencias entre las unidades básicas: m^3, dm^3 y cm^3.

MAESTRÍA:
M.16. En un contexto de realización de problemas, emplear los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división con expresiones complejas e incomplejas, en medidas de longitud, peso y capacidad, tiempo y amplitud angular.
M.17. Expresar de forma compleja e incompleja cualquier medida correspondiente a las magnitudes de superficie.

M.18. En un contexto de realización de problemas, emplear los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división con expresiones complejas e incomplejas, en medidas de superficie.
M.19. Establecer equivalencias y transformaciones con las centiáreas, áreas y hectáreas. Identificarlas con las correspondientes unidades de superficie.
M.20. Ampliar el conocimiento de las unidades de volumen hasta el hectómetro cúbico, como unidad de medida de las grandes masa de agua.
M.21. Establecer equivalencias y transformaciones entre las unidades tratadas.

TERCER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA.

MÓDULO Nº 5. GEOMETRÍA.

BÁSICO:

B.1. Clasificar los distintos tipos de ángulos.
B.2. Medir la amplitud de un ángulo dado, utilizando el transportador.
B.3. Distinguir en un polígono los conceptos de lado y vértice, perímetro y área.
B.4. Identificar y nombrar polígonos, atendiendo al número de lados (triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos,...).
B.5. Clasificar los triángulos, atendiendo a la longitud de los lados y a la amplitud de los ángulos.
B.6. Nombrar los distintos tipos de cuadriláteros.
B.7. Reproducir una figura sencilla, utilizando la regla, el compás y el transportador.
B.8. Dibujar circunferencias y caracterizar los elementos básicos tanto de la circunferencia como del círculo (radio, diámetro, cuerda, arco).
B.9. Distinguir, dada una serie de cuerpos geométricos, reales o dibujados, los que son poliedros y los que son cuerpos redondos, nombrando conos, cilindros y esferas.
B.10. Distinguir, dada una serie de poliedros, reales o dibujados, los que son prismas o pirámides.
B.11. Calcular el perímetro de figuras geométricas sobre una trama tomando como unidad el segmento base de la trama.
B.12. Calcular perímetros y áreas a partir de croquis previamente dibujados por los alumnos.
B.13. Hallar el área de figuras dibujadas sobre una cuadrícula tomando como unidad la superficie de un cuadrado mínimo de la misma.
B.14. Conocer las fórmulas del área del triángulo y del paralelogramo y aplicarlas a figuras de dimensiones dadas.
B.15. Realizar las mediciones y particiones necesarias para calcular el área de figuras geométricas sencillas (triángulos, rectángulos y cuadrados).
B.16. Aplicar los conceptos de paralelismo, perpendicularidad y simetría en objetos y representaciones de la vida real.

SUFICIENCIA:

S.17. Descubrir y enunciar cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo y de un cuadrilátero.
S.18. Identificar y dibujar las tres alturas de un triángulo dado.
S.19. Descubrir simetrías axiales en figuras sencillas y familiares, y trazar el eje.
S.20. Dibujar, dada una figura sencilla en una cuadrícula, la figura simétrica cuando el eje de simetría es horizontal o vertical.
S.21. Dibujar circunferencias y caracterizar los elementos básicos tanto de la circunferencia como del círculo (radio, diámetro, cuerda, arco, tangente y sector circular).
S.22. Realizar las mediciones y particiones necesarias para calcular el área de figuras geométricas sencillas (triángulos, rectángulos y cuadriláteros en general).

MAESTRÍA:

M.23. Calcular el área de todas las figuras geométricas planas regulares.
M.25. Por sucesivas descomposiciones, inferir procedimientos para el cálculo del área de figuras planas irregulares.
M.26. Calcular de forma empírica el volumen de ortoedros (prismas rectos de base rectangular), realizando las mediciones oportunas.

TERCER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA.

MÓDULO Nº 6. TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN, AZAR Y PROBABILIDAD.

BÁSICO:

B.1. Distinguir entre variables cualitativas y variables cuantitativas.
B.2. Recoger y registrar datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. Conceptos de frecuencia y de frecuencia acumulada.
B.3. Leer e interpretar tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana.
B.4. Interpretar y describir de manera verbal los elementos más significativos de gráficos sencillos, que reflejen acontecimientos que sean familiares para el alumnado.

SUFICIENCIA:

S.5. Elaborar y presentar tablas y gráficos de manera ordenada.
S.6. Conocer empíricamente las nociones de media aritmética, mediana, moda y rango de una distribución.
S.7. Distinguir entre variables cuantitativas y cualitativas, y explicar de forma verbal el porqué de esta distinción.
S.8. Recoger y registrar datos, relativos a variables cuantitativas o cualitativas, mediante

encuestas, mediciones y observaciones sistemáticas planificadas. S.9. Elaborar, describir e interpretar tablas de frecuencias absolutas. S.10. Calcular, con el empleo de la calculadora, medias aritméticas en situaciones prácticas de la vida diaria. S.11. Interpretar gráficos estadísticos (de barras, lineales, de sectores). S.12. Estimar el grado de probabilidad sucesos habituales en la vida del alumno.
MAESTRÍA: M.13. Calcular la media aritmética, la mediana, la moda y el rango en una distribución, con el empleo de la calculadora. M.14. Estimar la probabilidad de acierto en los juegos de azar y loterías más conocidos por los niños, ayudándose de la calculadora.

DOCUMENTO MODULAR ARTICULADO DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA.

TERCER CICLO.

FICHA DE SEGUIMIENTO DEL ALUMNO O DE LA ALUMNA.

FICHA DE SEGUIMIENTO DEL SEGUNDO CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA. ALUMNO/A: Nº: GRUPO: COLEGIO: LOCALIDAD O MUNICIPIO:		
CÓD.	*CONTENIDOS.*	*DOMINIO*
	MÓDULO 1. NUMERACIÓN	
B.1.	Leer, escribir (con cifras y letras) y usar en situaciones reales del nombre y grafía de los números de más de seis cifras.	
B.2.	Intercalar un número natural entre dos dados.	
B.3.	Establecer equivalencias entre los diversos órdenes de unidades.	
B.4.	Leer, escribir (con cifras y letras) y usar los números ordinales, al menos hasta el cincuenta.	
B.5.	Adquirir los conceptos de múltiplo y divisor.	
B.6.	Conocer en sus aspectos más básicos la numeración romana.	
B.7.	Comprender el sentido de los números positivos y negativos. Utilizarlos en contextos reales.	
B.8.	Adquirir el concepto de fracción. Identificar fracciones equivalentes.	
B.9.	Comprender los aspectos básicos de la numeración decimal, utilizando como referencia el euro y sus divisores. Sistematizar el conocimiento informal del alumno.	
B.10.	Ordenar números decimales a partir de listas de precios.	
B.11.	Aprender el valor de posición y las equivalencias entre números decimales, a partir del manejo de euros y sus divisores.	
B.12.	Hallar las equivalencias entre fracciones decimales y numeración decimal. Saber pasar de una a otra, y viceversa.	
B.13.	Conocer en sus aspectos más básicos el concepto de porcentaje.	
S.14.	Componer y descomponer números en sus órdenes de unidades y en combinaciones mixtas.	
S.15.	Descomponer cualquier número de hasta seis cifras de forma aditivo-multiplicativa.	
S.16.	Conocer los números ordinales y las reglas de generalización de los mismos.	
S.17.	Comprender la numeración romana y saber utilizarla para datar fechas históricas.	
S.18.	Comprender los números positivos y negativos. Aplicarlos a contextos reales y establecimiento de recorridos.	
S.19.	Comparar fracciones con distintos numerador y denominador (debe existir relación entre los denominadores). Explicitar el criterio de comparación.	
S.20.	Expresar una fracción impropia como número mixto y como fracción.	

FICHA DE SEGUIMIENTO DEL SEGUNDO CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA.		
ALUMNO/A: Nº: GRUPO:		
COLEGIO:		
LOCALIDAD O MUNICIPIO:		
CÓD.	*CONTENIDOS.*	*DOMINIO*
S.21.	Comprender la extensión del sistema de numeración a los números decimales. Conocer el valor de posición y equivalencias. Usar los números decimales en la vida cotidiana.	
S.22.	Ordenar números enteros, decimales y fracciones por comparación y representación gráfica.	
S.23.	Componer y descomponer números decimales a partir de sus unidades constitutivas, en orden ascendente, descendente o sin orden establecido.	
S.24.	Expresar el número de partes utilizando porcentajes. Establecer la correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.	
S.25.	Tener nociones sobre sistemas de numeración en culturas anteriores e influencias en la actualidad.	
M.26.	M.26. Sumar y restar números enteros. Tener una aproximación intuitiva con ejemplos reales.	
M.27.	Intercalar números decimales en una serie dada.	
M.28.	Descomponer cualquier número de hasta seis cifras como sumas de productos de números naturales por potencias.	
M.29.	Aprender los sistemas de numeración en bases dos y cinco.	
MÓDULO 2. OPERACIONES Y PROBLEMAS.		
B.1.	Automatizar el cálculo del producto y la división, al menos por una cifra.	
B.2.	Sumar y restar con números decimales.	
B.3.	Utilizar la calculadora para hallar el valor numérico de cualquier fracción.	
B.4.	Ordenar fracciones de distinto denominador, utilizando la calculadora para hallar el valor numérico de cada una.	
B.5.	Sumar y restar fracciones con el mismo denominador.	
B.6.	Iniciarse en el concepto de potencia como productos iguales. Hallar el cuadrado y el cubo de un número, utilizando la calculadora.	
B.7.	Utilizar la calculadora para hallar el valor de una potencia.	
B.8.	Resolver problemas de estructuras aditivas de Cambio 3, 4 y 6; Comparación 1 e Igualación 2.	
B.9.	Resolver problemas de estructuras multiplicativas de Isomorfismo de Medidas 3 y Escalares Grandes 1 y 2.	
B.10.	Componer un problema de dos operaciones a partir de dos problemas de una operación (que sepan resolver previamente) encadenados entre sí.	

FICHA DE SEGUIMIENTO DEL SEGUNDO CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA. **ALUMNO/A:** **Nº:** **GRUPO:** **COLEGIO:** **LOCALIDAD O MUNICIPIO:**		
CÓD.	*CONTENIDOS.*	*DOMINIO*
B.11.	Descomponer un problema de dos operaciones en dos de una operación.	
B.12.	Resolver problemas de dos operaciones de estructura jerárquica.	
B.13.	Resolver problemas de tantos por ciento en situaciones muy básicas.	
S.14.	Dominar la tabla de multiplicar. Extender todos los productos aprendidos a las decenas, centenas y millares.	
S.15.	Automatizar los algoritmos de la multiplicación y división, sin que el multiplicador o el dividendo pase de dos cifras, salvo casos especiales: 309, 2004, etc.	
S.16.	Sumar, restar y multiplicar números decimales en todas sus variantes.	
S.17.	Dividir un número con parte decimal entre un divisor sin parte decimal.	
S.18.	Multiplicar y dividir por la unidad seguida de ceros, incluyendo parte decimal en sus diversos términos.	
S.19.	Adquirir el concepto de potencia como producto de factores iguales. Conocer y usar adecuadamente los términos: base, exponente, potencia.	
S.20.	Adquirir y aplicar el concepto de jerarquía de las operaciones. Resolver los casos en que aparezcan paréntesis.	
S.21.	Resolver problemas de estructuras aditivas de Comparación 6 e Igualación 4.	
S.22.	Resolver problemas de estructuras multiplicativas de Escalares Grandes 3, Escalares Pequeños 3, y Producto Cartesiano 1 y 2.	
S.23.	Resolver problemas de tantos por ciento: hallar porcentajes y el tanto por ciento. Aplicar los conocimientos al cálculo del IVA.	
S.24.	Resolver problemas de dos operaciones de estructura de compartir el todo.	
S.25.	Resolver los casos más sencillos de los problemas de dos operaciones de estructura de compartir la parte.	
M.26.	Adquirir el concepto de producto y división de fracciones. Resolver problemas en que intervengan fracciones de este tipo.	
M.27.	Dividir números decimales en todos sus supuestos.	
M.28.	En los problemas de porcentajes, hallar la cantidad de referencia, el porcentaje y el tanto por ciento.	
M.29.	Resolver todos los casos de problemas de dos operaciones de estructura de compartir la parte, y de doble inclusión.	

FICHA DE SEGUIMIENTO DEL SEGUNDO CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA. ALUMNO/A: Nº: GRUPO: COLEGIO: LOCALIDAD O MUNICIPIO:		
CÓD.	*CONTENIDOS.*	*DOMINIO*
	MÓDULO 3. CÁLCULO MENTAL.	
B.1.	Realizar sumas y restas sencillas con términos que tengan parte decimal: 4,5 + 7,3; 28,4 + 30,3; 65,8 – 23,4	
B.2.	Redondear a las decenas, centenas y millares más próximos a un número dado.	
B.3.	Identificar múltiplos y divisores sin necesidad de utilizar la tabla de multiplicar.	
S.4.	Calcular productos de bidígitos hasta el veinte.	
S.5.	Calcular productos de decenas, centenas y millares: 20 x 300; 4000 x 50; 300 x 40.	
S.6.	Calcular divisiones exactas entre millares, centenas y decenas: 300 : 60; 4000 : 500; etc.	
S.7.	Identificar, dentro de un número, múltiplos de un número dado (hasta las unidades de mil) y saber encontrar la diferencia (¿Qué múltiplo de ocho es el más próximo a 8756? R: 8000. Dif = 756).	
S.8.	Redondear números decimales a la unidad, la décima y la centésima.	
S.9.	Calcular sumas y restas con términos que tengan parte decimal y que impliquen rebasamiento de unidad de orden: 4,5 + 7,6; 28,4 + 30,72; 65,3 – 23,7.	
M.10.	Calcular todos los productos de dígito por bidígito. Extenderlos a órdenes de numeración superiores. 78 x 4; 78 x 40.	
M.11.	Sin ayuda de la tabla, encontrar múltiplos dentro de un número y hallar los restos hasta que no sea posible continuar. 8756? R: 8000 (1000). Dif = 756. 756? R: 720 (90). Dif. 46. 46? R: 40 (8). Dif. 6. Múltiplo más aproximado: 1098.	
M.12.	Calcular el tamaño del producto y del cociente de términos enteros y términos decimales: 128 x 0,25 = Decenas. 788 : 0,5 = millares.	
	MÓDULO 4. SISTEMA DE MEDIDAS.	
B.1.	Relacionar el funcionamiento del SMD con el sistema de numeración decimal. Saber identificar las unidades correspondientes de uno y otro sistema.	
B.2.	Establecer las equivalencias entre las diversas unidades de longitud, masa y capacidad. Hacer transformaciones sencillas.	
B.3.	Expresar de forma compleja e incompleja cualquier medida correspondiente a las magnitudes de longitud, masa y capacidad.	
B.4.	Conocer las unidades de tiempo, así como sus equivalencias y transformaciones más sencillas.	

FICHA DE SEGUIMIENTO DEL SEGUNDO CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA. ALUMNO/A: Nº: GRUPO: COLEGIO: LOCALIDAD O MUNICIPIO:		
CÓD.	*CONTENIDOS.*	*DOMINIO*
B.5.	Conocer las unidades de amplitud angular, así como sus equivalencias y transformaciones más sencillas.	
B.6.	Conocer las unidades básicas de superficie, y establecer la equivalencia con la hectárea.	
B.7.	Conocer las unidades básicas de volumen: m^3, dm^3 y cm^3.	
B.8.	Establecer las equivalencias básicas entre masa, capacidad y volumen.	
S.9.	Trasladar expresiones complejas a incomplejas, y viceversa, en medidas de longitud, peso y capacidad.	
S.10.	En un contexto de realización de problemas, emplear los algoritmos de suma y resta con expresiones complejas e incomplejas, en medidas de longitud, peso y capacidad.	
S.11.	En un contexto de realización de problemas, emplear los algoritmos de suma y resta con expresiones complejas e incomplejas en medidas del tiempo y de la amplitud angular.	
S.12.	Conocer las unidades de superficie, y establecer las equivalencias entre ellas.	
S.13.	En un contexto de realización de problemas, emplear los algoritmos de suma y resta con expresiones complejas e incomplejas de medidas de superficie.	
S.14.	Establecer la equivalencia entre el área y la hectárea y sus equivalentes unidades de superficie.	
S.15.	Conocer las unidades de volumen. Establecer las transformaciones y equivalencias entre las unidades básicas: m^3, dm^3 y cm^3.	
M.16.	En un contexto de realización de problemas, emplear los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división con expresiones complejas e incomplejas, en medidas de longitud, peso y capacidad, tiempo y amplitud angular.	
M.17.	Expresar de forma compleja e incompleja cualquier medida correspondiente a las magnitudes de superficie.	
M.18.	En un contexto de realización de problemas, emplear los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división con expresiones complejas e incomplejas, en medidas de superficie.	
M.19.	Establecer equivalencias y transformaciones con las centiáreas, áreas y hectáreas. Identificarlas con las correspondientes unidades de superficie.	
M.20.	Ampliar el conocimiento de las unidades de volumen hasta el hectómetro cúbico, como unidad de medida de las grandes masa de agua.	
M.21.	Establecer equivalencias y transformaciones entre las unidades tratadas.	

MÓDULO 5. GEOMETRÍA.		
B.1.	Clasificar los distintos tipos de ángulos.	
B.2.	Medir la amplitud de un ángulo dado, utilizando el transportador.	
B.3.	Distinguir en un polígono los conceptos de lado y vértice, perímetro y área.	
B.4.	Identificar y nombrar polígonos, atendiendo al número de lados (triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos,...).	
B.5.	Clasificar los triángulos, atendiendo a la longitud de los lados y a la amplitud de los ángulos.	
B.6.	Nombrar los distintos tipos de cuadriláteros.	
B.7.	Reproducir una figura sencilla, utilizando la regla, el compás y el transportador.	
B.8.	Dibujar circunferencias y caracterizar los elementos básicos tanto de la circunferencia como del círculo (radio, diámetro, cuerda, arco).	
B.9.	Distinguir, dada una serie de cuerpos geométricos, reales o dibujados, los que son poliedros y los que son cuerpos redondos, nombrando conos, cilindros y esferas.	
B.10.	Distinguir, dada una serie de poliedros, reales o dibujados, los que son prismas o pirámides.	
B.11.	Calcular el perímetro de figuras geométricas sobre una trama tomando como unidad el segmento base de la trama.	
B.12.	Calcular perímetros y áreas a partir de croquis previamente dibujados por los alumnos.	
B.13.	Hallar el área de figuras dibujadas sobre una cuadrícula tomando como unidad la superficie de un cuadrado mínimo de la misma.	
B.14.	Conocer las fórmulas del área del triángulo y del paralelogramo y aplicarlas a figuras de dimensiones dadas.	
B.15.	Realizar las mediciones y particiones necesarias para calcular el área de figuras geométricas sencillas (triángulos, rectángulos y cuadrados).	
B.16.	Aplicar los conceptos de paralelismo, perpendicularidad y simetría en objetos y representaciones de la vida real.	
S.17.	Descubrir y enunciar cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo y de un cuadrilátero.	
S.18.	Identificar y dibujar las tres alturas de un triángulo dado.	
S.19.	Descubrir simetrías axiales en figuras sencillas y familiares, y trazar el eje.	
S.20.	Dibujar, dada una figura sencilla en una cuadrícula, la figura simétrica cuando el eje de simetría es horizontal o vertical.	
S.21.	Dibujar circunferencias y caracterizar los elementos básicos tanto de la circunferencia como del círculo (radio, diámetro, cuerda, arco, tangente y sector circular).	
S.22.	Realizar las mediciones y particiones necesarias para calcular el área de figuras geométricas sencillas (triángulos, rectángulos y cuadriláteros en general).	
M.23.	Calcular el área de todas las figuras geométricas planas regulares.	

M.24.	Por sucesivas descomposiciones, inferir procedimientos para el cálculo del área de figuras planas irregulares.	
M.25.	Calcular de forma empírica el volumen de ortoedros (prismas rectos de base rectangular), realizando las mediciones oportunas.	
MÓDULO 6. TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN, AZAR Y PROBABILIDAD.		
B.1.	Distinguir entre variables cualitativas y variables cuantitativas.	
B.2.	Recoger y registrar datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. Conceptos de frecuencia y de frecuencia acumulada.	
B.3.	Leer e interpretar tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana.	
B.4.	Interpretar y describir de manera verbal los elementos más significativos de gráficos sencillos, que reflejen acontecimientos que sean familiares para el alumnado.	
S.5.	Elaborar y presentar tablas y gráficos de manera ordenada.	
S.6.	Conocer empíricamente las nociones de media aritmética, mediana, moda y rango de una distribución.	
S.7.	Distinguir entre variables cuantitativas y cualitativas, y explicar de forma verbal el porqué de esta distinción.	
S.8.	Recoger y registrar datos, relativos a variables cuantitativas o cualitativas, mediante encuestas, mediciones y observaciones sistemáticas planificadas.	
S.9.	Elaborar, describir e interpretar tablas de frecuencias absolutas.	
S.10.	Calcular, con el empleo de la calculadora, medias aritméticas en situaciones prácticas de la vida diaria.	
S.11.	Interpretar gráficos estadísticos (de barras, lineales, de sectores).	
S.12.	Estimar el grado de probabilidad sucesos habituales en la vida del alumno.	
M.13.	Calcular la media aritmética, la mediana, la moda y el rango en una distribución, con el empleo de la calculadora.	
M.14.	Estimar la probabilidad de acierto en los juegos de azar y loterías más conocidos por los niños, ayudándose de la calculadora.	

DOCUMENTO MODULAR ARTICULADO DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA.

TERCER CICLO.

ACLARACIONES Y PRECISIONES.

MÓDULO Nº 1. NUMERACIÓN.

B.5. Adquirir los conceptos de múltiplo y divisor.

Evidentemente, no se trata de una iniciación sistemática en procesos de factorización, sino de, a partir de la tabla de multiplicar, establecer las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto. Así, el dividendo menos el resto es un múltiplo del cociente o el divisor. Estos, a su vez son divisores de ese dividendo al que se le ha sustraído el resto.

En el caso de la tabla de multiplicar, se debe reconocer que los factores son los divisores del producto y éste, a su vez, el múltiplo de cualquiera de ellos.

B.7. Comprender el sentido de los números positivos y negativos. Utilizarlos en contextos reales.

Son muchos los contextos que se pueden emplear:

- En el fútbol, las diferencias entre goles a favor y goles en contra.
- En dinero, tenerlo o deberlo.
- En altura, metros sobre el nivel del mar o bajo el nivel del mar.
- Temperaturas: bajo cero y sobre cero.
- Edificios y ascensores, etc.

S.14. Componer y descomponer números en sus órdenes de unidades y en combinaciones mixtas.

No sólo descomponer 1456 en 1 M, 4 C, 5 D y 6 U, sino también en 14 C y 56 U; 1 M y 456 U, etc.

S.24. Expresar el número de partes utilizando porcentajes. Establecer la correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.

El alumno ha de saber utilizar indistintamente uno u otro sistema de referencia. El número decimal lo puede convertir en fracción decimal, y buscar la equivalente a ésta con denominador 100. Por ejemplo:

0,4 = 4 / 10; 4 / 10 = 40 / 100; 40 / 100 = 40 %.

M.28. Descomponer cualquier número de hasta seis cifras como sumas de productos de números naturales por potencias.

Es el caso del ejercicio siguiente:

$\mathbf{3658 = (3 \times 10^3) + (6 \times 100^2) + (5 \times 10^1) + (8 \times 10^0).}$

MÓDULO Nº 2. OPERACIONES Y PROBLEMAS.

S.14. Dominar la tabla de multiplicar. Extender todos los productos aprendidos a las decenas, centenas y millares.

Se trata de extender el conocimiento de los hechos básicos de la multiplicación (tabla) a las decenas, centenas y millares. De este modo, si el alumno sabe cuántas son 5 x 7, debe saber cuántas son 5 x 70, 5 x 700, 5 x 7000. También: 50 x 70; 50 x 700. Esta ampliación del conocimiento de la tabla es muy útil para la operación de dividir, para hacer estimaciones y el cálculo mental.

MÓDULO Nº 3. CÁLCULO MENTAL.

M.10. Calcular todos los productos de dígito por bidígito. Extenderlos a órdenes de numeración superiores. 78 x 4; 78 x 40.

Son los casos de 7 x 48, ó 9 x 63. No se trata de que los memoricen, sino de que los calculen con rapidez y seguridad. Para ello recomendamos (9 x 63):

1. Se multiplica mentalmente 9 por 60 (540) y se escribe el resultado.
2. Se multiplican las unidades (27). Se llevan en la memoria de trabajo.
3. Se suman mentalmente ambas cantidades (567).

Estas recomendaciones son válidas también para S.4: Calcular productos de bidígitos hasta el veinte.

DOCUMENTO MODULAR ARTICULADO DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA.

TERCER CICLO.

EJEMPLOS DE REFERENCIAS PARA LA EVALUACIÓN

MÓDULO Nº 1. NUMERACIÓN.

B.1. Leer, escribir (con cifras y letras) y usar en situaciones reales del nombre y grafía de los números de más de seis cifras.

Escribe con cifras los siguientes números.	
Cinco millones cinco mil cinco.	
Dos millones dos.	
Siete millones trescientos tres.	
Cuatro millones doscientos sesenta y tres mil.	

Escribe con letras los siguientes números.	
$4_1$168.000	
$6_1$003.003	
$4_1$000.008	
$9_1$000.200	

B.5. Adquirir los conceptos de múltiplo y divisor.

Subraya qué números, de los siguientes, son múltiplos de 6: 6, 8, 62, 36, 45, 600, 800
Escribe dos divisores de cada uno de los números que siguen: **16 = y ; 48= y ; 20 = y ; 27 = y ; 72 = y**
Se han guardado 72 botellas de agua en cajas. Todas tienen el mismo número de botellas y no ha sobrado ninguna. De los números que siguen, sólo uno es el número exacto de cajas que se han empleado. Subráyalo y explica por qué es ese número y no otro. **5 7 8 10 11 14** **Explicación.**

S.22 Ordenar números enteros, decimales y fracciones por comparación y representación gráfica.

Ordena de menor a mayor los siguientes números fraccionarios:	Escríbelos aquí en el orden pedido.
1/2; 1/6; 1/8; 1/3; 1/10.	
2/4; 6/4; 1/4; 3/4; 5/4.	
3/6; 1/5; 6/7;	

S.24. Expresar el número de partes utilizando porcentajes. Establecer la correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.

COMPLETA LAS EQUIVALENCIAS QUE FALTAN EN LA TABLA SIGUIENTE.		
FRACCIONES	**DECIMALES**	**PORCENTAJES**
1/2		**50 %**
3/4	**0,75**	
	0,4	**40 %**

M.27. Intercalar números decimales en una serie dada.

Escribe dos números comprendidos entre:

2 y 3 =	**0,3 y 0,04=**	**0,5 y 0,6 =**	**0,3 y 0,31 =**

M.28. Descomponer cualquier número de hasta seis cifras como sumas de productos de números naturales por potencias.

Descompón los números siguientes tal y como se muestra en el ejemplo:

$2_{1}163.024$	**$2 \times 10^6 + 10^5 + 6 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10 + 4$.**
63.678	
124.006	
$1_{1}500.876$	

MÓDULO Nº 2. OPERACIONES Y PROBLEMAS.

B.7. Utilizar la calculadora para hallar el valor de las potencias siguientes:

6^2 =	**7^3 =**	**2^8 =**	**5^4 =**	**12^2 =**	**25^2 =**

B.11. Descomponer un problema de dos operaciones en dos de una operación.

En el ejemplo siguiente aparece descompuesto un problema de dos operaciones en dos de una operación:

Mi padre compra un televisor nuevo que vale 650 €. Paga de entrada 300 €, y el resto lo va a pagar en 7 plazos iguales. ¿Cuál es el importe de cada uno de los plazos? Problema 1. Mi padre compra un televisor nuevo que vale 650 €. Paga de entrada 300 €. ¿Cuánto dinero queda por pagar?

Problema nº 2. Mi padre tiene que pagar 350 € en 7 plazos. ¿Cuál es el importe de cada uno de ellos?.

Haz dos problemas del siguiente, como en el ejemplo anterior:

Una asistenta trabaja 8 horas a la semana, 5 días por semana. Cobra a 15 € la hora. ¿Cuánto gana en una semana?
Problema nº 1.
Problema nº 2.

S.14. Dominar la tabla de multiplicar. Extender todos los productos aprendidos a las decenas, centenas y millares.

Halla los siguientes productos.

300 x 5 =	70 x 8 =	4000 x 6 =	800 x 9 =

S.23. Resolver problemas de tantos por ciento: hallar porcentajes y el tanto por ciento. Aplicar los conocimientos al cálculo del IVA.

"El Sr. López ha ingresado en una cuenta de ahorros 3000 €. Al año le ingresan los intereses y tiene 3150 €. ¿Qué tanto por ciento de interés anual le han dado?"

S.6. Calcular divisiones exactas entre millares, centenas y decenas: 300 : 60; 4000 : 500; etc.

Resuelve, sin hacer operaciones, las siguientes divisiones:

6000 : 30 =	280 : 40 =	4000 : 200 =

MÓDULO Nº 4. SISTEMAS DE MEDIDAS.

B.6. Conocer las unidades básicas de superficie, y establecer la equivalencia con la hectárea.

"En un incendio forestal han ardido 300 ha. ¿Cuántos m^2 han ardido?"

S.10. En un contexto de realización de problemas, emplear los algoritmos de suma y resta con expresiones complejas e incomplejas, en medidas de longitud, peso y capacidad.

"Un depósito contiene 348,7 litros de agua. Le añaden 184 litros. ¿Cuánta agua contiene ahora? Expresa el resultado de forma compleja".

S.11. En un contexto de realización de problemas, emplear los algoritmos de suma y resta con expresiones complejas e incomplejas en medidas del tiempo y de la amplitud angular.

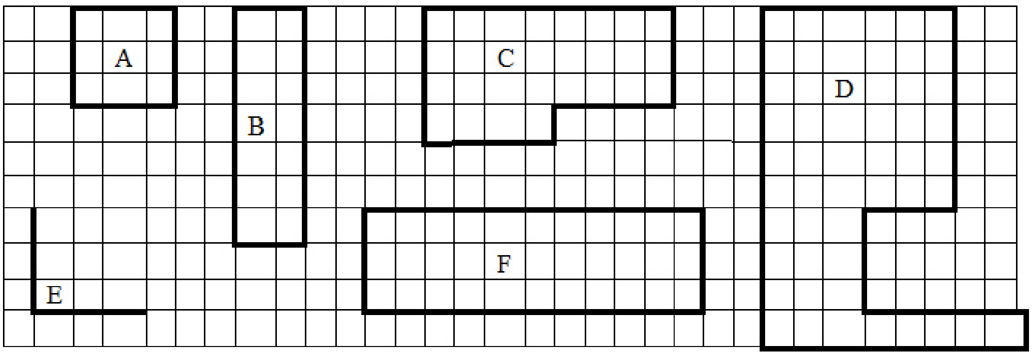
"Hemos ido a visitar el museo. Hemos salido a las 9 de la mañana. En el autobús hemos tardado 30 minutos en llegar. La visita ha durado 3 horas. Luego hemos estado jugando dos cuartos de hora. Tras otra media hora de autobús hemos llegado al colegio. ¿A qué hora hemos llegado?"

MÓDULO Nº 5. GEOMETRÍA.

B.11. Calcular el perímetro de figuras geométricas sobre una trama tomando como unidad el segmento base de la trama.

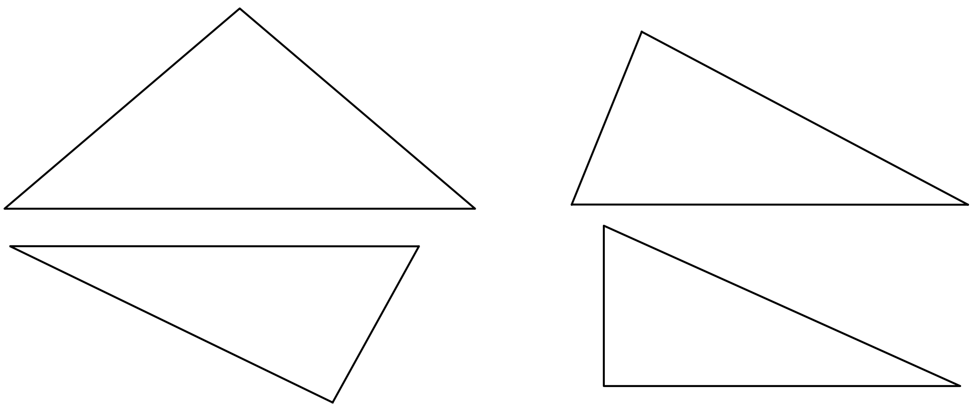
Completa el siguiente cuadro. Cada segmento de la trama vale 1 cm.

FIGURA	A	B	C	D	E	F
PERÍMETRO						
ÁREA						



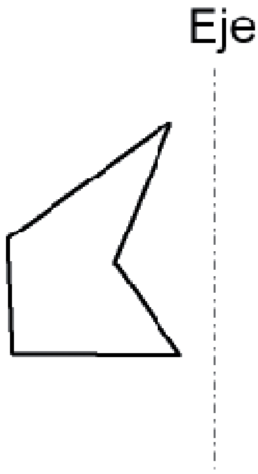
S.18. Identificar y dibujar las tres alturas de un triángulo dado.

Dibuja las tres alturas de los triángulos siguientes.



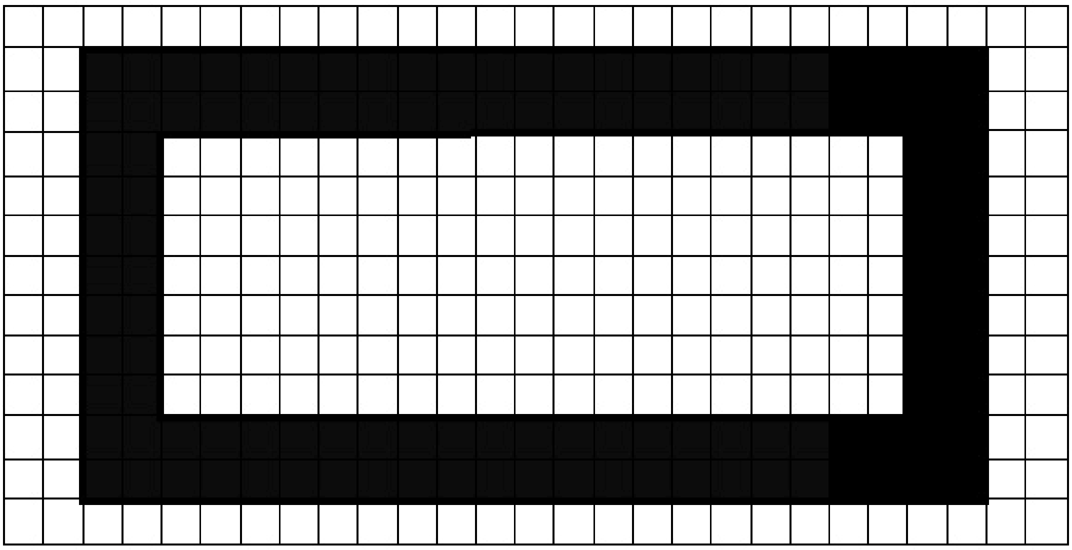
S.20. Dibujar, dada una figura sencilla en una cuadrícula, la figura simétrica cuando el eje de simetría es horizontal o vertical.

Dibuja las figuras simétricas a las dadas, con respecto a los ejes de simetría.



M.23. Calcular el área de todas las figuras geométricas planas regulares.

La zona sombreada representa el paseo de un parque. Si cada segmento de la cuadrícula equivale a 4 metros, ¿cuál es su superficie?



MÓDULO Nº 6. TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN, AZAR Y PROBABILIDAD.

B.1. Distinguir entre variables cualitativas y variables cuantitativas.

Clasifica las siguientes variables según sean cualitativas o cuantitativas:
Color de las rosas; altura de las personas; el dolor que se siente; el sueño que se siente; el número de habitantes de una ciudad; la longitud de un río; el cariño con que se quiere a una persona; los días que se tarda en hacer una obra.

Variables cualitativas.	
Variables cuantitativas.	

S.10. Calcular, con el empleo de la calculadora, medias aritméticas en situaciones prácticas de la vida diaria.

Pregunta a diez de tus compañeros cuánto pesan. Confecciona la tabla de frecuencias y halla la media aritmética ayudándote de la calculadora.

DOCUMENTO MODULAR ARTICULADO DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA.

ANEXO PARA EL PRIMER, SEGUNDO Y TERCER CICLO.

TAXONOMÍA DE PROBLEMAS DE UNA OPERACIÓN.

PROBLEMAS NUCLEARES DE UNA OPERACIÓN.
ESTRUCTURAS ADITIVAS.

CATEGORÍA DE CAMBIO.

TIPO	TEXTO	CANTIDAD INICIAL	CAMBIO	CANTIDAD FINAL	SENTIDO	OPERACIÓN
1	Andrés tiene 12 euros. Le dan 5 más. ¿Cuánto dinero tiene ahora?	12	5	Incógnita.	Aumento (+)	Suma (+)
2	Andrés tiene 12 euros. Pierde 5. ¿Cuánto dinero tiene ahora?	12	5	Incógnita.	Disminución (-)	Sustracción (-)
3	Andrés tiene 12 euros. Su abuelo le da dinero. Ahora tiene 17. ¿Cuánto dinero le han dado?	12	Incógnita.	17	Aumento (+)	Sustracción (-)
4	Andrés tiene 12 euros. Pierde dinero, y ahora tiene 7 euros. ¿Cuánto ha perdido?	12	Incógnita	7	Disminución (-)	Sustracción (-)
5	A Andrés le ha dado su abuelo 5 euros. Ahora tiene 17. ¿Cuánto dinero tenía antes?	Incógnita.	5	17	Aumento (+)	Sustracción (-)
6	Andrés ha perdido 5 euros. Le quedan todavía 7. ¿Cuánto tenía antes de perderlos?	Incógnita.	5	7	Disminución (-)	Suma (+)

CATEGORÍA DE COMBINACIÓN.

TIPO	TEXTO	CANTIDAD I.	CANTIDAD II.	TODO	SENTIDO	OPERACIÓN
1	En la granja tienen 45 gallinas y 6 gallos. ¿Cuántas aves tienen en total?	45	6	Incógnita.	Reunir (+)	Suma (+)
2	En la granja hay 51 aves entre gallos y gallinas. Hay 6 gallos. ¿Cuántas gallinas hay?	Incógnita	6	51	Complementar (-)	Sustracción (-)

CATEGORÍA DE COMPARACIÓN.

TIPO	TEXTO	CANTIDAD COMPARADA	CANTIDAD REFERENTE	DIFERENCIA	SENTIDO DE LA DIFERENCIA	OPERACIÓN
1	Andrés tiene 12 euros. Juan tiene 5. ¿Cuántas euros más tiene Andrés?	12	5	Incógnita.	(+)	Sustracción (-)
2	Andrés tiene 12 euros. Juan tiene 5. ¿Cuántas euros menos tiene Juan?	5	12	Incógnita.	(-)	Sustracción (-)
3	Andrés tiene 12 euros. Juan tiene 3 pts. más que él. ¿Cuánto dinero tiene Juan?	12	Incógnita.	3	(+)	Adición (+)
4	Andrés tiene 12 euros. Juan tiene 3 menos que él. ¿Cuánto dinero tiene Juan?	12	Incógnita	3	(-)	Sustracción (-)
5	Andrés tiene 12 euros. Tiene 5 euros más que Juan. ¿Cuánto dinero tiene Juan?	Incógnita.	12	5	(+)	Sustracción (-)
6	Andrés tiene 12 euros. Tiene 5 euros menos que Juan. ¿Cuánto dinero tiene Juan?	Incógnita.	12	5	(-)	Adición (+)

CATEGORÍA DE IGUALACIÓN.

TIPO	TEXTO	CANTIDAD REFERENTE	CANTIDAD IGUALADA	DIFERENCIA	SENTIDO DE LA DIFERENCIA	OPERACIÓN
1	Andrés tiene 12 euros. Juan tiene 5. ¿Cuántos euros tiene que perder Andrés para que le queden los mismos que a Juan?	5	12	Incógnita.	(+)	Sustracción (-)
2	Andrés tiene 12 euros. Juan tiene 5. ¿Cuántas euros le deben dar a Juan para que tenga los mismos que Andrés?	12	5	Incógnita.	(-)	Sustracción (-)
3	Andrés tiene 12 euros. Si a Juan le dan 3 euros más, tiene el mismo dinero que Andrés. ¿Cuánto dinero tiene Juan?	12	Incógnita.	3	(+)	Sustracción (-)
4	Andrés tiene 12 euros. Si Juan perdiera 3 euros, le quedaría el mismo dinero que a Andrés. ¿Cuánto dinero tiene Juan?	12	Incógnita	3	(-)	Adición (+)
5	Andrés tiene 12 euros. Si le dieran 5 euros tendría el mismo dinero que Juan. ¿Cuánto dinero tiene Juan?	Incógnita.	12	5	(+)	Adición (+)
6	Andrés tiene 12 euros. Si perdiera 5 euros tendría el mismo dinero que Juan. ¿Cuánto dinero tiene Juan?	Incógnita.	12	5	(-)	Sustracción (-)

PROBLEMAS NUCLEARES DE UNA OPERACIÓN.
ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS.

CATEGORÍA DE ISOMORFISMO DE MEDIDAS.

TIPO	TEXTO	CANTIDAD INICIAL	CANTIDAD "N"	RESULTADO	SENTIDO.	OPERACIÓN
1	En cada hoja del álbum puedo pegar 8 cromos. Si el álbum tiene 12 hojas, ¿cuántos cromos se pueden pegar en él?	8	12	Incógnita.	Multiplicación	Producto (x)
2	Una colección consta de 96 cromos. Su álbum tiene 12 páginas. En todas ellas se pega el mismo número de cromos. ¿Cuántos cromos se pegan en cada página?	Incógnita	12	96	Partición.	División (:)
3	Una colección consta de 96 cromos. Si en cada página del álbum pegamos 8 cromos, ¿cuántas páginas tendrá el álbum?	8	Incógnita.	96	Cuotición	División (:)

CATEGORÍA DE ESCALARES GRANDES.

TIPO	TEXTO	CANTIDAD INICIAL	ESCALAR	RESULTADO	SENTIDO.	OPERACIÓN
1	Juan tiene 8 euros. Luisa tiene 4 veces más dinero que él. ¿Cuánto dinero tiene Luisa?	8	4	Incógnita	Aumento	Producto (x)
2	Luisa tiene 32 euros, y tiene 4 veces más dinero que Juan. ¿Cuánto dinero tiene Juan?	Incógnita	4	32	Aumento	División (:)
3	Luisa tiene 32 euros. Juan tiene 8. ¿Cuántas veces más dinero tiene Luisa que Juan?	8	Incógnita	32	Cuotición	División (:)

CATEGORÍA DE ESCALARES PEQUEÑOS.

TIPO	TEXTO	CANTIDAD INICIAL	ESCALAR	RESULTADO	SENTIDO.	OPERACIÓN
1	Juan tiene 8 euros. Tiene 4 veces menos dinero que Luisa. ¿Cuánto dinero tiene Luisa?	8	4	Incógnita	Disminución	Producto (x)
2	Luisa tiene 32 euros, y Juan tiene 4 veces menos dinero que ella. ¿Cuánto dinero tiene Juan?	Incógnita	4	32	Disminución	División (:)
3	Luisa tiene 32 euros. Juan tiene 8. ¿Cuántas veces menos dinero tiene Juan que Luisa?	8	Incógnita	32	Cuotición	División (:)

CATEGORÍA DE PRODUCTO CARTESIANO.

TIPO	TEXTO	CANTIDADES	RESULTADO	SENTIDO.	OPERACIÓN
1	¿De cuántas formas distintas se pueden combinar 4 camisas y 3 corbatas?	4 y 3	Incógnita	Aumento	Multiplicación (x)
2	Se pueden combinar de 12 formas distintas camisas con corbatas. Si hay 4 camisas, ¿cuántas corbatas son necesarias?	Incógnita en una de ellas (4 y ?)	12	Disminución	División (:)

SECUENCIACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE UNA OPERACIÓN.

	Primer Ciclo			Segundo Ciclo			Tercer Ciclo		
	B	**S**	**M**	**B**	**S**	**M**	**B**	**S**	**M**
CA1	X								
2	X								
3					X		X		
4					X		X		
5				X					
6					X		X		
CO1	X								
2				X					
CM1					X		X		
2			X	X					
3	X								
4	X								
5					X				
6						X		X	
IG1				X					
2			X		X		X		
3					X				
4						X		X	
5		X		X					
6		X		X					
IM1				X					
2				X					
3					X		X		
EG1					X		X		
2						X	X		
3								X	
EP1						X	X		
2						X	X		
3								X	
PC1							X		
2								X	

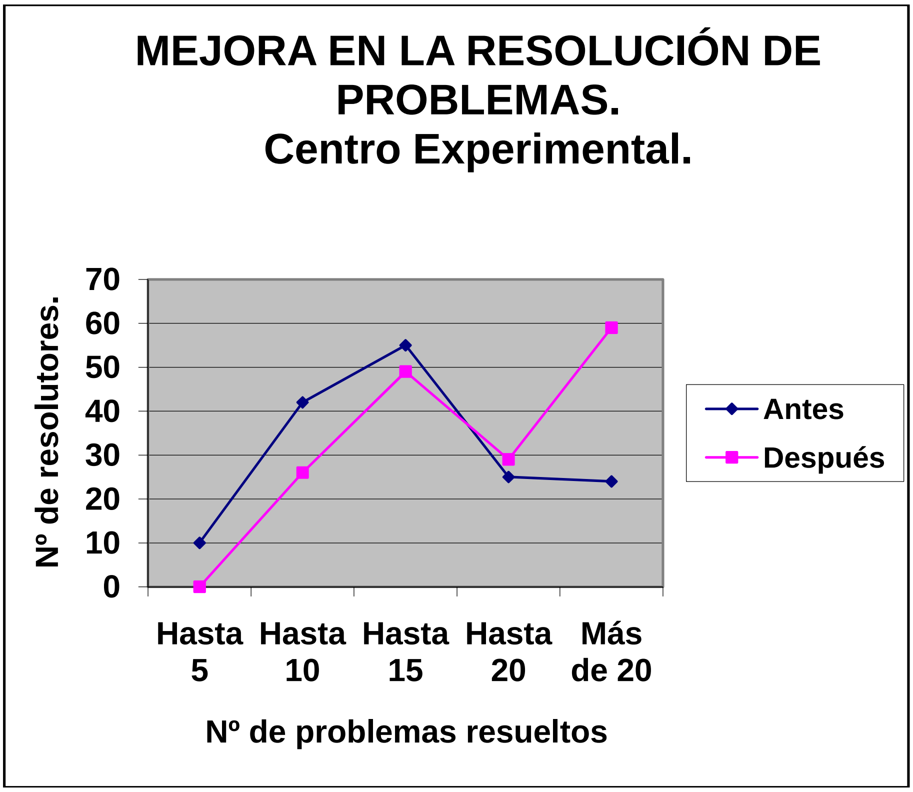
B. Básico. **S**. Suficiencia. **M**. Maestría.

LA MEJORA DE LOS RESULTADOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CUANDO SE UTILIZA EL MODELO DE LAS CATEGORÍAS SEMÁNTICAS.

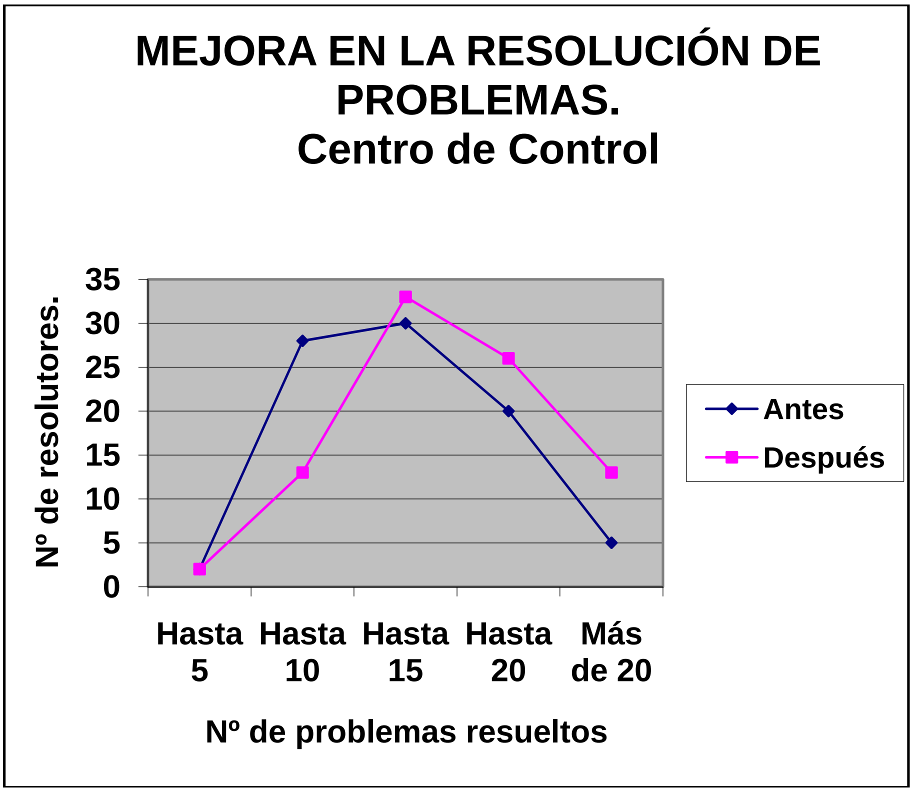
Desarrollar la metodología de aprendizaje de problemas utilizando el modelo de las categorías semánticas hace mejorar los resultados, inclusive cuando se hace desde el enfoque de una metodología tradicional. En un trabajo nuestro anterior[1] se puso de manifiesto este aspecto, y se comprobó cómo se producía esta mejora.

El gráfico que acompaña a este apartado es bastante explícito. La comprobación de los rendimientos se hizo sobre los treinta y un problemas de una etapa u operación que se han explicado. Cada una de las líneas expresa los rendimientos alcanzados por los alumnos antes del tratamiento y después del tratamiento. En el eje de abscisas se recogen las frecuencias de aciertos, definidas por la agrupación del número total de problemas resueltos por cada alumno. El eje de ordenadas muestra el número de alumnos que hay en cada una de las frecuencias. Como muestra el gráfico, las ganancias fueron altamente significativas.

Hemos adjuntado también un segundo gráfico: el correspondiente al centro que sirvió de control. Lo hemos hecho para ver que la mejora no se produce por la simple práctica o por el transcurrir del tiempo. La comparación de ambas gráficas es bastante ilustrativa.



[1] Martínez Montero, J. (1995 a). Los problemas aritméticos elementales verbales de una etapa desde el punto de vista de las categorías semánticas, en los cursos 3º, 4º y 5º de la EGB/Primaria. Tesis doctoral.


MEJORA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.
Centro de Control
Nº de resolutores.
35
30
25
20
15
10
5
0
Hasta 5
Hasta 10
Hasta 15
Hasta 20
Más de 20
Nº de problemas resueltos
Antes
Después

DOCUMENTO MODULAR ARTICULADO DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA.

ANEXO PARA EL SEGUNDO Y TERCER CICLOS.

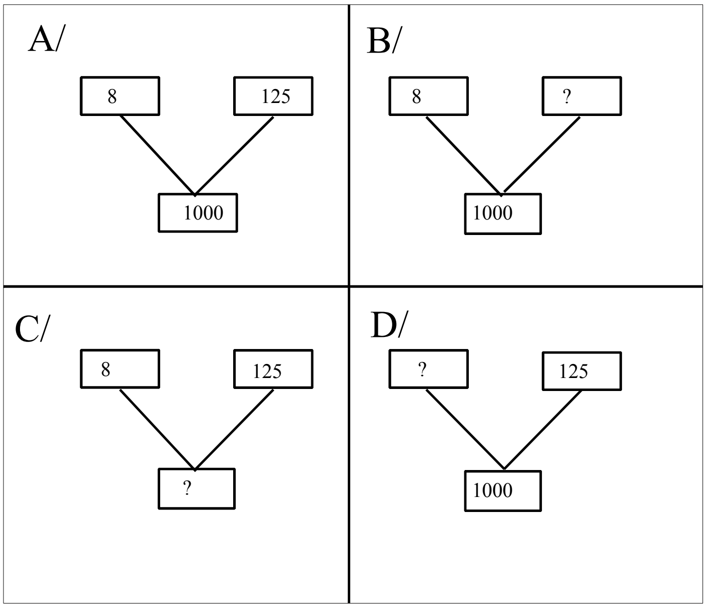
TAXONOMÍA DE PROBLEMAS DE DOS OPERACIONES[2].

[2] Se ofrece una síntesis de anteriores trabajos del autor, ya publicados.

1. INTRODUCCIÓN.

Las categorías semánticas de los P2E se establecen precisamente a partir de la componente latente u oculta, por cuanto que es ese el nudo en el que se entrelazan las dos estructuras básicas que forman el problema.

Entender las estructuras subyacentes de un P2E que justifican las diversas categorías semánticas implica conocer lo que se quiere decir cuando hablamos de estructura básica. Para ello nos vamos a ayudar del esquema nº 1.



ESQUEMA 1

La letra A presenta la estructura básica 8 x 125 = 1000. Esa estructura básica puede ser utilizada para tres tipos distintos de problemas. En la letra C puede responder a un texto como el siguiente: "Un cuaderno tiene 125 hojas. ¿Cuántas hojas tienen 8 cuadernos?" Es el problema de IM1, típico de multiplicar. Las letras B y D presentan los problemas alternativos de dividir. Pero la estructura básica que representa a los tres problemas (y de la que parten los mismos) es la que aparece en la letra A.

Sólo puede haber dos estructuras básicas: la representada en el esquema anterior, que es multiplicativa, y la estructura básica aditiva.

Pongamos algunos ejemplos de estructuras aditivas que clarifiquen un poco lo que se quiere decir (Tabla 1):

TEXTO	**OPERACIÓN**	**ESTRUCTURA BÁSICA.**
En la mesa están sentados cuatro niños. Se van dos. ¿Cuántos quedan?	4 - 2 = 2.	2 + 2 = 4.
En el autobús viajan 22 personas. En una parada suben 15 más. ¿Cuántos viajan ahora?	22 + 15 = 37.	22 + 15 = 37.

TABLA 1.

En los problemas de dos operaciones se sigue la misma sistemática. Veamos también algún ejemplo (Tabla 2):

TEXTO	OPERACIONES	ESTRUCTURAS BÁSICAS.
A/ Un corro del baile está formado por cuatro niñas y dos niños. Hay 5 corros. ¿Cuántos pequeños bailarines hay?	4 + 2 = 6. 6 x 5 = 30.	1ª/ 4 + 2 = **6**. 2ª/ **6** x 5 = 30.
B/ Hemos comprado 6 refrescos, y cada uno nos ha costado 2 euros. Tenemos que pagarlos por igual entre cuatro amigos. ¿Cuánto dinero ponemos cada uno?	6 x 2 = 12. 12 : 4 = 3.	1ª/ 6 x 2 = **12**. 2ª/ 4 x 3 = **12**.
C/ A una fiesta asistieron 20 jóvenes, 12 de los cuales fueron chicos. A las chicas les repartieron 40 flores, dándoles a cada una el mismo número de flores. ¿Cuántas flores les dieron a cada chica?	20 - 12 = 8. 40 : 8 = 5.	1ª/ 12 + **8** = 20. **2º/ 8** x 5 = 40

TABLA 2.

La estructura básica es la que da la clave para la organización de los P2E. Rogamos mucha atención en la lectura de la Tabla 2:

- En la estructura básica correspondiente a A/, el resultado de la primera estructura (6) es un dato de la segunda estructura. Ese dato constituye la componente latente.

- En la estructura básica correspondiente a B/, el resultado de la primera estructura (12) es también el resultado de la segunda estructura. Ese dato constituye la componente latente.

- En la estructura básica correspondiente a C/, uno de los datos (8) es compartido por ambas estructuras. Ese dato constituye la componente latente.

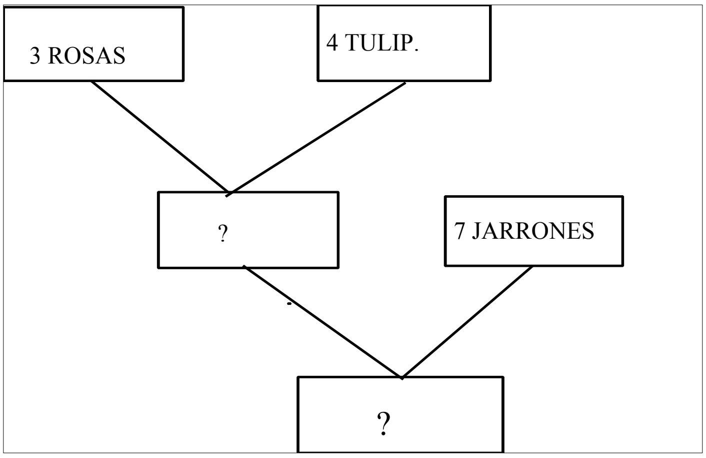
Estas tres situaciones originan las tres categorías semánticas de los P2E que se van a ver a continuación.

2. LA CATEGORÍA SEMÁNTICA DE ESTRUCTURAS BÁSICAS JERÁRQUICAS.

Es la más sencilla de todas, y por la que debe comenzar el aprendizaje de los P2E. La esencia de la misma es que la componente latente es a la vez el resultado de la primera estructura básica y un dato de la segunda estructura básica.

Partamos de un ejemplo ya clásico, representado en el Esquema 2: "**En un jarrón se ponen 3 rosas y 4 tulipanes. En total se disponen 7 jarrones en la sala. ¿Cuántas flores se necesitan?**"

Aquí hablamos de estructuras jerárquicas no en tanto haga falta resolver primero una operación y, con el dato obtenido, realizar la segunda. Eso ocurre en todos los problemas de dos operaciones. Hablamos de estructuras jerárquicas porque las estructuras básicas del problema están ordenadas lógicamente una detrás de la otra, sin posibilidad de alteración del orden. Este extremo lo veremos en las variables del problema y en algún ejemplo más.



ESQUEMA 2.

Sin alterar el elemento latente, el problema enunciado admite tres variables: la primera pregunta por el número de jarrones, la segunda por el número de tulipanes, y la tercera por el número de rosas (Tabla 3):

TEXTO	**OPERACIONES**	**ESTRUCTURAS BÁSICAS.**
A/ "**En un jarrón se ponen 3 rosas y 4 tulipanes. En todos los jarrones se ha puesto el mismo número de flores. Si en total se han necesitado 49 flores, ¿cuántos jarrones ha habido que poner?**"	4 + 3 = 7. 49 : 7 = 7.	1ª/ 4 + 3 = **7**. 2ª/ **7** x 7 = 49.
B/ "**Se han necesitado 49 flores para poner en 7 jarrones. Cada jarrón lleva tulipanes y rosas. Si tiene 4 tulipanes, ¿cuántas rosas debe llevar?**"	49 : 7 = 7. 7 - 4 = 3.	1ª/ 4 + 3 = **7**. 2ª/ **7** x 7 = 49.
C/ "**Se han necesitado 49 flores para poner en 7 jarrones. Cada jarrón lleva tulipanes y rosas. Si tiene 3 rosas, ¿cuántos tulipanes debe llevar?**"	49 : 7 = 7. 7 - 3 = 4.	1ª/ 4 + 3 = **7**. 2ª/ **7** x 7 = 49.

TABLA 3

Dispondremos de otro ejemplo, que explicamos en una tabla similar a la anterior (Tabla 4):

TEXTO	OPERACIONES	ESTRUCTURAS BÁSICAS.
"En un autobús viajan 22 hombres y 33 mujeres. El viaje cuesta 128 céntimos de euro. ¿Cuántos céntimos han pagado entre todos?"	22 + 33 = 55. 55 x 128 = 7040	1ª/ 22 + 33 = 55. 2ª/ 55 x 128 = 7040
Variante A/ "**En un autobús viajan 22 hombres y 33 mujeres. A todos les ha costado igual el billete. En total han pagado 7040 céntimos. ¿Cuántos céntimos de euro ha pagado cada uno de ellos por su billete?"**	22 + 33 = 55. 7040 : 55 = 128.	1ª/ 22 + 33 = 55. 2ª/ 55 x 128 = 7040
Variante B/ **"En un autobús viajan hombres y mujeres. Han pagado entre todos 7040 céntimos de euro, y cada billete les ha costado 128 céntimos. Si en el autobús viajan 22 hombres, ¿cuántas mujeres van en él?"**	7040 : 128 = 55. 55 - 22 = 33.	1ª/ 22 + 33 = 55. 2ª/ 55 x 128 = 7040
Variante C/ **"En un autobús viajan hombres y mujeres. Han pagado entre todos 7040 céntimos de euro, y cada billete les ha costado 128 céntimos. Si en el autobús viajan 33 mujeres, ¿cuántos hombres van en él?"**	7040 : 128 = 55. 55 - 33 = 22.	1ª/ 22 + 33 = 55. 2ª/ 55 x 128 = 7040

TABLA 4.

Para la enseñanza correctiva de la presente categoría, aconsejamos seguir la presenta pauta de progresión:

- Se debe comenzar por problemas en que las dos estructuras básicas sean aditivas. El orden debe ser:

  1º/ Coincidencia entre las operaciones y las estructuras básicas.

  2º/ Coincidencia entre la primera operación y la primera estructura básica.

  3º/ Las dos situaciones restantes.

2.1. Estructuras aditiva-aditiva.

La Tabla 5 siguiente ilustra lo dicho.

TEXTO	OPERACIONES	ESTRUCTURAS BÁSICAS.
“En un autobús viajan 22 hombres y 33 mujeres. En una parada se suben 14 niños. ¿Cuántas personas viajan ahora en el autobús?”	22 + 33 = 55. 55 + 14 = 69.	1ª/ 22 + 33 = 55. 2ª/ 55 + 14 = 69.
Variante A/ “**En un autobús viajan 22 hombres y 33 mujeres. En una parada suben algunos niños. Ahora viajan en el autobús 69 personas. ¿Cuántos niños han subido?”**	22 + 33 = 55. 69 - 55 = 14.	1ª/ 22 + 33 = 55. 2ª/ 55 + 14 = 69.
Variante B/ **“En un autobús viajan hombres y mujeres. En una parada han subido 14 niños. Ahora viajan en el autobús 69 personas. Si en el autobús van 22 hombres, ¿cuántas mujeres viajan en el mismo?”**	69 - 14 = 55.. 55 - 22 = 33.	1ª/ 22 + 33 = 55. 2ª/ 55 + 14 = 69.
Variante C/ **“En un autobús viajan hombres y mujeres. En una parada han subido 14 niños. Ahora viajan en el autobús 69 personas. Si en el autobús van 33 mujeres, ¿cuántos hombres viajan en el mismo?”**	69 - 14 = 55. 55 - 33 = 22.	1ª/ 22 + 33 = 55. 2ª/ 55 + 14 = 69.

TABLA 5.

2.2. Estructuras aditiva-multiplicativa.

El siguiente escalón debe estar en la utilización de problemas en que la primera estructura básica sea aditiva y la segunda multiplicativa. El orden de las variantes es el establecido en el punto anterior.

Es la situación contemplada en el problema anterior ya desplegado: **“En un autobús viajan 22 hombres y 33 mujeres. El viaje cuesta 128 céntimos de euro. ¿Cuántos céntimos han pagado entre todos?”**

2.3. Estructuras multiplicativa-aditiva.

El tercer nivel de dificultad debe estar en la utilización de problemas en que la primera estructura sea multiplicativa y la segunda aditiva (Tabla 6). El orden de las variantes es el establecido anteriormente.

TEXTO	OPERACIONES	ESTRUCTURAS BÁSICAS.
“3 autobuses llevan, cada uno, a 68 niños de excursión a una zona recreativa del monte. Allí se reunirán con 250 niños de otro colegio. ¿Cuántos niños se reunirán en total?”	68 x 3 = 204 204 + 250 = 454.	1ª/ 68 x 3 = 204 2ª/ 204 + 250 = 454.
A/ **“3 autobuses llevan, cada uno, a 68 niños de excursión a una zona recreativa del monte. Allí se reunirán con más niños, juntándose en total 454 chicos. ¿Cuántos chicos había cuando llegaron los de los autobuses?”**	68 x 3 = 204. 454 - 204 = 250	1ª/ 68 x 3 = 204 2ª/ 204 + 250 = 454.
B/ **“En una zona recreativa del monte se han juntado 454 chicos. 250 estaban ya allí cuando llegaron los demás en 3 autobuses. Cada autobús llevaba el mismo número de niños. ¿Cuántos viajaron en cada autobús?”**	454 - 250 = 204. 204 : 3 = 68.	1ª/ 68 x 3 = 204 2ª/ 204 + 250 = 454.
C/ **“En una zona recreativa del monte se han juntado 454 chicos. 250 estaban ya allí cuando llegaron los demás en autobuses. Cada autobús llevaba el mismo número de niños: 68. ¿Cuántos autobuses llegaron?”**	454 - 250 = 204. 204 : 68 = 3.	1ª/ 68 x 3 = 204 2ª/ 204 + 250 = 454.

TABLA 6.

2.4. Estructuras multiplicativa-multiplicativa.

El cuarto y último nivel de dificultad debe estar en la utilización de problemas en que las dos estructuras básicas sean multiplicativas (Tabla 7). El orden de las variantes es el establecido anteriormente.

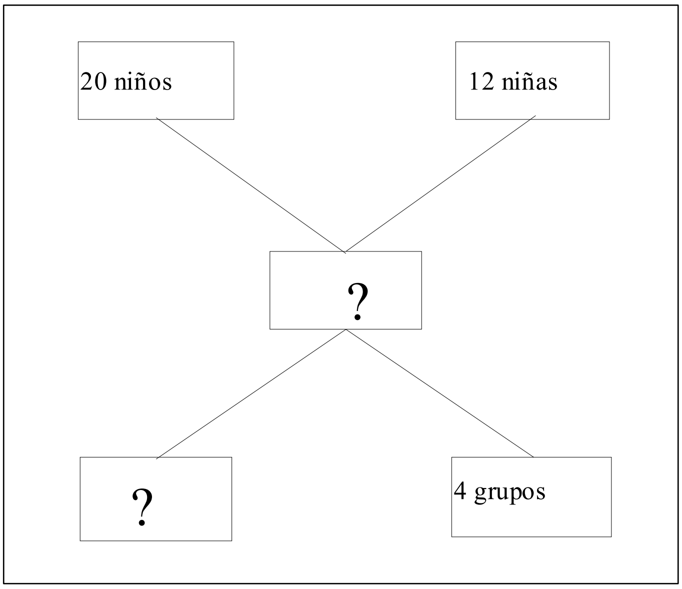
TEXTO	OPERACIONES	ESTRUCTURAS BÁSICAS.
“En cada página de un álbum de cromos se pueden pegar 8 cromos. El álbum tiene 32 páginas. Cada cromo cuesta 12 céntimos. ¿Cuántos céntimos de euro cuesta completar todo el álbum?”	32 x 8 = 256. 256 x 12 = 3072	1ª/ 32 x 8 = 256. 2ª/ 256 x 12 = 3072
A/ **“En cada página de un álbum de cromos se pueden pegar 8 cromos. El álbum tiene 32 páginas. Todos los cromos cuestan 3072 céntimos de euro. ¿Cuánto vale un cromo?”**	32 x 8 = 256. 3072 : 256 = 12.	1ª/ 32 x 8 = 256. 2ª/ 256 x 12 = 3072
B/ **“Todos los cromos necesarios para llenar un álbum cuestan 3072 céntimos de euros. Cada cromo vale 12 céntimos. Si el álbum tiene 32 páginas, y en todas se puede pegar el mismo número de cromos, ¿cuántos cromos se pueden pegar en cada página?”**	3072 : 12 = 256. 256 : 32 = 8.	1ª/ 32 x 8 = 256. 2ª/ 256 x 12 = 3072
C/ **“Todos los cromos necesarios para llenar un álbum cuestan 3072 céntimos de euros. Cada cromo vale 12 céntimos. Si en cada página se pueden pegar 8 cromos, ¿cuántas páginas tiene el álbum?”**	3072 : 12 = 256. 256 : 8 = 32.	1ª/ 32 x 8 = 256. 2ª/ 256 x 12 = 3072

TABLA 7.

3. LA CATEGORÍA SEMÁNTICA DE ESTRUCTURAS BÁSICAS DE COMPARTIR EL TODO.

A la categoría de estructuras jerárquicas le sigue, en orden de dificultad, la que está formada por las estructuras básicas que comparten el todo o tienen el mismo resultado. Partamos del ejemplo del Esquema 3:

“**En un aula de Secundaria hay 20 niños y 12 niñas. Forman cuatro equipos, todos con el mismo número de integrantes. ¿Cuántos alumnos hay en cada equipo?**”



ESQUEMA 3

En el caso que nos ocupa, las estructuras básicas son 20 + 12 = 32, y 8 x 4 = 32. Por la estructura de compartir el resultado, no hay ninguna formulación en que se identifiquen las dos estructuras con las operaciones. El problema original y las variantes posibles son las que siguen (Tabla 8):

TEXTO	OPERACIONES	ESTRUCTURAS BÁSICAS.
A/ “**En un aula de Secundaria hay 20 niños y 12 niñas. Forman 4 equipos, todos con el mismo número de integrantes. ¿Cuántos alumnos hay en cada equipo?**”	20 + 12 = 32. 32 : 4 = 8.	1ª/ 20 + 12 = 32. 2ª/ 8 x 4 = 32.
B/ “**En un aula de Secundaria hay 20 niños y 12 niñas. Forman equipos, todos con 8 integrantes. ¿Cuántos equipos se pueden formar?**”	20 + 12 = 32. 32 : 8 = 4.	1ª/ 20 + 12 = 32. 2ª/ 8 x 4 = 32.
C/ **“En un aula de Secundaria se han formado 4 equipos de 8 miembros, entre chicos y chicas. Si hay 20 chicos, ¿cuántas chicas hay?”**	4 x 8 = 32. 32 - 20 = 12.	1ª/ 20 + 12 = 32. 2ª/ 8 x 4 = 32.
D/ **“En un aula de Secundaria se**	4 x 8 = 32.	1ª/ 20 + 12 = 32.

han formado 4 equipos de 8 miembros, entre chicos y chicas. Si hay 12 chicas, ¿cuántos chicos hay?”	32 - 12 = 20.	2ª/ 8 x 4 = 32.

TABLA 8.

Esta categoría admite también las combinaciones de estructuras básicas que señalamos en la anterior: aditiva-aditiva; aditiva-multiplicativa; multiplicativa-aditiva; y, por último, multiplicativa-multiplicativa.

Los ejemplos y el orden de progresión son los que se explicitan en los apartados siguientes.

3.1. Estructuras aditiva-aditiva.

Se muestra en la Tabla 9.

TEXTO	OPERACIONES	ESTRUCTURAS BÁSICAS.
“Hay 12 bombones de chocolate negro y 16 de chocolate blanco. Hay también caramelos rellenos y sin rellenar. Si el número de caramelos es igual al de bombones, y hay 7 caramelos rellenos, ¿cuántos hay sin rellenar?”	12 + 16 = 28. 28 - 7 = 21.	1ª/ 12 + 16 = 28. 2ª/ 21 + 7 = 28.
A/ **“Hay 12 bombones de chocolate negro y 16 de chocolate blanco. Hay también caramelos rellenos y sin rellenar. Si el número de caramelos es igual al de bombones, y hay 21 caramelos sin rellenar, ¿cuántos hay rellenos?”**	12 + 16 = 28. 28 - 21 = 7.	1ª/ 12 + 16 = 28. 2ª/ 21 + 7 = 28.
B/ **“Hay 21 caramelos sin rellenar y 7 rellenos. Hay también el mismo número de bombones de chocolate negro y de chocolate blanco. Si hay 12 bombones de chocolate negro, ¿cuántos hay de chocolate blanco?”**	21 + 7 = 28. 28 - 12 = 16.	1ª/ 12 + 16 = 28. 2ª/ 21 + 7 = 28.
B/ **“Hay 21 caramelos sin rellenar y 7 rellenos. Hay también el mismo número de bombones de chocolate negro y de chocolate blanco. Si hay 16 bombones de chocolate blanco, ¿cuántos hay de chocolate negro?”**	21 + 7 = 28. 28 - 12 = 16.	1ª/ 12 + 16 = 28. 2ª/ 21 + 7 = 28.

TABLA 9.

3.2. Estructuras aditiva-multiplicativa.

Es la que se recoge en el ejemplo inicial. A él remitimos al lector.

3.3. Estructuras multiplicativa-aditiva.

Sería una estructura idéntica a la recogida en el ejemplo inicial, alterando el orden de aparición de las estructuras básicas:

Aditiva-multiplicativa: "**En un aula de Secundaria hay 20 niños y 12 niñas. Forman cuatro equipos, todos con el mismo número de integrantes. ¿Cuántos alumnos hay en cada equipo?**"

Multiplicativa-Aditiva: **"En un aula de Secundaria hay formados 4 equipos, integrados cada uno de ellos por 8 alumnos. Si en la clase hay 20 chicos, ¿cuántas chicas hay?"**

Por ello, no creemos necesario volver a repetir lo que ya se ha expresado.

3.4. Estructuras multiplicativa-multiplicativa.

Es la que se refleja en la Tabla 10.

TEXTO	**OPERACIONES**	**ESTRUCTURAS BÁSICAS.**
"Un equipo de fútbol tiene 11 jugadores. Uno de baloncesto tiene 5. ¿Cuántos equipos de baloncesto se pueden formar con el número de jugadores que tienen 20 equipos de fútbol?"	11 x 20 = 220. 220 : 5 = 44.	1ª/ 11 x 20 = 220. 2ª/ 24 x 5 = 220.
A/ **"Un equipo de fútbol tiene 11 jugadores. ¿Cuántos jugadores tiene un equipo de baloncesto si con el número de jugadores que tienen 20 equipos de fútbol se pueden formar 45 equipos de baloncesto?"**	1 x 20 = 220. 220 : 44 = 5.	1ª/ 11 x 20 = 220. 2ª/ 24 x 5 = 220.
B/ **"Un equipo de fútbol tiene 11 jugadores. Uno de baloncesto tiene 5. ¿Cuántos equipos de fútbol se pueden formar con el número de jugadores que tienen 44 equipos de baloncesto?"**	44 x 5 = 220. 220 : 11 = 20.	1ª/ 11 x 20 = 220. 2ª/ 24 x 5 = 220.

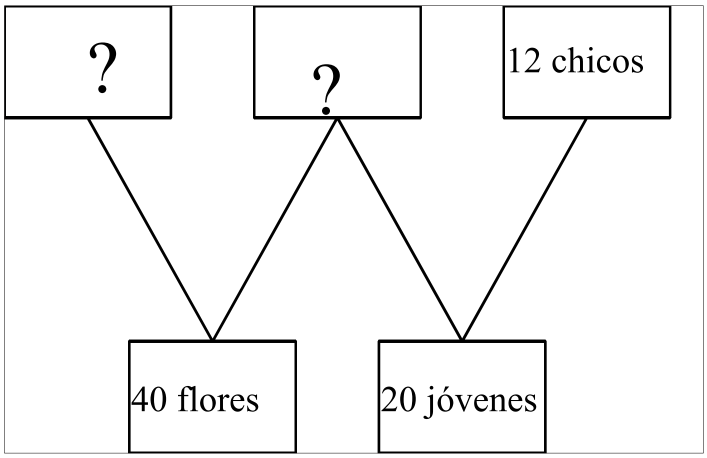
C/ **“Un equipo de baloncesto tiene 5 jugadores. ¿Cuántos jugadores tiene un equipo de fútbol si con el número de jugadores que tienen 44 equipos de baloncesto se pueden formar 20 equipos de fútbol?”**	44 x 5 = 220. 220 : 11 = 20.	1ª/ 11 x 20 = 220. 2ª/ 24 x 5 = 220.

TABLA 10.

<u>4. LA CATEGORÍA SEMÁNTICA DE ESTRUCTURAS BÁSICAS DE COMPARTIR UNA PARTE.</u>

1Es la categoría más difícil de todas, y se caracteriza porque las estructuras básicas que la componen tienen uno de los datos en común. El Esquema 4 nos muestra un ejemplo:

“A una fiesta asistieron 20 jóvenes, 12 de los cuales fueron chicos. A las chicas les repartieron 40 flores, dándoles a cada una el mismo número de flores. ¿Cuántas flores les dieron a cada una?”



ESQUEMA 4.

Admite, como los modelos anteriores, las combinaciones de estructuras aditiva-aditiva, aditiva-multiplicativa; multiplicativa-aditiva, y, finalmente, multiplicativa-multiplicativa.

Siguiendo los modelos anteriores, tenemos las siguientes tablas de progresión en la dificultades de estos problemas:

4.1. Estructuras aditiva-aditiva.

Se muestra en la Tabla 11.

TEXTO	OPERACIONES	ESTRUCTURAS BÁSICAS.
“Una granja tiene 14 aves, entre gansos y patos. Tiene 6 gansos. En otra granja tienen 9 ocas y los mismos patos que la primera granja. ¿Cuántas aves hay en esta segunda granja?”	14 - 6 = 8. 9 + 8 = 17.	1ª/ 6 + 8 = 14. 2ª/ 9 + 8 = 17.
A/ **“Una granja tiene 6 gansos y patos. En otra granja tienen 17 aves: 9 ocas y los mismos patos que la primera granja. ¿Cuántas aves hay en la primera granja?”**	17 - 9 = 8 . 6 + 8.	1ª/ 6 + 8 = 14. 2ª/ 9 + 8 = 17.
B/ **“Una granja tiene 14 aves, entre gansos y patos. En otra granja hay 17 aves: tienen 9 ocas y los mismos patos que la primera granja. ¿Cuántos gansos hay en la primera granja?”**	17 - 9 = 8. 14 - 8 = 6.	1ª/ 6 + 8 = 14. 2ª/ 9 + 8 = 17.
C/ **“Una granja tiene 14 aves, entre gansos y patos. Tiene 6 gansos. En otra granja tienen ocas y los mismos patos que la primera granja. ¿Cuántas ocas hay en esta segunda granja si en total tienen 17 aves?”**	14 - 6 = 8. 17 - 8 = 9.	1ª/ 6 + 8 = 14. 2ª/ 9 + 8 = 17.

TABLA 11.

4.2. Estructuras aditiva-multiplicativa.

Es la que se muestra en la Tabla 12.

TEXTO	OPERACIONES	ESTRUCTURAS BÁSICAS.
“A una fiesta asistieron 20 jóvenes, 12 de los cuales fueron chicos. A las chicas les repartieron 40 flores, dándoles a cada una el mismo número de flores. ¿Cuántas flores les dieron a cada una?”	20 - 12 = 8. 40 : 8 = 5.	1ª/ 12 + 8 = 20. 2ª/ 8 x 5 = 40.
2º/ **“A una fiesta asistieron 20 jóvenes, 12 de los cuales fueron chicos. A cada chica le dieron 5 rosas. ¿Cuántas floras les dieron en total?”.**	20 - 12 = 8. 8 x 5 = 40.	1ª/ 12 + 8 = 20. 2ª/ 8 x 5 = 40.
3º/ “En una fiesta a la que asistieron 20 personas entre chicos y chicas, les repartieron a las chicas 40 flores, dándoles a cada una 5. ¿Cuántos chicos asistieron a la fiesta?”	40 : 5 = 8. 20 - 8 = 12.	1ª/ 12 + 8 = 20. 2ª/ 8 x 5 = 40.
4º/ **“A una fiesta a la que asistieron chicos y chicas, les repartieron a las chicas 40 flores, dándoles a cada una 5. Si asistieron 12 chicos, ¿cuántas personas asistieron en total?”**	40 : 5 = 8. 12 + 8 = 20.	1ª/ 12 + 8 = 20. 2ª/ 8 x 5 = 40.

TABLA 12.

4.3. Estructuras multiplicativa-aditiva.

Sería una estructura idéntica a la recogida en el ejemplo inicial, alterando el orden de aparición de las estructuras básicas:

Aditiva-multiplicativa: **"A una fiesta asistieron 20 jóvenes, 12 de los cuales fueron chicos. A las chicas les repartieron 40 flores, dándoles a cada una el mismo número de flores. ¿Cuántas flores les dieron a cada una?"**

Multiplicativa-Aditiva: **"En una fiesta repartieron 40 flores entre las chicas que asistieron a la misma. A cada una de ellas le dieron 5 flores. Estuvieron en la fiesta 20 personas, contando a chicos y a chicas. ¿Cuántos chicos asistieron a la fiesta?"**

Por ello, no creemos necesario volver a repetir lo que ya se ha expresado.

4.4. Estructuras multiplicativa-multiplicativa.

Se muestra en la Tabla 14.

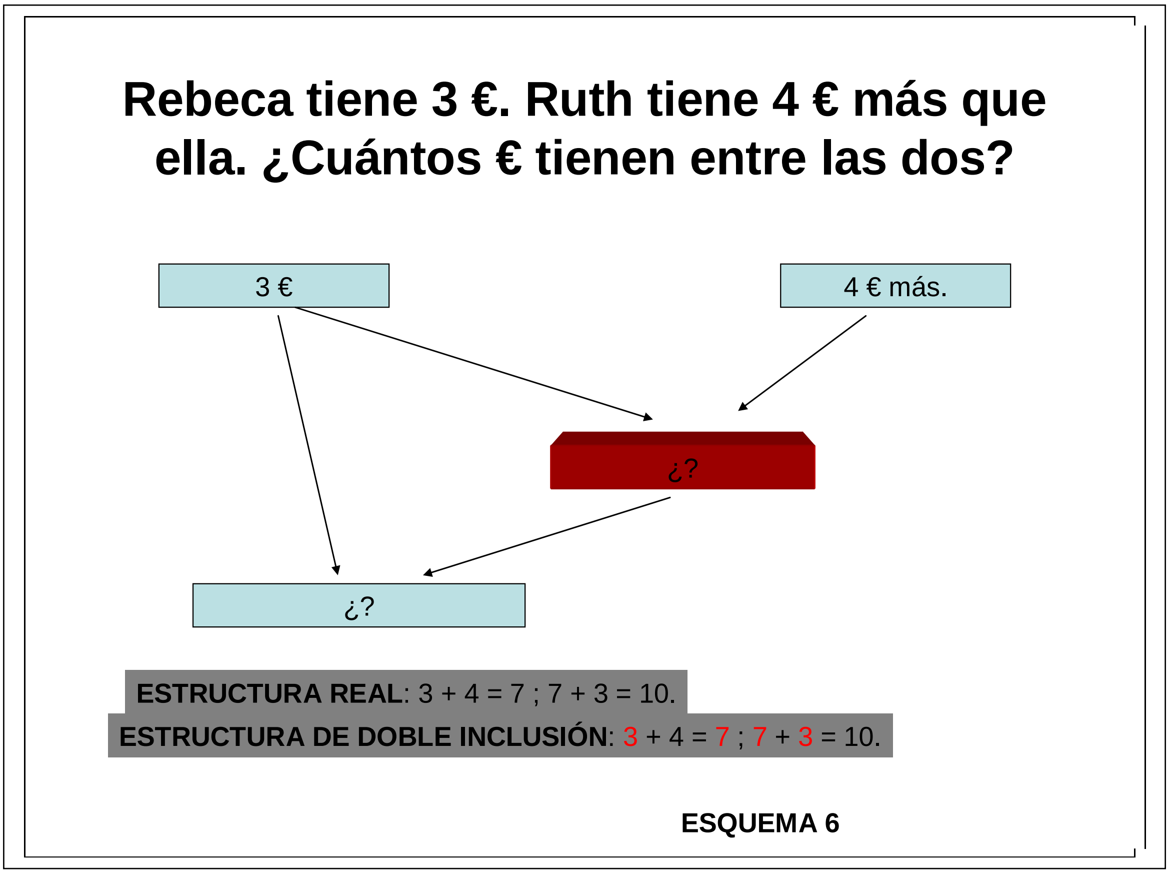
TEXTO	OPERACIONES	ESTRUCTURAS BÁSICAS.
"8 niños tienen el mismo dinero, y reúnen entre todos 48 euros. Si hubiera 10 niños, ¿cuántos euros tendrían entre todos?"	48 : 8 = 6. 10 x 6 = 60.	1ª/ 8 x 6 = 48. 2ª/ 10 x 6 = 60.
A/ **"8 niños tienen el mismo dinero, y reúnen entre todos 48 euros**. **Vienen más niños con el mismo dinero, y ahora reunen entre todos 60 euros, ¿cuántos niños hay ahora?"**	48 : 8 = 6. 60 : 6 = 10.	1ª/ 8 x 6 = 48. 2ª/ 10 x 6 = 60.
B/ **"10 niños tienen el mismo dinero, y reúnen entre todos 60 euros. Si hubiera 8 niños, ¿cuántos euros tendrían entre todos?"**	60 : 10 = 6. 6 x 8 = 48.	1ª/ 8 x 6 = 48. 2ª/ 10 x 6 = 60.
C/ **"10 niños tienen el mismo dinero, y reúnen entre todos 60 euros. Se han ido algunos niños, y ahora reúnen entre todos 48 euros. ¿Cuántos niños han quedado?"**	60 : 10 = 6. 48 : 6 = 8.	1ª/ 8 x 6 = 48. 2ª/ 10 x 6 = 60.

TABLA 14.

5. LA CATEGORÍA SEMÁNTICA DE ESTRUCTURAS BÁSICAS DE DOBLE INCLUSIÓN.

Es una categoría muy particular, tanto por el número de datos que aparecen en el problema (dos) como por la difícil solución matemática de alguno de sus problema derivados.

En el esquema 6 aparece esta nueva estructura. Su enunciado es como sigue:



“Rebeca tiene 3 €. Ruth tiene 4 € más que ella. ¿Cuánto dinero tienen entre las dos?”.

La primera característica que presenta es que no tiene tres datos, sino únicamente dos. Se introduce una proposición relacional a partir de la cual se establece la pregunta oculta. Al no haber un tercer dato, el segundo problema se compone con el resultado de la pregunta oculta y con uno de los datos que ya ha entrado en el primer problema. Por eso se llama de doble inclusión: los tres euros de Rebeca entran en el primer y en el segundo problema.

Esta categoría presenta las tres variables que han aparecido en las anteriores, resultantes de combinar entre sí las estructuras aditivas y multiplicativas. Al haber sólo dos datos, sólo hay dos variantes por cada modelo básico. La última variante es muy complicada, y requiere un alto grado de conceptualización. Por ello sólo se le debería plantear a los alumnos más brillantes.

Los apartados siguientes muestran la graduación que se ha de llevar en cada una de las variantes.

5.1. Estructuras aditiva-aditiva.

El desarrollo de la misma se recoge en la Tabla 15.

TEXTO	OPERACIONES	ESTRUCTURAS BÁSICAS
“Rebeca tiene 3 €. Ruth tiene 4 € más que ella. ¿Cuánto dinero tienen entre las dos?”	3 + 4 = 7 3 + 7 = 10	3 + 4 = 7 3 + 7 = 10
“Rebeca tiene 3 €, y entre ella y Ruth tienen 10. ¿Cuántos € más que Rebeca tiene Ruth?”	10 – 3 = 7 7 – 3 = 4.	3 + 4 = 7 3 + 7 = 10
“Ruth tiene 4 € más que Rebeca. Entre las dos tienen 11 €. ¿Cuántos tiene Rebeca?”	11 – 4 = 7 7 – 4 = 3.	3 + 4 = 7 3 + 7 = 10

TABLA 15.

5.2. Estructuras multiplicativa-aditiva.

El desarrollo de la misma se recoge en la Tabla 16.

TEXTO	OPERACIONES	ESTRUCTURAS BÁSICAS
“Rebeca tiene 3 €. Ruth tiene 4 veces más que ella. ¿Cuánto dinero tienen entre las dos?”	3 x 4 = 12 3 + 12 = 15.	3 x 4 = 12 3 + 12 = 15.
“Rebeca tiene 3 €, y entre ella y Ruth tienen 15. ¿Cuántos veces más € que Rebeca tiene Ruth?”	15 – 3 = 12 12 : 3 = 4.	3 x 4 = 12 3 + 12 = 15.
“Ruth tiene 4 veces más dinero que Rebeca. Entre las dos tienen 15 €. Cuánto dinero tiene Rebeca?”	4 partes + 1 parte = 5 15 : 5 = 3	3 x 4 = 12 3 + 12 = 15.

TABLA 16.

5.3. Estructuras multiplicativa-multiplicativa..

El desarrollo de la misma se recoge en la Tabla 17.

TEXTO	OPERACIONES	ESTRUCTURAS BÁSICAS
“Rebeca tiene 3 faldas. Andrea tiene 3 veces más blusas que el número de faldas que tiene Rebeca. ¿De cuántas formas distintas se podrían vestir si se prestaran una a otra las faldas y las blusas?”	3 x 3 = 9 3 x 9 = 27	3 x 3 = 9 3 x 9 = 27.
“Rebeca tiene 3 faldas. Si las combina con las blusas que tiene Ruth se puede vestir de 27 formas distintas. ¿Cuántas veces más blusas tiene Ruth que faldas Rebeca?”	27 : 3 = 9 9 : 3 = 3	3 x 3 = 9 3 x 9 = 27
“Ruth tiene 3 veces más blusas que faldas tiene Rebeca. Si las combina con las faldas que tiene Rebeca se puede vestir de 27 formas distintas. ¿Cuántas faldas tiene Rebeca?”	27 : 3 = 9 9 : 3 = 3.	3 x 3 = 9 3 x 9 = 27

TABLA 17.

6. ALGUNOS RESULTADOS DE LA UTILIZACIÓN DE LAS CATEGORÍAS SEMÁNTICAS EN LOS CENTROS ESCOLARES[3].

El trabajo de García Romero (2009) muestra cómo el empleo de las categorías semánticas en los problemas de dos operaciones mejora significativamente los resultados que obtienen los alumnos en la resolución de problemas. En el mismo se da cuenta de los resultados que se obtienen en resolución de problemas de dos operaciones en dos colegios, de los cuales uno emplea la metodología tradicional, y el otro planifica el proceso conforme al tratamiento de las categorías semánticas.

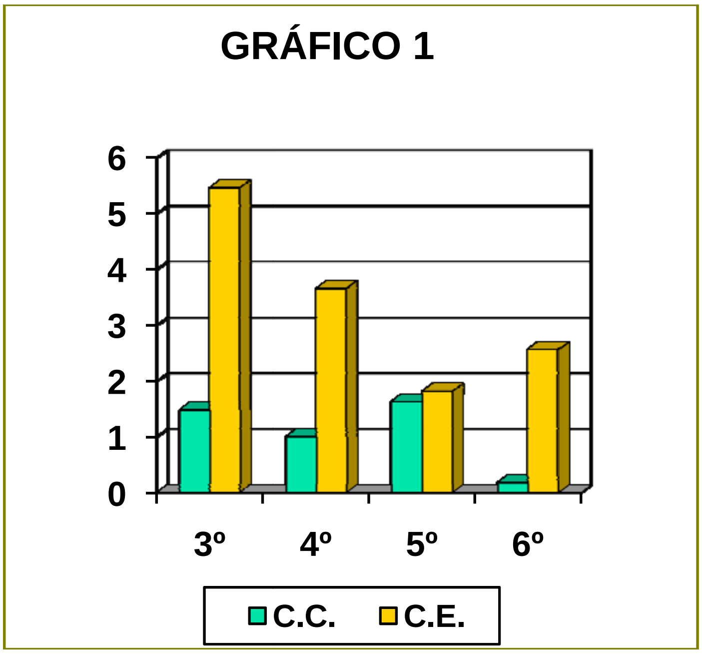


GRÁFICO 1

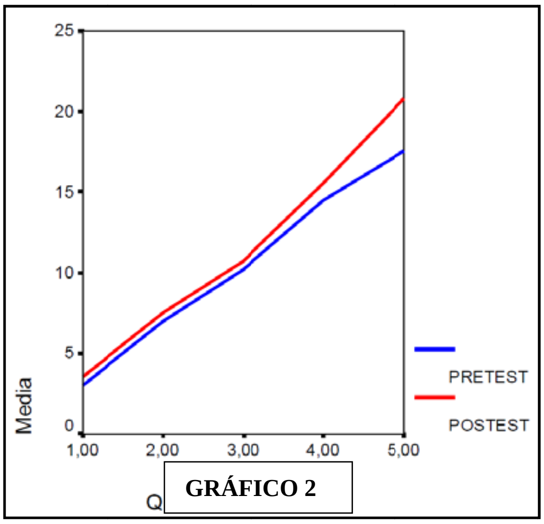


GRÁFICO 2

El Gráfico 1 muestra la ganancia, en número de problemas bien resueltos, del centro que ha seguido la metodología (Colegio experimental -C.E.-) respecto al que no la ha seguido (Colegio de control -.C.C.-). Las diferencias, salvo en 5º Curso, son muy significativas.

Para el propósito de este libro, que es cómo solventar las dificultades que tienen con el cálculo y los problemas los alumnos menos dotados, es muy importante la información que aparece en los gráficos 2 y 3.

El Gráfico 2 representa la ganancia en

[3] El presente apartado recoge los datos de García Romero, I. (2009). Los problemas aritméticos de estructura aditiva de dos operaciones en Educación Primaria. Cádiz. Tesis Doctoral.

resolución de problemas que ha experimentado el Colegio de Control durante el período de entrenamiento. Las ganancias se han desglosado en quintiles. Esto es, los ciento cincuenta y siete alumnos de los Ciclos Segundo y Tercero de este centro se han distribuido en cinco grados o niveles, estando ocupado el primero por los alumnos de mejor rendimiento y el último por los que ofrecen los peores resultados. El gráfico, respecto a los resultados de partida (Pretest) muestra claramente que únicamente experimenta ganancia el alumnado que ocupa el primer quintil. Esto, es, que la metodología tradicional apenas provoca mejora significativa en el 20 % de los alumnos más capaces.

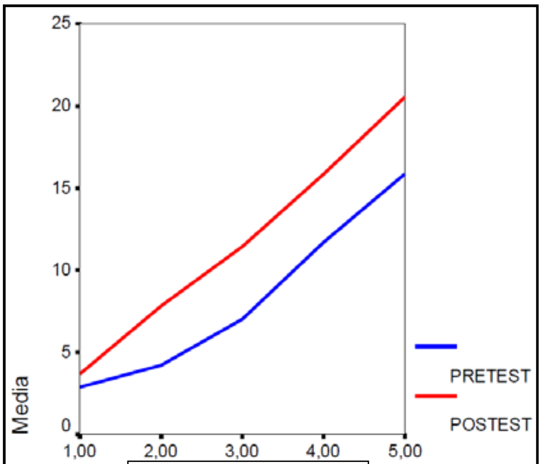


GRÁFICO 3

El Gráfico 3 presenta otro panorama. Son los resultados del Colegio experimental expresados en el mismo formato. Claramente se ve cómo la mejora de rendimiento en la resolución de problemas es muy pequeña en los treinta y ocho alumnos que componen el último quintil (aunque algo mayor que el mismo escalón del Colegio de control), pero es significativa en los ciento cincuenta alumnos restantes. Es decir, que el empleo de esta metodología no sólo supone aumento de rendimiento y mejoras de resultados en el veinte por ciento superior del alumnado, sino que de la misma se aprovecha en igual medida el ochenta por ciento de los chicos y las chicas de este centro.

DOCUMENTO MODULAR ARTICULADO DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA.

ANEXO PARA EL TERCER CICLO.

EJEMPLOS PARA LA PRÁCTICA DE LA NUMERACIÓN EN CUALQUIER BASE.

Los contenidos matemáticos del Tercer Ciclo incluyen el estudio de sistemas de numeración distintos al de base decimal. Es este un aprendizaje casi guadianesco, porque ha ido apareciendo y desapareciendo de los currícula en función de los enfoque teóricos o del planteamiento más o menos práctico que se le quería dar a la matemática escolar.

Trabajar con el alumnado del Tercer Ciclo la numeración en cualquier base presenta indudables ventajas, y especialmente si en el cálculo ordinario se ha seguido una metodología tradicional. Para no extendernos demasiado, vamos a señalar dos de ellas.

La primera apunta a la consecución de un mejor aprendizaje y conceptualización del sistema de numeración. Si sólo se emplea la base diez, es posible que no se llegue a comprender bien todas las posibilidades y riqueza conceptual del sistema general. El sistema de numeración es algo más general que su única utilización de la base diez. Desde el punto de vista de la educación formal, es más conveniente y se facilita más el instrumento si se estudia en el marco del sistema general que en una única de sus aplicaciones.

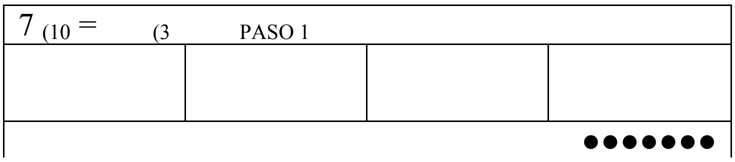
La segunda apunta a las ventajas que ofrecen las escalas y los modelos. El sistema de numeración en base dos o tres permite el establecimiento de los mismos tipos de unidades y las mismas operaciones que el sistema de base diez. Eso sí, a una escala mucho más pequeña. Y la ventaja estriba, precisamente, en ser un modelo menor. ¿Por qué? Porque va a ampliar las posibilidades de manipulación del alumno y, por ende, la capacidad de construcción empírica de todo lo que hace. Para llegar a las unidades de cuarto orden en la numeración decimal hay que acudir a modelos. No se pueden construir con objetos por su enorme tamaño. En base tres, sin embargo, se llega a ellas con veintisiete objetos, y en base dos con ocho. Multiplicaciones y divisiones complejas son incontrolables e incontrastables por los alumnos con su experiencia. Sin embargo, con bases pequeñas puede ir verificándolas paso a paso. Si nos marcamos como objetivo que el alumnado entienda lo que hace, no cabe duda de que la numeración en base diez pone las cosas muy difíciles. Por eso emplear modelos más pequeños ayuda mucho. En el caso del uso de la metodología tradicional del cálculo, o se utilizan bases de numeración más pequeñas o no hay ninguna posibilidad de que niños y niñas entiendan lo que hacen cuando realizan las operaciones básicas.

La metodología que se propone es muy intuitiva. Se basa en los modelos que estableció un matemático belga (Papy), modificándolos y adaptándolos. Sólo requiere de fichas y de un soporte cuadriculado de papel o cartulina, que puede tener más o menos cuadros en función del tipo de cálculo que se quiera hacer. Pero mejor que explicarlo con palabras es hacerlo con ejemplos.

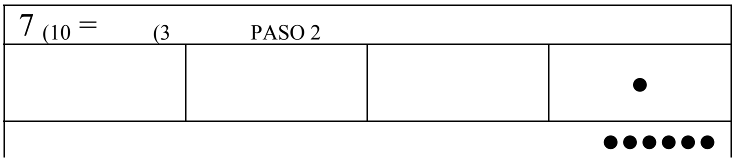
I. LA NUMERACIÓN.

1. De base diez a cualquier base.

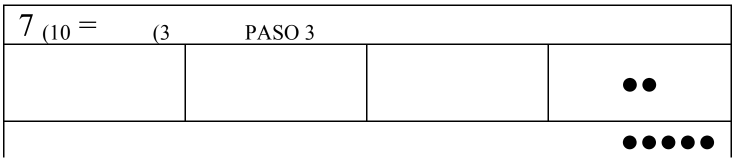
PRIMER EJEMPLO.



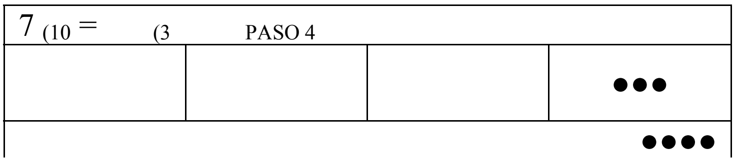
Hay que pasar a representar 7 unidades en base 3. Se dispone el formato y las 7 unidades. Encima se indica la transformación.



Introducimos la primera unidad.

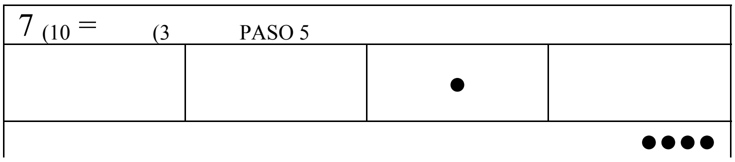


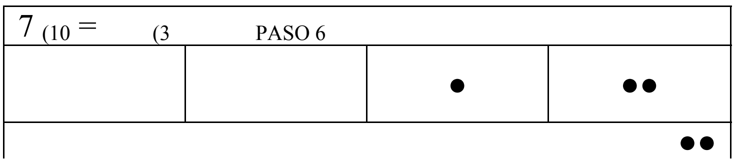
Se introduce la segunda unidad.



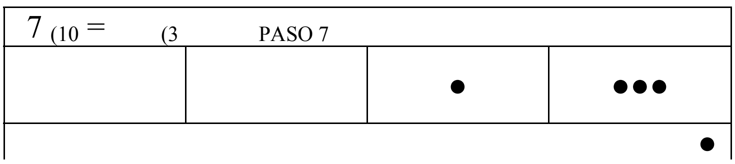
Se introduce la tercera unidad. ¡Atención! Estamos en base tres.

Por ello, tres unidades en un orden se convierten en una en el orden superior. Se ha pasado una ficha y se han eliminado las dos restantes de la casilla del orden de las unidades.

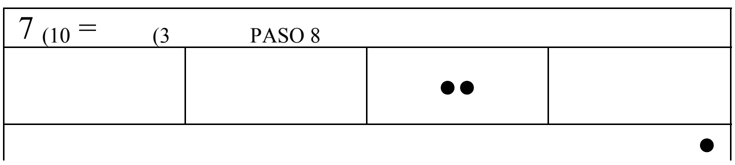




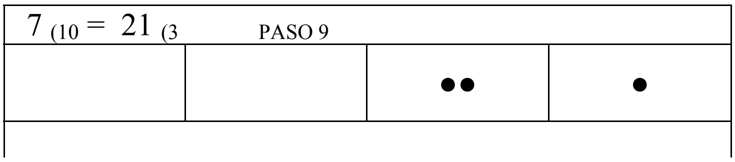
Se han introducido dos nuevas fichas. Sólo quedan dos por introducir. En total ya se han introducido 5.



Introducimos una nueva ficha. ¡Ojo! Volvemos a tener tres en la casilla de las unidades.



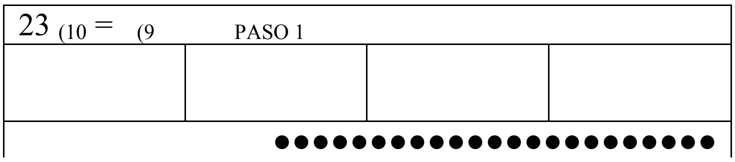
Se ha obrado como en el paso 5. Se ha pasado una unidad al orden superior y se han quitado las dos restantes.



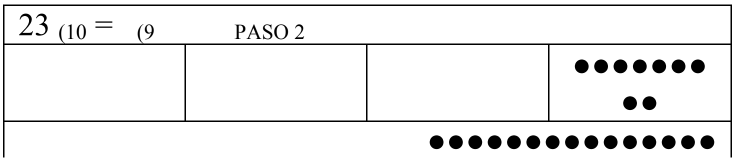
Ya se han convertido las siete unidades. En base tres son dos unidades de orden superior y otra en su orden: $21_{(3}$.

SEGUNDO EJEMPLO.

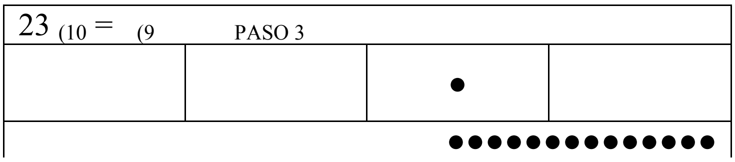
Vamos a convertir 23 $_{(10}$ en base 9.



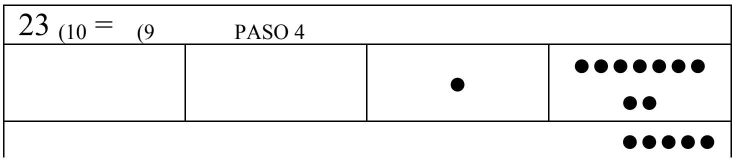
Se dispone el soporte. Se recuerda: cuando se reúnan nueve en una casilla, se pasa una al orden superior y se eliminan las demás.



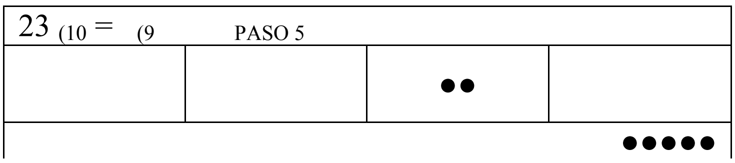
Para no actuar con tanta parsimonia, introducimos de nueve en nueve. Ya se está en condiciones de convertir las nueve en una unidad de segundo orden.



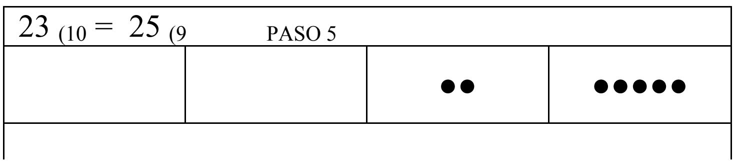
Es lo que se hace en este paso.



Hemos vuelto a introducir nueve.

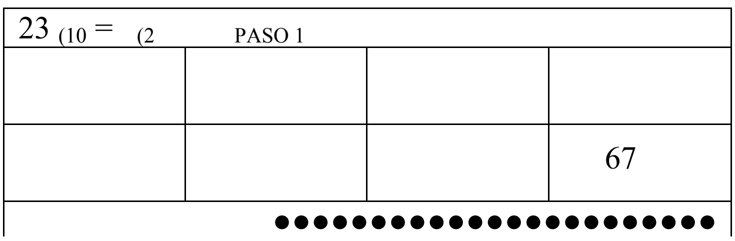


Sustituimos las nueve del primer orden por una más en el segundo orden.

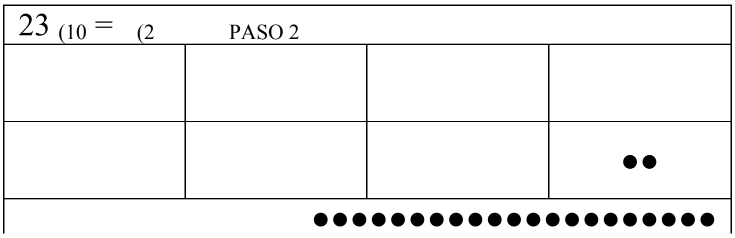


Introducimos las cinco restantes. Ya no hay más para introducir y hemos acabado.

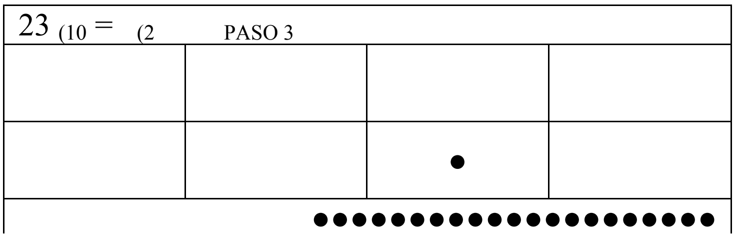
Cuando se trabaja con base dos, que es muy pequeña, el soporte tiene que tener más casillas cuando el número sea superior a quince. En el siguiente ejemplo, vamos a pasar el número anterior (23) a base dos.



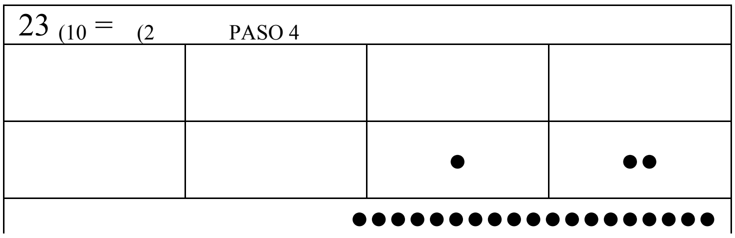
Se disponen las veintitrés unidades.



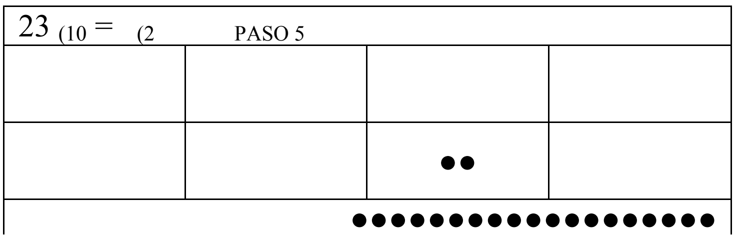
Se pasan las dos primeras. Ya hay que convertirlas en una en el orden superior.



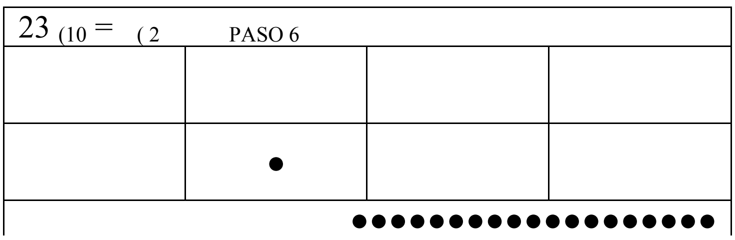
Ya se ha dado el paso.



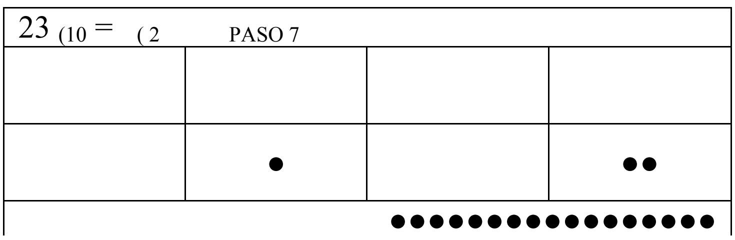
Volvemos a introducir dos.



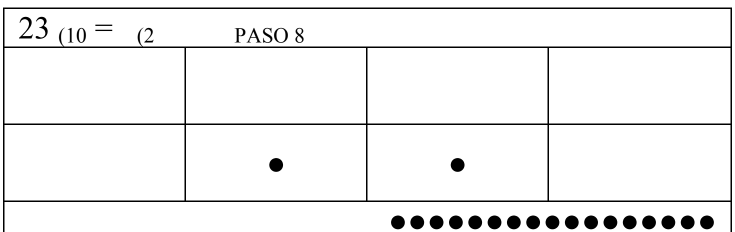
Al hacer el ajuste, nos encontramos con dos en el segundo orden.



Las convertimos en una en el orden superior (que ya es el tercero).



Se vuelven a introducir dos.



Se hace el ajuste.

23 (10 = (2 PASO 9			
	●	●	●●

●●●●●●●●●●●●●●●

Se vuelven a introducir dos.

23 (10 = (2 PASO 10			
	●	●●	

●●●●●●●●●●●●●●●

Hacemos un primer ajuste.

23 (10 = (2 PASO 11			
	●●		

●●●●●●●●●●●●●●●

Hacemos un segundo ajuste.

23 (10 = (2 PASO 12			
●			

●●●●●●●●●●●●●●●

Y un tercer ajuste. Ya tenemos una unidad de cuarto orden.

23 (10 = (2 PASO 13			
●		●	

●●●●●●●●●●●●●

Se han introducido dos, y se han ajustado.

23 (10 = (2 PASO 14			
●	●		

●●●●●●●●●●●

Se han introducido dos, y se han hecho los dos ajustes que se mostraron en los pasos anteriores.

23 (10 = (2 PASO 15			
●	●	●	

●●●●●●●●●

Se introducen otras dos y se ajusta. Los pasos siguientes los haremos más despacio.

$23_{(10} = \quad_{(2}$ PASO 16			
●	●	●	●●
			●●●●●●●

Se introducen dos.

$23_{(10} = \quad_{(2}$ PASO 17			
●	●	●●	
			●●●●●●●

Ajuste en el primer orden.

$23_{(10} = \quad_{(2}$ PASO 18			
●	●●		
			●●●●●●●

Ajuste en el segundo orden.

$23_{(10} = \quad_{(2}$ PASO 18			
●●			
			●●●●●●●

Ajuste en el tercer orden.

Ajuste en el cuarto orden. Se obtiene una unidad de quinto orden.

$23_{(10} = \quad_{(2}$ PASO 19			
			●
			●●●●●●●

Se han vuelto a introducir dos, y se ha ajustado el orden.

$23_{(10} = \quad_{(2}$ PASO 20			
			●
		●	
			●●●●●

$23_{(10} = \quad_{(2}$ PASO 21			
			●
	●		
			●●●

Se han vuelto a introducir dos, y se ha ajustado también el segundo orden.

23 $_{(10}$ = $_{(2}$ PASO 22			
			●
	●	●	
			●

Se introducen dos más, con el correspondiente ajuste en el primer orden.

23 $_{(10}$ = 10111 $_{(2}$ PASO 23			
			●
	●	●	●

Último paso. Se introduce la restante. El resultado de expresar veintitrés en base dos es 10111.

2. De cualquier base a base diez.

Es el proceso inverso. Se van poniendo unidades en el orden inferior en la cantidad que indique la base. El primer ejemplo va a ser convertir 13$_{(7}$ en base 10.

13 $_{(7}$ = $_{(10}$ PASO 1			
		●	●●●

Ya está escrito el número. Hay una unidad de segundo orden y tres de primero.

13 $_{(7}$ = 10 $_{(10}$ PASO 2			
			●●●●●●● ●●●

Resuelto. La unidad de segundo orden se convierte en siete en el orden inferior, que unidas a las que ya había forman las diez.

123 $_{(4}$ = $_{(10}$ PASO 1			
	●	●●	●●●

Un segundo ejemplo en base cuatro. Hay que pasar 123$_{(4}$ a base 10.
Se ha dispuesto el número para empezar a operar.

123 $_{(4}$ = $_{(10}$ PASO 2			
		●●●●●●	●●●

Se ha pasado la unidad de tercer orden a segundo orden.

$123_{(4} = \quad_{(10}$ PASO 3			
		●●●	●●●●●●●● ●●●●●●●

Para no ser demasiado parsimoniosos, se han pasado tres unidades de segundo orden a primer orden. Con las tres que había se reúnen quince.

$123_{(4} = \quad_{(10}$ PASO 4			
			●●●●●●● ●●●●●●● ●●●●●●● ●●●●●●

Ya son todas unidades de primer orden. Con contarlas sabremos la equivalencia. Pero para ser puristas, sigamos como hasta ahora.

$123_{(4} = 27_{(10}$ PASO 6			
		●●	●●●●●●●

Por cada diez unidades en el primer orden se ha pasado una al segundo orden. El resultado es 27.

¿CÓMO LO HACEMOS CON NÚMEROS?

DE BASE DIEZ A CUALQUIER BASE.

El procedimiento es muy sencillo. El número que se quiere convertir se divide sucesivamente por la base hasta que no se pueda más. El orden mayor será el último cociente, y los órdenes sucesivos, de modo decreciente, son los restos de las divisiones.

Veamos los ejemplos inversos:

$7_{(10} = 21_{(3}$
7 : 3 = 2. Resto = 1.

$23_{(10} = 25_{(9}$
23 : 9 = 2. Resto= 5.

$23_{(10} = 10111_{(2}$

23 : 2 = 11. R = 1.	**11 : 2 = 5. R = 1.**	**5 : 2 = 2. R = 1.**	**2 : 2 = 1. R = 0.**

1 0 1 1 1

MÁS EJEMPLOS.

38 A BASE 3.
38 : 3 = 12. Resto 2. ___ ___ ___ **2.**
12 : 3 = 4. Resto 0. ___ ___ **0 2**
4 : 3 = 1. Resto 1. **1 1 0 2**

Si en lugar de 38 fueran 41, sería:
41 : 3 = 13. Resto 1. ___ ___ ___ **2**
13 : 3 = 4. Resto 1. ___ ___ **1 2**.
4 : 3 = 1. Resto 1. **1 1 1 2**

Y si fueran 32:
32 : 3 = 10. Resto 2. ___ ___ ___ **2**
10 : 3 = 3. Resto 1. ___ ___ **1 2**.
3 : 3 = 1. Resto 0. **1 0 1 2.**

DE CUALQUIER BASE A BASE DIEZ.

$\mathbf{1\ 2\ 3}_{(4} \mathbf{= 2\ 7}_{(10}$

16	4	1	RESULTADO
1	**2**	**3**	
16 x 1 = 16	4 x 2 = 8	1 x 3 = 3	16 + 8 + 3 = **27**

La explicación es sencilla. Se ha de multiplicar el número de unidades en cada orden por el valor de ese orden. En base cuatro –el ejemplo- será 16-4-1. En base cinco sería 25-5-1, en base 8 sería 64-8-1, etc.

Una vez efectuados los productos, se suman. El resultado es el número en base diez.

Se harán dos ejemplos más. Uno en base cinco y otro en base dos.

Sea pasar 3 4 2 $_{(5}$ a base diez.

25	5	1	RESULTADO
3	**4**	**2**	
25 X 3 = 75	5 X 4 = 20	1 X 2 = 2	75 + 20 + 2 = **97**

Sea pasar 1 1 0 0 1 $_{(2}$ a base diez.

16	8	4	2	1	RESULTADO
1	**1**	**0**	**0**	**1**	
16	8	0	0	1	16 + 8 + 1 = **25**

EJERCITACIÓN ESPECIAL CON LA BASE DOS.

De base diez a base dos.

Ejemplo resuelto:

32	16	8	4	2	1	27 $_{(10}$
	●	●		●	●	1 1 0 1 1 $_{(2}$

Prácticas.

32	16	8	4	2	1	19 $_{(10}$

32	16	8	4	2	1	28 $_{(10}$

32	16	8	4	2	1	43 $_{(10}$

32	16	8	4	2	1	54 $_{(10}$

32	16	8	4	2	1	63 $_{(10}$

II. LA SUMA.

Es una operación muy sencilla. La suma es reunión, juntar todos los sumandos en uno y contar el resultado. Por ello, la manipulación es muy fácil. Se necesita un soporte de 4x4, que nos permite hacer sumas de hasta tres sumandos. En las primeras filas se escriben los sumandos y en la fila inmediatamente inferior se juntan, orden a orden y ese es el resultado. Si no hay llevadas, no hay que hacer ningún ajuste. Si habrá que realizarlo si las hay.

En los ejemplos vamos a utilizar las bases cuatro y cinco. Son cómodas, no requieren de excesivas unidades y permiten contemplar la complejidad de la operación de forma sencilla.

1. SUMA SIN LLEVADAS.

Sea sumar 1 1 2 + 2 1 1 $_{(4}$

	●	●	●●
+	●●	●	●

Se juntan las unidades primer orden.

	●	●	
+	●●	●	
			●●●

Se juntan las de segundo orden.

	●		
+	●●		
		●●	●●●

Se juntan las de tercer orden y ya está hecha la operación.

+			
	●●●	●●	●●●

1 1 2 + 2 1 1 $_{(4}$ = 3 2 3 $_{(4}$

2. SUMA CON LLEVADAS.

Sea 2 1 3 $_{(4}$ + 3 0 3 $_{(4}$ = $_{(4}$

	●●	●	●●●
+	●●●		●●●

Se juntan las unidades de primer orden.

	●●	●	
+	●●●		
			●●●●●●

Se ajustan

	●●	●	
+	●●●		
		●	●●

Se juntan las de segundo orden. No hay llevadas. y se ajustan.

	●●		
+	●●●		
		●●	●●

Se juntan las de tercer orden.

+			
	●●●●●	●●	●●

Se ajustan. Ya está hecha la suma.

+			
●	●	●●	●●

2 **$13_{(4} + 303_{(4} = 1122_{(4}$**

III.LA RESTA O SUSTRACCIÓN. MODELO DE DETRACCIÓN.

Hay que considerar que la resta o sustracción admite modelos muy diferentes en función del tipo de cálculo que resuelvan. Si, como se debe hacer, se liga la realización de cuentas a la resolución de problemas, tendremos, en el caso de la resta, cuatro modelos básicos y que exigen diferentes manipulaciones. Son los de detracción, comparación, igualación ascendente e igualación descendente. Comenzamos con el primero, y utilizaremos bases cuatro y cinco.

DETRACCIÓN SIN LLEVADAS.

Es el caso más sencillo. Dada una cantidad, se le detrae o quita otra más pequeña. Lo que queda es el resultado. Este modelo requiere un soporte muy simple.

Sea 4 1 3 4 – 2 0 1 3 $_{(5}$= $\qquad\qquad _{(5}$

●●●●	●	●●●	●●●●

Al no haber llevadas, podemos detraer en el orden que se desee. Dada la facilidad del cálculo, se llevan a cabo todas las manipulaciones en un solo paso. Es decir, se han detraído dos unidades del cuarto orden, una del segundo y tres del primero.

●●		●	●●●
●●	●	●●	●

4 1 3 4 – 2 0 1 3 $_{(5}$= 2 1 2 1 $_{(5}$

DETRACCIÓN CON LLEVADAS.

La diferencia radica en que hay que ajustar algunos órdenes de unidades para que se pueda detraer. Dicho de otra manera, hay que intercambiar órdenes de unidades. De entre las diversas maneras de hacerlo, aquí se sugiere el ajuste previo a la resolución de la operación. Véase con el mismo minuendo y en la misma base que el ejemplo anterior. El sustraendo sólo exige un reajuste o llevada.

4 1 3 4 – 2 3 1 3 $_{(5}$= $\qquad\qquad _{(5}$

●●●●	●	●●●	●●●●

En primer lugar, reajustamos donde es necesario.

●●●	●●●●●●	●●●	●●●●

Ahora ya, sin problemas, se realiza la operación sin más complicaciones.

●●	●●●	●	●●●
●	●●●	●●	●

4 1 3 4 – 2 3 1 3 $_{(5}$= 1 3 2 1 $_{(5}$

Se ponen dos ejemplos más en base cuatro. Uno con dos llevadas, y el otro con tres.

CON DOS LLEVADAS.

Sea 3 2 0 3 – 1 3 2 0 $_{(4}$ = $\quad\quad_{(4}$

●●●	●●		●●●

Ajuste en el tercer orden:

●●	●●●●●●		●●●

Ajuste en el segundo orden:

●●	●●●●●	●●●●	●●●

Ahora se puede resolver la operación.

●	●●	●●	
●	●●●	●●	●●●

3 2 0 3 – 1 3 2 0 $_{(4}$ = 1 3 2 3 $_{(4}$

CON TRES LLEVADAS.

Sea $2\ 2\ 0\ 1 - 1\ 3\ 2\ 3_{(4} = \qquad_{(4}$

●●	●●		●

Ajuste en el tercer orden:

●	●●●●●●		●

Ajuste en el segundo orden:

●●	●●●●●	●●●●	●

Ajuste en el primer orden:

●●	●●●●●	●●●	●●●●●

Ahora se puede resolver la operación.

●	●●●	●●	●●●
●	●●	●	●●

$$\mathbf{2\ 2\ 0\ 1 - 1\ 3\ 2\ 3_{(4} = 1\ 2\ 1\ 2_{(4}}$$

RESTA POR IGUALACIÓN ASCENDENTE.

Es el modelo que resuelve los problemas en los que se parte de una cantidad para llegar a otra mayor, y se quiere saber cuántas hay que añadir. Frente al modelo de comparación, supone introducir unidades.

El soporte es también de 2x4. Las bases a utilizar serán cuatro y cinco. Las fichas o unidades que haya que añadir serán distintas a las dadas en la operación inicial.

SIN LLEVADAS.

Sea 4 2 4 3 – 1 0 2 2 $_{(5}$ = $_{(5}$

●●●●	●●	●●●●	●●●
●		●●	●●

Añadimos las unidades necesarias para igualar el sustraendo con el minuendo. Ese es el resultado.

●●●●	●●	●●●●	●●●
●■■■	■■	●●■	●●■

$$\mathbf{\overset{3}{4}\ 2\ 4\ 3 - 1\ 0\ 2\ 2_{(5} = 3\ 2\ 1\ 1_{(5}}$$

CON UNA LLEVADA

Sea 4 2 4 3 – 1 4 2 2 $_{(5}$ = $_{(5}$

●●●●	●●	●●●●	●●●
●	●●●●	●●	●●

Se ajusta el tercer orden.

●●●	●●●●●●●	●●●●	●●●
●	●●●●	●●	●●

Se procede a la igualación.

●●●	●●●●●●●	●●●●	●●●

●■■	●●●●■■■	●●■■	●●■

4 2 4 3 – 1 4 2 2 $_{(5}$ = 2 3 2 1 $_{(5}$

CON DOS LLEVADAS Y UNA PROVOCADA.

Sea 2 0 1 0 – 1 3 1 3 $_{(4}$ = $_{(4}$

●●		●	
●	●●●	●	●●●

Se ajustan las unidades de tercer orden.

●	●●●●	●	
●	●●●	●	●●●

Se ajustan las unidades de primer orden.

●	●●●●		●●●●
●	●●●	●	●●●

Se ha de ajustar la de segundo orden.

●	●●●	●●●●	●●●●
●	●●●	●	●●●

Se procede a la igualación.

●	●●●	●●●●	●●●●
●	●●●	●■■■	●●●■

2 0 1 0 – 1 3 1 3 $_{(4}$ = 3 1 $_{(4}$

RESTA POR IGUALACIÓN DESCENDENTE.

La diferencia formal entre el modelo ascendente y el descendente es que en este segundo caso se han de extraer o quitar unidades del número mayor hasta igualarlo con el menor. Las unidades que se extraen conforman el resultado. Este modelo es el idóneo para saber cuántas hay que perder o quitar para llegar de una cantidad mayor a otra menor.

Se sigue con las mismas premisas que en el caso anterior.

SIN LLEVADAS.

Sea 4 3 4 1 – 2 1 3 0 $_{(5}$ = $_{(5}$

●●●●	●●●	●●●●	●
●●	●	●●●	

Se extraen las unidades hasta que en cada orden queden las mismas en ambos términos. Las extraídas son el resultado.

●●	●●	●	●
●●	●	●●●	
●●	●	●●●	

4 3 4 1 – 2 1 3 0 $_{(5}$ = 2 2 1 1 $_{(5}$

CON UNA LLEVADA.

Sea 4 3 4 1 – 2 1 3 4 $_{(5}$ = $_{(5}$

●●●●	●●●	●●●●	●
●●	●	●●●	●●●●

Se ajusta la unidad de primer orden.

●●●●	●●●	●●●	●●●●●●
●●	●	●●●	●●●●

Se eliminan las sobrantes del minuendo.

●●	●●		●●
●●	●	●●●	●●●●
●●	●	●●●	●●●●

$$\mathbf{4\,3\,4\,1 - 2\,1\,3\,4_{(5} = 2\,2\,0\,2_{(5}}$$

CON MÁS DE UNA LLEVADA.

Sea $2\,3\,0\,0 - 1\,1\,3\,3_{(4} = \qquad _{(4}$

●●	●●●		
●	●	●●●	●●●

Se ajustan las unidades de segundo orden.

●●	●●	●●●●	
●	●	●●●	●●●

Se ajustan las unidades de primer orden.

●●	●●	●●●	●●●●
●	●	●●●	●●●

Se eliminan las sobrantes del minuendo. La operación ha terminado.

●	●		●
●	●	●●●	●●●
●	●	●●●	●●●

$$\mathbf{2\,3\,0\,0 - 1\,1\,3\,3_{(4} = 1\,1\,0\,1_{(4}}$$

RESTA POR COMPARACIÓN.

La resta por comparación implica unas manipulaciones muy diferentes al anterior. Aquí se trata de comparar números. Para obtener la diferencia, eliminaremos los elementos comunes de minuendo y sustraendo. Como siempre hay dos cantidades, el soporte será de 2x4. Las dos cantidades a comparar ocuparán cada una de las filas.

Como hasta ahora, haremos un tratamiento diferenciado entre las operaciones sin llevadas o con llevadas y utilizaremos las bases cuatro y cinco.

COMPARACIÓN SIN LLEVADAS.

Sea 4 3 2 1 – 1 2 1 1 $_{(5}$ = $_{(5}$

●●●●	●●●	●●	●
●	●●	●	●

Se igualan los grupos comunes en ambos términos.

● ●●●	●● ●	● ●	●
●	●●	●	●

Se eliminan los grupos comunes. Lo que queda es la diferencia.

●●●	●	●	

4 3 2 1 – 1 2 1 1 $_{(5}$ = 3 1 1 0 $_{(5}$

COMPARACIÓN CON LLEVADAS.

Sea 4 3 2 1 – 1 2 4 1 $_{(5}$ = $_{(5}$

●●●●	●●●	●●	●
●	●●	●●●●	●

Se ajustan las unidades de segundo orden.

●●●●	●●	●●●●●●●	●
●	●●	●●●●	●

Se igualan los grupos comunes en ambos términos.

● ●●●	●●	●●●● ●●●	●
●	●●	●●●●	●

Se eliminan los grupos comunes. Lo que queda es la diferencia.

●●●		●●●	

4 3 2 1 – 1 2 4 1 $_{(5}$ = 3 0 3 0 $_{(5}$

DOS EJEMPLOS MÁS EN BASE CUATRO.

CON DOS LLEVADAS.

Sea 3 0 0 2 – 2 1 1 0 $_{(4}$ = $_{(4}$

●●●			●●
●●	●	●	

Se ajusta el tercer orden.

●●	●●●●		●●
●●	●	●	

Se ajusta el segundo orden.

●●	●●●	●●●●	●●
●●	●	●	

Se igualan los grupos.

●●	● ●●	● ●●●	●●
●●	●	●	

Se eliminan las unidades comunes. Ya está realizada la operación.

	●●	●●●	●●

$$\mathbf{3\ 0\ 0\ 2 - 2\ 1\ 1\ 0_{(4} = 2\ 3\ 2_{(4}}$$

CON TRES LLEVADAS.

Sea $3\ 1\ 2\ 1 - 1\ 3\ 3\ 2_{(4} = \qquad _{(4}$

●●●	●	●●	●
●	●●●	●●●	●●

Se ajusta el tercer orden.

●●	●●●●●	●●	●
●	●●●	●●●	●●

Se ajusta el segundo orden.

●●	●●●●	●●●●●●	●
●	●●●	●●●	●●

Se ajusta el primer orden.

●●	●●●●	●●●●●	●●●●●
●	●●●	●●●	●●

Se establecen los grupos iguales.

● ●	●●● ●	●●● ●●	●● ●●●
●	●●●	●●●	●●

Se eliminan los grupos iguales. Ya se ha obtenido el resultado.

●	●	●●	●●●

$${}_{3}\quad \mathbf{1\,2\,1 - 1\,3\,3\,2}_{(4} = \mathbf{1\,1\,2\,3}_{(4}$$

EL PRODUCTO O MULTIPLICACIÓN.

En esencia, multiplicar es poner por cada unidad del multiplicando tantas unidades como indique el multiplicador. Así, el producto 21 x 3 indica que hay que sustituir cada una de las 21 por tres: 63.

Los ejemplos utilizarán las bases tres y cuatro.

MULTIPLICACIÓN POR UNA CIFRA.

El soporte refleja la multiplicación $21_{(4}$ x 3 = $\quad_{(4}$

		●●	●
			●●●

Por cada ficha del multiplicando debemos poner tres en el resultado. Convertimos la unidad de primer orden:

		●●	
			●●●
			●●●

Convertimos la primera ficha de las unidades de segundo orden:

		●	
			●●●
		●●●	●●●

Hacemos lo mismo con la ficha restante:

			●●●
		●●●●●●	●●●

Se ajustan las unidades de segundo orden y ya tenemos la operación resuelta:

			●●●
	●	●●	●●●

2 1 x 3 $_{(4}$ = 1 2 3 $_{(4}$

MULTIPLICACIÓN LARGA EN BASE CINCO.

Como indica el soporte, se va a efectuar 2 3 1 x 4 $_{(5}$ = $_{(5}$

	●●	●●●	●
			●●●●

UNIDADES DE PRIMER ORDEN:

	●●	●●●	
			●●●●
			●●●●

UNIDADES DE SEGUNDO ORDEN.

	●●		
			●●●●
		●●●●●●●● ●●●●	●●●●

AJUSTE.

	●●		
			●●●●
	●●	●●	●●●●

UNIDADES DE TERCER ORDEN.

			●●●●
	●●●●●●●●●●	●●	●●●●

AJUSTE Y FINAL.

			••••
••		••	••••

2 3 1 x 4 $_{(5}$ = 2 0 2 4 $_{(5}$

MULTIPLICACIÓN POR DOS CIFRAS.

Sea el producto 2 2 x 1 1 $_{(3}$ = $_{(3}$

		••	••
		•	•

Por cada ficha del multiplicando, habrá que poner una en su orden y otra en el orden superior:

		••	•
		•	•
		•	•

		••	
		•	•
		••	••

		●	
		●	●
	●	●●●	●●

		●	●
	●●	●●●●	●●

Se ajusta y ya tenemos el resultado.

		●	●
	●●●	●	●●

		●	●
●		●	●●

$$\mathbf{2\ 2 \times 1\ 1_{(3} = 1\ 0\ 1\ 2_{(3}}$$

OPERACIÓN LARGA EN BASE CINCO.

Sea 1 0 4 3 x 3 1 $_{(5}$ = $_{(5}$

●		●●●●	●●●
		●●●	●

Unidades de primer orden y ajustes.

●		●●●●	●●
		●●●	●
		●●●	●

●		●●●●	●
		●●●	●
		●●●●●●	●●

●		●●●●	
		●●●	●
		●●●●●●●●●	●●●

•		••••	
		•••	•
	•	••••	•••

Unidades de segundo orden.

•		•••	
		•••	•
	••••	•••••	•••

•		••	
		•••	•
	•••••••	••••••	•••

•		•	
		•••	•
	••••••••••	•••••••	•••

●			
		●●●	●
	●●●●●●●●●● ●●●	●●●●●●●●	●●●

Sucesivos ajustes.

●			
		●●●	●
	●●●●●●●●●● ●●●●	●●●	●●●

●			
		●●●	●
●●	●●●●	●●●	●●●

Unidad de cuarto orden.

			●●●	●
●●●	●●●	●●●●	●●●	●●●

1 0 4 3 x 3 1 $_{(5}$ **= 3 3 3 3 3** $_{(5}$

LA DIVISIÓN.

La división es también muy sencilla. En esencia, se trata de dejar establecer en el dividendo el máximo número de grupos posible con el número de fichas que indica el divisor. Se deja una sola ficha por grupo, que es el cociente. Así, dividir 60 : 4 es formar con los sesenta todos los grupos de cuatro posibles, y dejar una sola ficha por cada uno de los grupos.

DIVISIÓN POR UNA CIFRA.

Sea 3 2 1 2 : 2 $_{(4}$ = $_{(4}$

3 2 1 2 : 2 $_{(4}$ = $_{(4}$			
●●●	●●	●	●●

De entrada, detraemos los grupos de dos que ya hay en primer y tercer orden:

3 2 1 2 : 2 $_{(4}$ = $_{(4}$			
●●●		●	
	●		●

Se detrae el grupo de unidades de cuarto orden:

3 2 1 2 : 2 $_{(4}$ = $_{(4}$			
●		●	
●	●		●

Se convierte la unidad restante de cuarto orden en cuatro de tercer orden.

3 2 1 2 : 2 $_{(4}$ = $_{(4}$			
	●●●●	●	
●	●		●

Se detraen los dos grupos de unidades:

3 2 1 2 : 2 $_{(4}$ = $_{(4}$			
		●	
●	●●●		●

Se convierte la unidad de segundo orden en cuatro de primer orden.

3 2 1 2 : 2 $_{(4}$ = $_{(4}$			
			●●●●
●	●●●		●

Se detraen los dos grupos de unidades. Ya está resuelto el algoritmo.

3 2 1 2 : 2 $_{(4}$ = 1 3 0 3 $_{(4}$			
●	●●●		●●●

DIVISIÓN POR DOS CIFRAS.

Si multiplicar, por ejemplo, por 34 es poner por cada ficha cuatro en su orden y tres en el superior, dividir por 34 es dejar una sola ficha por cada grupo de tres en el orden superior y cuatro en el inferior.

Sea 4 4 1 2 : 3 4 $_{(5}$ = $_{(5}$

4 4 1 2 : 3 4 $_{(5}$ = $_{(5}$			
●●●●	●●●●	●	●●

Se identifica el primer grupo 3-4:

4 4 1 2 : 3 4 $_{(5}$ = $_{(5}$			
●●● ●	●●●●	●	●●

Y se deja una sola ficha en su orden correspondiente:

4 4 1 2 : 3 4 $_{(5}$ = $_{(5}$			
●		●	●●
	●		

Se pasan de cuarto a tercer orden, y de tercer orden a segundo, para poder seguir obteniendo grupos 3-4:

$4412 : 34_{(5} = \quad _{(5}$			
	●●●●●	●	●●
	●		

$4412 : 34_{(5} = \quad _{(5}$			
	●●●●	●●●●●●	●●
	●		

$4412 : 34_{(5} = \quad _{(5}$			
	●●● ●	●●●● ●●	●●
	●		

$4412 : 34_{(5} = \quad _{(5}$			
	●	●●	●●
	●	●	

Se vuelven a cambiar fichas para obtener más grupos 3-4:

$4412 : 34_{(5} = \quad _{(5}$			
		●●●●●●●	●●
	●	●	

$4412 : 34_{(5} = \quad _{(5}$			
		●●●●●●	●●●●●●●
	●	●	

$4412 : 34_{(5} = \quad _{(5}$			
		●●● ●●●	●●●● ●●●
	●	●	

$4412 : 34_{(5} = 111_{(5}$ R = $33_{(5}$			
		●●●	●●●
	●	●	●

En efecto, 33 es menor que el divisor, por lo que se acaba la operación.

DOCUMENTO MODULAR ARTICULADO DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA.

ANEXO PARA EL PRIMER, SEGUNDO Y TERCER CICLO.

MUESTRA DE TRABAJOS DE LOS ALUMNOS QUE EMPLEAN ALGORITMOS ABN.

CC.EE.II.PP. **"Carlos III"** y **"Andalucía"** de Cádiz.

"Reyes Católicos" y **"Reggio"** de Puerto Real.

VER POWER POINT ADJUNTO