UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

ENSEÑANZA DE ELEMENTOS BÁSICOS DE TRIGONOMETRÍA EN LA ASTRONOMÍA: UNA PROPUESTA PARA TRABAJAR CON ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA

Lady Johanna Plazas Rojas

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Bogotá, Colombia

2012

ENSEÑANZA DE ELEMENTOS BÁSICOS DE TRIGONOMETRÍA EN LA ASTRONOMÍA: UNA PROPUESTA PARA TRABAJAR CON ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA

Lady Johanna Plazas Rojas
Licenciada En Física

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

BENJAMIN CALVO MOZO

Físico, MSc Astronomía

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Bogotá, Colombia

2012

Este trabajo está dedicado a mi mamá y hermana, que con su amor y ejemplo me dan la fortaleza para lograr cualquier cosa. A Dios por cubrir de bendiciones mi vida dándome una familia hermosa y por enseñarme con sabiduría a amar lo que hago.

El que no posee el don de maravillarse ni de entusiasmarse más, le valdría estar muerto, porque sus ojos están cerrados.

Albert Einstein

Agradecimientos

Primero quiero dar gracias al profesor Benjamín Calvo Mozo, por su apoyo, colaboración, por su disposición y paciencia para leer y corregir cada párrafo, cada ecuación, cada grafica, aún así cuando tenía exceso de trabajo. Pero principalmente le doy gracias por enseñarme a conocer y amar la astronomía, pilar de este trabajo.

Quiero agradecer también a mi hermana por brindarme su amor, fortaleza y apoyo para hacer este sueño posible, a mi prima Diana por su ayuda y respaldo en todo momento y a todas las personas que de una u otra forma aportaron al desarrollo de este trabajo.

Resumen

El siguiente trabajo presenta una propuesta que permite al docente de Matemáticas y/o Física de educación media enseñar conceptos de astronomía relacionados con la esfera celeste y las distancias astronómicas. De tal forma que permitan darle significado a los conceptos básicos de la trigonometría y generando en el estudiante un gusto por el uso de expresiones y teoremas trigonométricos.

Este proyecto inicia explicando la relación histórica entre la Astronomía y la Trigonometría; igualmente muestra que es posible ir de la trigonometría plana a la esférica utilizando las herramientas y propiedades trabajadas en el aula de clase, mostrando aplicaciones a los casos del modelo esférico de la Tierra y la esfera celeste.

Finalmente se describen los métodos aplicados para calcular distancias terrestres y extrapolarlos al cielo; planteando actividades didácticas y prácticas que permitan aplicar y relacionar los conceptos vistos, fomentando en el estudiante un aprendizaje significativo en ambas disciplinas y en el docente el uso de nuevas estrategias.

Palabras Clave: Matemáticas, Astronomía, Trigonometría, Esfera Celeste, Coordenadas Astronómicas y Enseñanza.

Abstract

This paper presents a proposal which allows mathematics and/or physics high school teachers to teach concepts of astronomy related to the celestial sphere and astronomical distances. In such a way that they can give meaning to the basic concepts of trigonometry, and encouraging students to be interested for the use of expressions and trigonometric theorems.

The proposal starts by explaining the historical relationship between astronomy and trigonometry, and it also shows that it is possible to go from the spherical trigonometry to the flat trigonometry using the tools and properties worked in the classroom and showing applications to the cases of the spherical model of the Earth and the celestial sphere.

Finally, this proposal describes the methods used to calculate land distances and extrapolate them to sky; considering educational and didactic activities that allow applying and relating the concepts seen, and fostering a meaningful learning in both disciplines in the case of the students, and providing with new strategies to teach in the case of the teachers.

Keywords: Mathematics, Astronomy, Trigonometry, Celestial Sphere, Astronomical Coordinates and Teaching.

Contenido

Lista de figuras

Capítulo 3

Capítulo 4

Capítulo 5

Lista de Símbolos y abreviaturas

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término
A	Ázimut
*A**	Suplemento Azimut
E	Coordenada geográfica Este
H	Altura del astro
H	Ángulo horario
*H **	Suplemento ángulo horario
N	Coordenada geográfica Norte
R	Radio
S	Coordenada geográfica Sur
W	Coordenada geográfica Oeste
Z	Cenit
Z´	Nadir

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término
δ	Declinación
ϕ	Latitud geográfica
λ	Longitud geográfica
Υ	Punto Vernal
α	Ascensión recta
θ	Ángulo de inclinación

Abreviaturas

Abreviatura	Término
co	Cateto opuesto
ca	Cateto adyacente
EC	Ecuador celeste
PNC	Polo norte celeste PSC
PSC	Polo sur celeste

Introducción

La enseñanza de las matemáticas presenta ciertas dificultades una de ellas es la apropiación incorrecta de conceptos, el desinterés en el aprendizaje de los mismos y sobre todo que para el estudiante no es evidente la utilidad y aplicabilidad de lo que está aprendiendo, lo que genera grandes conflictos durante el proceso de enseñanza – aprendizaje. Este conflicto suele acrecentarse en la media vocacional al momento de aprender los conceptos concernientes a la trigonometría y al cálculo ya que se muestra muy poco como éstas permiten resolver situaciones en el mundo real.

Para indagar más al respecto se realizó una encuesta con una población de 220 estudiantes de los grados décimo y once en el Colegio Distrital *INEM Santiago Pérez del Tunal*, en la que se les preguntaba: ¿Cuál de las matemáticas vistas desde grado sexto es la que menos le gusta o menos le llama la atención? ¿Por qué? Los resultados obtenidos fueron: trigonometría con un 40%, álgebra 34%, cálculo 25% y otros 1%. Sus argumentos convergían básicamente en que no le veían la utilidad a lo que se estaba enseñando, palabras textuales “eso para qué sirve”, “porqué no se enseñan cosas prácticas y porqué no se entiende nada”.

Igualmente se elaboró otra encuesta con los 30 docentes del área de Matemáticas y Física de las dos jornadas en la que se les preguntaba en qué grado de escolaridad se evidenciaba en los estudiantes más desinterés, reprobación y problemas de aprendizaje. Los resultados fueron: Décimo 33%, octavo 27%, once 17%, séptimo 17% y sexto 7%.

Estos resultados y el hecho de que en muchas instituciones educativas debido a la integración de las áreas de física y matemáticas, los docentes de física imparten algunas asignaturas de matemáticas y viceversa, motivaron el desarrollo de la propuesta de este trabajo. Brindando nuevas estrategias al docente para que se vean reflejadas en el interés del estudiante.

El objetivo de este trabajo es desarrollar una propuesta que permita al docente de Matemáticas o Física, de estudiantes de educación media, enseñar y estudiar conceptos de astronomía relacionados con la esfera celeste y las distancias astronómicas, de tal forma, que permitan dar significado y gusto al usar elementos básicos y teoremas de la trigonometría plana.

Se pueden encontrar bastantes artículos que trabajen en el uso de la astronomía para la enseñanza de conceptos matemáticos, en su mayoría estos se enfocan en la básica secundaria. También hay propuestas didácticas para la enseñanza de la trigonometría pero sin involucrar la astronomía directamente. Aquí pretendemos usar la belleza de la astronomía como un recurso motivador para comprender algunos temas de la trigonometría vista en grado décimo.

Para alcanzar nuestro objetivo iniciamos estableciendo una relación histórica entre la evolución de la Astronomía y el surgimiento de la Trigonometría, mostrando a la trigonometría como un área construida para resolver problemas prácticos, relacionados con las necesidades y el desarrollo del pensamiento del ser humano en astronomía. Después se introducen los principales conceptos de astronomía de posición; el planeta tierra, la esfera celeste y coordenadas astronómicas. Aprendiendo sobre las herramientas necesarias para la observación y entendimiento de fenómenos astronómicos.

Seguimos con una descripción de elementos y propiedades de la trigonometría plana e introducimos el estudio de la trigonometría esférica, la cual es desconocida para nuestros estudiantes y en ocasiones para los mismos docentes. Se demostrara que es posible ir de la trigonometría plana a la esférica utilizando las herramientas y propiedades trabajadas en el aula de clase. En este punto se debe tener especial cuidado en el manejo algebraico de las ecuaciones y propiedades utilizadas, el docente debe ser un dinamizador directo en esta etapa, verificando que los estudiantes entiendan los procesos matemáticos.

Para entender la utilidad y aplicación de los conceptos astronómicos y trigonométricos estudiados previamente, intentamos explicar métodos para calcular distancias terrestres y distancias de la Tierra a los astros, mostrando aplicaciones a los casos del modelo esférico de la Tierra y la esfera celeste, usando el método de triangulación trigonométrica.

Usando todas las herramientas anteriores resulta muy útil hacer un ejercicio práctico con los estudiantes por lo cual se plantean actividades didácticas y prácticas que permitan aplicar y relacionar los conceptos vistos. Estas actividades implican que nuestros estudiantes observen los fenómenos naturales, construyan sus propios instrumentos de observación y tomen sus propias medidas. En la medida en que cada estudiante se sienta comprometido y además activo en el desarrollo de cada actividad se le será más significativo lo que está aprendiendo

La aplicación de esta propuesta y de las actividades depende del espíritu investigativo del docente quien tendrá que profundizar los temas y de su voluntad para usar nuevas estrategias, debido a que deberá buscar un espacio académico en su institución en el que pueda ser aplicado y apoyado por la comunidad educativa. Esta experiencia sería aún más enriquecedora si se involucran los docentes de ambas áreas, ya que estas actividades incluyen temáticas trabajadas en física y trigonometría de grado décimo.

1. PARALELO HISTÓRICO DEL DESARROLLO DE LA ASTRONOMÍA Y LA TRIGONOMETRÍA

La astronomía surge al intentar explicar muchas de las dinámicas cíclicas del universo y cómo estas afectan el estilo de vida del hombre, por ejemplo la plaga de langostas aparecía después de largos periodos de sol y los eclipses, aunque fascinantes, causaban un comportamiento diferente en los animales, produciendo curiosidad en el hombre. Las observaciones entre el siglo 1200 A.C. y 400 A.C. mostraron que había dos clases de fenómenos, los que se repetían periódicamente como la salida y puesta del sol o las fases de la luna y los que duraban días o semanas. Se hizo necesario para el hombre tratar de entender estos patrones de la naturaleza y es ahí donde aparecen las matemáticas en conceptos como espacio y cantidad. El hombre empezó entonces a hacer conexiones e identificar las pautas de estas secuencias ordenando el mundo que los rodeaba, iniciando por el estudio de los astros.

La trigonometría aparece como una herramienta útil para la astronomía; su primer uso es la resolución de los triángulos ya que permite calcular distancias no medibles por métodos directos, cómo distancias entre puntos geográficos y entre astros. Iniciaremos un viaje en el tiempo en el que estudiaremos como se comprendieron e intentaron explicar muchos de los fenómenos del universo a través de herramientas y conocimientos matemáticos y físicos, centrándonos en mostrar la relación histórica y constructiva entre la trigonometría y la astronomía a lo largo de la historia.

1.1 Inicio de la historia

1.1.1 Egipcios – 2750 A.C.

Esta cultura dependía de la siembra; por lo tanto, era muy importante conocer el comportamiento de los cielos ya que la lluvia y el sol afectaban sus cultivos directamente, tenían solo tres estaciones de cuatro meses cada una inundación, siembra y recolección. Atribuían el comportamiento de los diferentes fenómenos al carácter de los dioses[1],

[1] Los astros eran considerados dioses, el sol era el dios Ra, la diosa Isis era la luna y Nut era la diosa de la bóveda celeste.

encontraron cinco clases de cuerpos celestes, el sol, la luna, las estrellas circumpolares[2], las no circumpolares y los planetas.

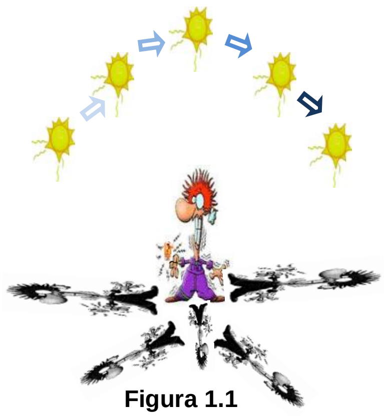


Figura 1.1

Usaban los obeliscos como relojes solares siguiendo el tamaño de las sombras. Al pasar de los años se dieron cuenta que durante el día el tamaño de las sombras disminuía mientras el sol ascendía y que al atardecer su longitud iba creciendo a medida que el sol bajaba, al igual que la dirección que tenía la sombra cambiaba con el tiempo (*figura 1.1*); comprendieron que podían conocer el momento del día en cual se encontraban con tan solo mirar la dirección y tamaño de la sombra. Además le asociaron al sol un movimiento circular y determinaron el ciclo anual no con los periodos de la luna sino del sol; esto les permitió elaborar hacia el 4500 a.C. un calendario de 365 días divididos en 12 meses de 30 días cada uno, más cinco días adicionales por año para que las estaciones concordaran con el calendario.

En Egipto se dan los primeros indicios de las matemáticas como las que conocemos hoy. Su año nuevo era pronosticado por la inundación del Nilo y registraron que esto sucedía periódicamente, para tratar de cuantificar estos registros, contaron los días entre las fases lunares utilizando un sistema numérico decimal e iniciaron el uso de fracciones. Fueron grandes pensadores en la solución de problemas de figuras geométricas, por ejemplo hicieron el cálculo del área de un círculo estudiando la relación entre el lado del cuadrado circunscrito en un círculo.

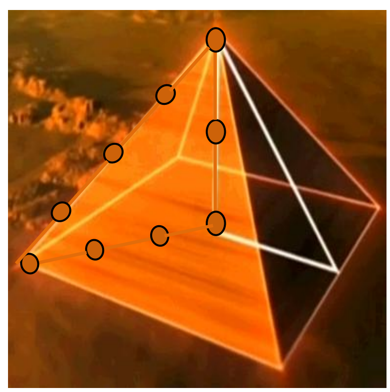


Figura 1.2

Una de las manifestaciones más impactantes sobre su intuición matemática son las pirámides, ocultan una simetría conocida como el número áureo, este número se obtiene de la relación de longitudes, *una longitud se divide en dos partes, la longitud total es al segmento más largo lo que el segmento más largo es al más corto*. De esta manera se establece una relación de tamaños con la misma proporcionalidad. En la pirámide de Keops se encuentra este número al relacionar la altura de cualquiera de los triángulos que forman la pirámide y el lado.
Encontramos también que el teorema de Pitágoras estuvo implícito en la construcción de las pirámides, aunque no era conocido por ellos[3]. Para poder conseguir esquinas perfectas anguladas, los constructores egipcios utilizaban una cuerda con nudos, se dieron cuenta que al marcar los lados de un triangulo con 3, 4 y 5 nudos les garantizaba un ángulo perfecto de 90 grados (*Figura 1.2*)[4]. Esto es una muestra de que ya se

[2] Son estrellas visibles durante toda lo noche en cualquier época del año.

[3] *SANCHEZ ANGEL*, Astronomía y Matemáticas en el Antiguo Egipto. 2000

[4] Imagen tomada del video documental de la BBC. *La Historia de las Matemáticas: El idioma del Universo*. Aunque ha sido modificada para fines explicativos.

reconocía la importancia de relacionar los lados de un triángulo así como la geometría y las matemáticas.

1.1.2 Babilonios

Desde 1800 A.C. los babilonios se convirtieron en maestros para utilizar los números y también fueron los primeros astrónomos precisos de la historia. Inicialmente buscaban resolver problemas básicos de medida y peso, eran capaces de manipular cantidades sin tener un lenguaje algebraico e inventaron un nuevo símbolo para la cuantificación de la ausencia de algo, el número cero. Utilizaban un sistema numérico con dos características básicas, tenían en cuenta por primera vez la posición de los números y la base de su sistema era el numero 60.
Geométricamente se cree que podrían conocer el principio de los triángulos rectángulos, que su diagonal al cuadrado es la suma de sus lados al cuadrado, según como se percibe en la tablilla conocida como Plimpton 322 que se conserva en la Universidad de Columbia, escrita hacia el año 1800 a.C. parece ser que 1000 años antes sin conocer el teorema de Pitágoras, se conocían los valores de ciertas ternas pitagóricas[5] con números enteros que cumplían que $a^2 = b^2 + c^2$

Al ponerse el sol registraban las estrellas que aparecían cada noche en el firmamento con el fin construir un calendario bien elaborado, cuando acumularon un gran número de datos vieron la necesidad de encontrar una forma estructurada de registrarlos haciendo uso de los números como complemento de la observación astronómica. Esto enmarca el inicio de una larga, duradera y estable relación entre la Astronomía y la Matemática.

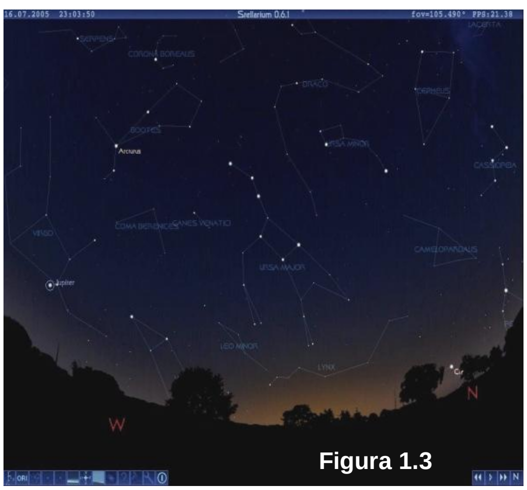


Figura 1.3

En las tablas astronómicas babilónicas se empieza a usar el arco de un grado como unidad de medida, lo que da origen a la división del círculo en 360º. Tenían un sistema para medir los ángulos, cada grado se dividió en 60 minutos y a su vez cada minuto en 60 segundos, lo que se conoce en la trigonometría actual como sistema sexagesimal.

Una de las principales motivaciones para crear este sistema fue la observación astronómica, deseaban trazar un mapa de las estrellas (*Figura 1.3*), y describir los ciclos de la luna en especial los eclipses lunares registrados desde el 800 A.C. Su calendario se basaba en las fases de la luna ya que les permitía agrupar periodos de tiempo mayores.
Eran excelentes astrólogos, tras años de observación agruparon y bautizaron las estrellas en constelaciones según formas imaginarias.
Día tras día empezaron a registrar cuales aparecían antes de que el sol saliera y se dieron cuenta que aparecían en diferentes épocas del año. El sol entonces seguía una ruta circular a través de las estrellas fijas, dividieron ese círculo en doce partes iguales de

[5] *ASGER AABOE*, Matemáticas Episodios Históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo. 1964

30º cada una y fue llamado el zodíaco (*Figura 1.4*)[6]. Este fue un gran avance de la astronomía matemática. También desarrollaron un reloj de sol con el cual dividieron el día en 12 partes iguales usando el tamaño de las sombras.

Figura 1.4

1.2 Grecia

1.2.1 Siglos II A.C – I D.C

En el 330 A.C los griegos retomaron elementos de las matemáticas de los babilonios y de los egipcios, los astrónomos griegos adoptaron el sistema babilónico de almacenamiento de fracciones a principios del siglo II A.C. A esta cultura la astronomía surge de fundamentos lógicos modelados por razonamientos matemáticos, la aproximación formal a problemas astronómicos se consiguió siempre por modelos geométricos[7].
Los griegos modelaron los cielos sobre una esfera, observaban cómo el sol aparecía al oriente sobre el horizonte y se ponía al occidente siguiendo una trayectoria circular, vieron que lo mismo pasaba con la luna por eso la única idea coherente era que ambos giraban alrededor de la tierra. La astronomía griega necesitaba entonces de un estudio matemático estricto de círculos, triángulos y esferas. Pero miremos el recorrido de las ideas griegas sobre el sistema planetario y sus matemáticas.

Tales de Mileto (639 A.C.) Imaginaba un universo en el que la tierra era plana y descansaba sobre agua con el cielo a su alrededor. Se hizo famoso hacia el 585 A.C. después que en una batalla entre persas y lidios se produjera un eclipse solar que él ya había pronosticado. Se le atribuye también el descubrimiento de cinco teoremas geométricos y su participación en la determinación de las alturas de las pirámides de Egipto utilizando la relación entre los ángulos y lados de un triangulo.
Anaximandro (610 A.C.) Con él surge una astronomía geocéntrica que ubicaba a la tierra como centro de todo el universo; afirmó que la tierra se mantenía por sí misma en el centro de la esfera celeste sin ninguna base, se tomó como un gran atentado al sentido común. Fue el primero en utilizar el gnomon[8] (*Figura 1.5*) para medir las horas del día y tomar medidas concretas.

Figura 1.5

Anaxágoras (500 A.C.) Se dio cuenta que la sección iluminada de la luna siempre esta de cara al sol y postuló su luz solo es reflejo de la luz solar y sus fases son producto de sus cambios de posición respecto a la tierra y el sol. Por primera vez en la historia se logró dar una explicación correcta a las fases de la luna.

Pitágoras (569-470 A.C.) Lideraba una comunidad conocida como los pitagóricos que se enfocaba en una matemática con argumentos geométricos en lugar de la dependencia de los números. Se le atribuye el conocido teorema de Pitágoras de un triángulo

---

[6] Imagen tomada del sitio web http://www.temakel.com/texmitcieloantiguo.htm

[7] *Sir THOMAS HEATH*, Greek Astronomy. 1991
[8] El gnomon es una figura triangular clavada de forma vertical en el suelo. el desplazamiento de su sombra, producido por el movimiento del Sol, permite determinar la hora y momento del año.

rectángulo: *la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa*. Aunque este teorema ya era conocido y aplicado por los babilonios y egipcios, fueron los pitagóricos los primeros en darle una demostración formal. En astronomía fue uno de los primeros en afirmar que la Tierra era esférica e inmóvil y que los astros giran en órbitas circulares alrededor de ella, estableció el orden de los cuerpos celestes conocidos según su cercanía a la tierra. Noto la inclinación de la eclíptica.

Ipasis (500 A.C.) se propuso encontrar el arco de la diagonal de un triángulo rectángulo asumiendo que el valor era una fracción, pero no lo encontraba, hasta que halló el valor de raíz de dos, los irracionales. ***Filolao (450 A.C.)*** afirmó que la tierra giraba mientras la bóveda de las estrellas se mantenía fija por lo cual se podían ver pasar en el firmamento nocturno diferentes estrellas; además que daba una vuelta cada 24 horas alrededor del fuego central explicando así el día y la noche.

Figura 1.6

Platón (429 A.C.) retomó la idea pitagórica afirmando que la tierra no es plana sino esférica por ser una creación divina en el centro del universo. El problema de aquella época es que chocaba con la experiencia, es decir si eso fuera cierto una persona que camina sobre la parte inferior de la tierra se caería hacia el espacio (*Figura 1.6*), aunque esto no impidió que la idea fuera aceptada.

Eudoxo (409 A.C.) Comenzó a introducir las matemáticas de manera sistemática en la astronomía. Fue el primero que intento explicar los movimientos planetarios de una forma matemática, a cada planeta le correspondía un número de esferas, para un sistema total de 34 esferas. ***Aristóteles (384 A.C.)*** continúa el modelo de Eudoxo pero usa en su modelo planetario 56 esferas. La teoría aristotélica sostiene que La Tierra no se mueve y es esférica porque así es la forma aparente de los demás astros y la forma que nos revela la sombra terrestre en los eclipses de Luna. Esta teoría tuvo se acepto por siglos ya que era utilizada por la mayor parte de las religiones.
Heráclito (388 AC.) afirmó por primera vez que el movimiento de las estrellas fijas se debía a la rotación de la tierra en sentido contrario, para explicar las variaciones del brillo observadas en Venus y Mercurio postuló que ambos giraban alrededor del sol y no alrededor de la tierra; desafortunadamente este descubrimiento pasó inadvertido.

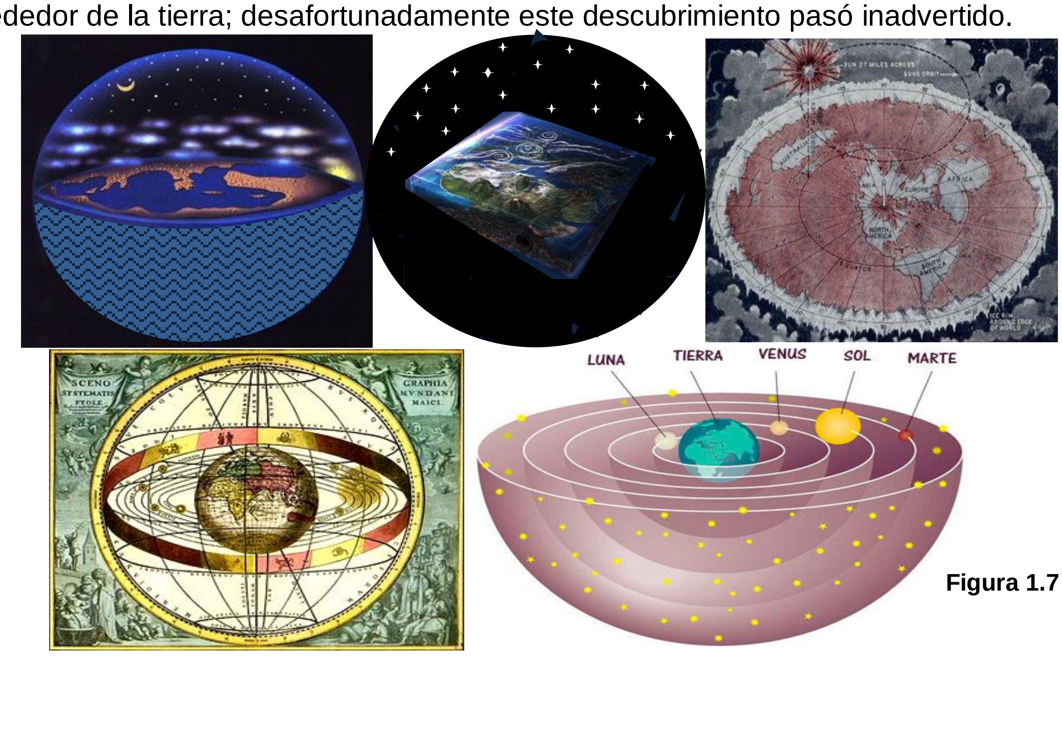


Figura 1.7

En la figura anterior se ven algunos de los modelos descritos hasta el momento (*Figura 1.7*).

El geógrafo ***Menashmos (375 A.C.)*** comenzó la geometría de las secciones cónicas y ***Apolonio (260A.C.)*** la fortaleció. Durante este periodo la astronomía se convirtió en una ciencia matemática. ***Dicearco (350 A.C.)*** introduce las coordenadas esféricas usando sus medidas del meridiano y paralelo de Rodas.


Figura 1.8

El geómetra ***Euclides (325 A.C.)*** enuncia las leyes del movimiento diurno. Una de sus ideas más reconocidas es la definición de círculo, “Figura plana circunscrita por una línea llamada circunferencia tal que todas las rectas trazadas desde un punto interior llamado centro hacia la circunferencia, son iguales”[9]. Es sorprendente saber que esta definición fue producto de la abstracción de los discos observados como el de la luna llena, el cual parece circular observado desde la tierra (*Figura 1.8*). Desarrolló la teoría de las coordenadas esféricas. El primer texto griego que muestra el uso de los grados en la astronomía fue elaborado por ***Hipsicles*** en el siglo II A.C.

Arquímedes (287 A.C.) da un gran impulso a las matemáticas y evalúa la circunferencia terrestre. Postuló que el área de un círculo de radio r es igual al área de un triángulo cuya base tiene la misma longitud que la circunferencia c del círculo y cuya altura es r, es decir $\mathbf{A = \frac{1}{2}\, r\, c}$.

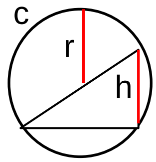


Figura 1.9

En contra de las teorías aristotélicas aparecen las revolucionarias de ***Aristarco de Samos (310-230 A.C.).*** Admite la esfericidad de la Tierra y postuló por primera vez una hipótesis heliocéntrica para el sistema planetario, propuso mostrar que la tierra no era el centro del sistema, que en su lugar se ubicaba el sol y la tierra giraba a su alrededor en una órbita circular; por esto fue llevado a juicio hacia el 270 a.C. Intentaba explicar las proporciones geométricas del universo para lo cual usó la relación entre cuerda y arco en un mismo círculo aplicándola a sus cálculos de las distancias del sol y la luna, manifestando una estrecha relación entre las observaciones astronómicas y los métodos matemáticos, por lo que se le considera el precursor de la trigonometría.

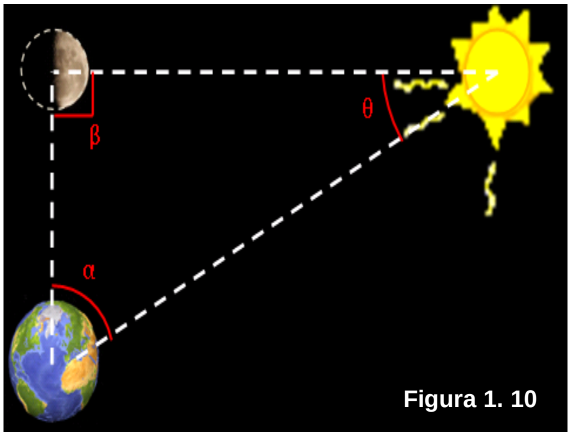


Figura 1. 10

Su modelo para medir las distancias entre la tierra, el sol y la luna nos muestra una clara relación entre los lados y ángulos de un triángulo, las bases de la trigonometría. Aristarco comprendió que cuando se ve la mitad de la superficie de la luna iluminada por el sol y el resto oscuro se encontraba en su punto más alto y en ese momento formaba un triángulo rectángulo con el sol y la tierra (*Figura 1.10*). La recta tierra-luna $\overline{TL}$ es perpendicular a la recta sol-luna $\overline{SL}$ y por lo tanto el ángulo β entre las dos sería

[9] *Sir THOMAS*, A History of Greek Mathematics . Vol I, 1981

de 90º, como se aprecia en la figura. Pudo deducir que la distancia $\overline{TS}$ es mayor que la distancia $\overline{TL}$, encontró la relación $\frac{\overline{TS}}{\overline{TL}} = \frac{20}{1}$, es decir que la distancia tierra-sol es 20 veces la distancia tierra-luna[10]. Desafortunadamente aunque todos sus métodos fueron correctos, la medición desde la tierra del ángulo α tuvo unos grados de error que afectaron el resultado. En realidad la relación de las distancias es de 400 a 1.

Eratóstenes (276 A.C.) Fue un matemático que se propuso encontrar cuál era el tamaño de la tierra y así opacar las objeciones que se habían hecho entorno a su esfericidad. Él sabía que en la ciudad de **Siena** por su ubicación cercana al trópico de cáncer, el 21 de junio el sol alcanzaba su máxima posición al medio día colocándose absolutamente vertical sobre la ciudad, es decir que a esa hora, sólo ese día los objetos no tendrían sombra.

Esto se verificaba al ver el reflejo del sol en todo el fondo de un pozo ubicado en Siena sólo al medio día. Si la tierra era plana entonces en una ciudad cercana como Alejandría ubicada a 800 Km, los rayos del sol incidirían con el mismo ángulo que incidirían los de Siena.

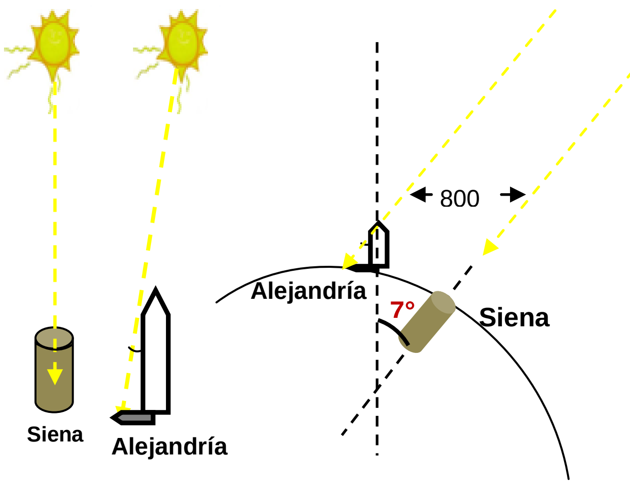


Figura 1.11: Muestra las ciudades sobre la superficie terrestre y como los rayos inciden en cada ciudad.

Eratóstenes utilizó el obelisco vertical en Alejandría para medir el valor de este ángulo. Al medio día el obelisco formaba una sombra que evidenciaba que los rayos del sol incidían con cierto ángulo en Alejandría (Figura 1.11)[11], diferente a lo que pasaba en Siena; midió el ángulo y obtuvo un valor de 7º. Lo que no era coherente con una tierra plana pero sí con un modelo de la circunferencia de la tierra. Eratóstenes mandó a medir la distancia entre ambas ciudades, y conocía el ángulo subtendido entre las dos ciudades de acuerdo con sus observaciones, así tenía todos los datos para determinar el radio de la Tierra con su conocido método de los arcos. Por consideraciones geométricas y usando la proporcionalidad que existe entre ángulos y arcos correspondientes de una misma circunferencia, y asignando al arco $\overset{\frown}{AS}$ como la distancia entre Alejandría a Siena y *Ct* como la circunferencia de la tierra, afirmó que: $\frac{Arco\,\overset{\frown}{AS}}{Ct} = \frac{\overset{\frown}{\alpha}}{360^{o}}$.

[10] Datos y modelo tomados de, *AVERBUJ EDUARDO*. Con el Cielo en el Bolsillo. 1990

[11] Modelo tomado del texto de AVERBUJ EDUARDO. Con el Cielo en el Bolsillo. 1990. Pero modificado por influencia de la información encontrada en el texto The Fontana History of Astronomy and Cosmology. JHON NORTH, 1994.

Obtuvo que el arco $\overset{\frown}{AS}$ era 1/50 de la circunferencia de la tierra, es decir la circunferencia de la tierra debía medir 50 veces el valor del arco *AS*. Aunque en sus resultados haya márgenes de error, lo que hay que recalcar es la aproximación a la trigonometría y el avance de la astronomía matemática en esta experiencia. Eratóstenes además propuso un calendario adoptado por los romanos en el 45 a.C. compuesto por 365 días y ¼ de día de duración, por lo tanto cada cuatro años se debía introducir un día más, lo que conocemos como año bisiesto.
El gran astrónomo de esta época fue ***Hiparco (190 A.C.)*** ya que le dió a la astronomía un rigor matemático, aplicó métodos aritméticos a modelos geométricos en los cuales siempre intervenían los ángulos; al intentar ligarlos con sus observaciones astronómicas inventa la trigonometría, tratando de calcular distancias que no se podían medir directamente.
Construyó una tabla de cuerdas[12] (*Figura 1.12*). Estas daban la longitud de las cuerdas en función del ángulo central correspondiente que crecía siempre en una cantidad específica para un círculo de radio determinado, eran similares a las modernas tablas del seno y coseno. Inició con cuerdas simples como las de 90º y 60º, empleó estas relaciones para encontrar distancias en línea recta a través de la bóveda celeste, pudo fácilmente relacionar los lados y los ángulos de todo triángulo plano.

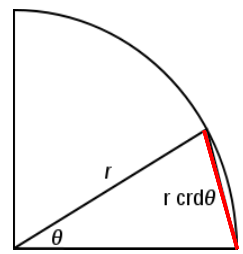


Figura 1.12

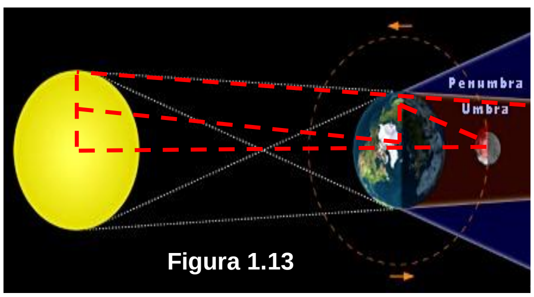


Figura 1.13

Fue autor del primer catálogo que incluía la posición de 1026 estrellas y una clasificación de acuerdo con su brillo[13]. Determinó la distancia y tamaño del Sol y la Luna observando el diámetro angular de la sombra de la tierra durante un eclipse lunar (*Figura 1.13*), simplificó la descripción de problemas como las salidas y puestas de sol y las estrellas mediante modelos que solo utilizaban círculos y triángulos en un plano. Hiparco afirmó que se podían calcular las coordenadas geográficas de un lugar a partir de los fenómenos astronómicos.

Estableció dos clases de año, el trópico y el sideral. Introdujo la teoría de los epiciclos para describir el movimiento del sol y la luna a través de la geometría, estas debían moverse en órbitas circulares y uniformes. Encontró cambios en algunas constelaciones y decidió comparar los registros existentes de la estrella *Espica.* Notó que en diferentes épocas su posición cambiaba notoriamente, comparó otras estrellas y sucedía lo mismo. Esto llevó a uno de sus más grandes hallazgos la precesión[14], el eje de la tierra cambia lentamente año tras año completando un círculo completo cada 25000 años.

---

[12] La cuerda de un ángulo es la longitud dimensional de una cuerda entre dos puntos en una unidad circular separada por un ángulo.

[13] *JHON NORTH*. The Fontana History of Astronomy and Cosmology, 1994.

[14] Este tema se explica de forma más completa en el siguiente capítulo.

El astrónomo ***Menelao (100 A.C.)*** fue otro precursor de la trigonometría al manejar los triángulos esféricos. Simultáneamente desarrolló otro método para resolver problemas con triángulos planos, el teorema que lleva su nombre sirve para calcular las longitudes de arcos de esfera en función de otros arcos. Estas nuevas herramientas dieron la oportunidad de abordar y resolver problemas de astronomía esférica.

Plinio (27 D.C.) Prueba que la forma de la tierra es esférica usando la experiencia del barco, un observador desde la costa ve que a medida que el barco se aleja este va desapareciendo en el horizonte (*Figura 1.14*) lo que no debería pasar en una tierra plana.

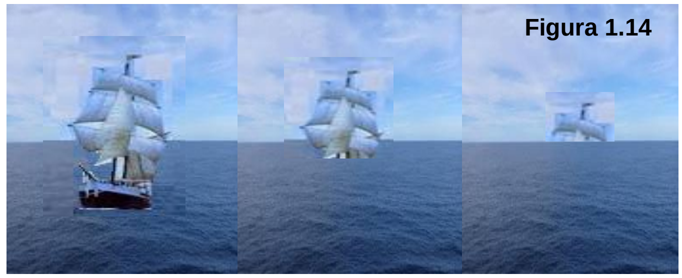


Figura 1.14

1.2.2 Grecia Siglo II D.C

El mayor geógrafo y astrónomo de este tiempo fue *Claudio Ptolomeo (100 D.C.)* autor de los trece volúmenes del Almagesto. En este aparecía la trigonometría y sintetizó la matemática, y la astronomía griega. Aplicó sus técnicas matemáticas a la solución de problemas astronómicos, ideó el sistema planetario como un modelo geocéntrico donde la tierra esta inmóvil en el centro (*Figura 1.15*) y los cielos tienen dos movimientos representados por dos círculos máximos, el ecuador celeste y la eclíptica. Es aquí donde estos modelos astronómicos empiezan a necesitar la trigonometría esférica. Dividió la tierra en 39 paralelos, construyó un mapa del mundo y las posiciones terrestres las representaban por la latitud y longitud. Elevó el nivel de la astronomía planteando la explicación geométrica de los eclipses y la corrección que se debe hacer a la posición aparente de la luna. El sistema de Ptolomeo alcanza unos 40 círculos aproximadamente girando todos al mismo tiempo, lo que lo convirtió en algo complejo y poco atractivo para los demás, pero en un reto para los astrónomos y matemáticos de la época. Este modelo geocéntrico fue apoyado por la iglesia y fue aceptado durante 15 siglos[15].

Figura 1.15

Ptolomeo, se considera como el mayor exponente de la Trigonometría en Grecia antigua, continuando los trabajos de Hiparco y Aristarco. Construye una tabla de cuerdas o tabla trigonométrica muy precisa calculada desde 1/2° hasta 180°, con incrementos de medio grado. Junto con la tabla explicaba cómo obtenerla e incluso daba ejemplos sobre cómo usarla para resolver triángulos rectángulos. Su teorema: *el producto de las diagonales de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia es igual a la suma de los productos de los lados opuestos* (*Figura 1.16*), en el caso particular de que uno de los lados del cuadrilátero sea el diámetro, conduce a las actuales fórmulas trigonométricas del seno y coseno de la suma y la diferencia de dos ángulos.

[15] Información obtenida del texto: *Ptolomeo el Astrónomo de los Círculos*. CARLOS DORCE. 2006

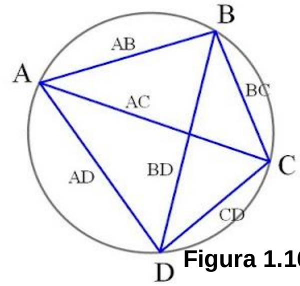


Figura 1.16

Así mismo, conocida la medida de la cuerda de un arco, calcula la cuerda del arco mitad, y, traducida al lenguaje actual, escribe la fórmula: $\mathbf{crd\theta = 2sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$

Utiliza la tabla de cuerdas para aplicar el teorema de Menelao sobre la esfera con valores concretos de arcos y empieza a resolver triángulos rectángulos esféricos[16] prolongando los lados a, b del triángulo hasta completar los arcos de 90º. Este se vuelve un instrumento fundamental para los astrónomos; también aplicó sus teorías trigonométricas a la construcción de relojes de sol y de astrolabios.

Los elementos más importantes de la trigonometría fueron surgiendo de forma lenta. Sus cálculos y teoremas geométricos aplicados a la astronomía casi hicieron de la trigonometría una ciencia matemática independiente; desafortunadamente, sus pocos conocimientos algebraicos no se lo permitieron. La trigonometría plana encontró en la cultura griega todo el soporte para desarrollarse ya que esta era útil para la astronomía y la astronomía esférica[17]. La tendencia es que las dos crecían simultáneamente, aunque la astronomía necesitaba más que nada la resolución de triángulos, se seguía considerando como la ciencia principal.

1.3 Oriente y Europa

1.3.1 India: Siglos II D.C – V D. C

Mucha de la geometría y trigonometría de la época fue creada para construir sus altares y templos. Los matemáticos hindúes eran casi todos astrónomos y fueron responsables de los nuevos descubrimientos en la teoría de la trigonometría, esta nueva rama actuó como un diccionario trasladando la geometría a los números y viceversa, aunque fue desarrollada por los antiguos griegos por primera vez, floreció con los indios.

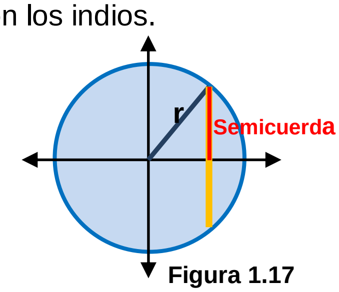


Figura 1.17

Una de sus grandes contribuciones a la historia de la matemática fue la introducción de lo equivalente a la función seno en trigonometría al reemplazar las tablas de cuerdas griegas por semicuerdas (*Figura 1.17*), usaban un ángulo de un triángulo rectángulo para hallar la proporción de los lados opuestos en relación al lado más largo. La relación entre el seno y coseno de arcos iguales era conocida por ellos. La principal razón de que los árabes e hindúes perfeccionaran la trigonometría fue la necesidad astronómica de una interpolación más precisa ya que el Seno permitía calcular distancias cuando no podemos tomar medidas directas.

---

[16] Triángulos dibujados sobre una superficie esférica. Ver características en el capítulo 3.

[17] Cuando la astronomía inicio a tratar a la tierra como una esfera, se introdujo el termino de astronomía esférica.

Los astrónomos indios utilizaban la trigonometría para encontrar la distancia relativa entre la tierra y la luna y la tierra y el sol. Esos cálculos se hacían cuando la luna está en cuarto creciente ya que en ese momento se encuentra en frente del sol y con la tierra forman un triangulo rectángulo. Los indios pudieron calcular que el sol está 400 veces más lejos de la tierra que la luna. ***Aryabhata I (476 d.*C.)** fue el primer matemático que usó la función trigonométrica de los senos para calcular la posición de los planetas; dio un valor muy aproximado a pi 3,1416 y utilizó este valor para medir la curva de la tierra[18].

La trigonometría hindú fue evidentemente una herramienta auxiliar para la astronomía tan útil como precisa. A pesar de que es evidente la influencia griega en la trigonometría hindú, parecen no haber tenido ocasión de adoptar la geometría griega, o bien no la aprovecharon. La diferencia entre la trigonometría india y la griega es que los indios intentaron encontrar la forma de calcular la función seno de cualquier ángulo.

1.3.2 Edad Media 500 D.C – 1400 D. C

Para esta época Ya se usan fórmulas trigonométricas, ***Al-Biruni (973)*** utilizó la fórmula de los senos en astronomía y para calcular la longitud y latitud de muchas ciudades, proyectó el hemisferio sobre un plano. ***Tabil (856)*** perfecciona el teorema de los senos en el triángulo esférico, ***Alhabas (810)*** introduce la función trigonométrica de tangente, ***Abu Nars (1000)*** encuentra el teorema del seno. ***Kia – Shao (1220)*** utiliza métodos iterativos[19] para aplicar ecuaciones trigonométricas en problemas astronómicos. ***At – Tusi (1236)*** proporciona por primera vez un trabajo completo de trigonometría empleando el triángulo polar.

Al – Battani (IX) fue el primero en usar además de la geometría, el álgebra para aplicarla la trigonometría[20], y usó por primera vez la tangente y la cotangente como razones trigonométricas. En el siglo X también aparecen tablas de secante y cosecante, aunque ninguna se parece mucho a la trigonometría que conocemos hoy. A finales del siglo VIII los astrónomos árabes, que habían recibido la herencia de las tradiciones de Grecia y de la India, prefirieron trabajar con la función seno. En las últimas décadas del siglo X ya habían completado la función seno con las otras cinco funciones y habían descubierto y demostrado varios teoremas fundamentales de la trigonometría tanto para triángulos planos como esféricos.

Los árabes calcularon tablas precisas en división sexagesimal; su primer texto de trigonometría fue publicado en 1240 por el astrónomo persa ***Nasir Eddin*** sugiriendo el uso del valor de radio r = 1 en vez de r = 60, lo que produjo los valores modernos de las funciones trigonométricas.

---

[18] MORA JUAN. *Historia de las Matemáticas y la Astronomía en la India*, 2003

[19] Método para resolver ecuaciones utilizando aproximaciones sucesivas, generalmente se usa en problemas que intervienen un considerable número de variables.

[20] STRUIK DIRK. *A Concise History of Mathematics*. 1967

1.3.3 Renacimiento Siglo XV y XVI

Con el renacimiento los trabajos sobre el estudio del círculo y la esfera conocidos como ciclometría empezaron a multiplicarse. Las tablas comúnmente usadas ya no eran suficientes y ***Von Gmunden (1460)*** vio la necesidad de construir tablas trigonométricas auxiliares más amplias y exactas consolidadas en un solo escrito, inicia a escribir y recopilar la información necesaria para su libro dese 1464 y su alumno ***Regiomontano*** termina el trabajo hacia 1533, publica un libro de cuatro tomos con el título De *triangulis planis et sphericis cum tabn lis sinuum*, el cual constituye el primer tratado completo europeo de Trigonometría plana y esférica[21], además de ser una novedad, era la primera vez que se mostraba como una disciplina independiente de la astronomía. En 1420 las coordenadas celestes latitud y longitud eclíptica se dan por primera vez no solo en grados sino también en minutos y los calendarios hacia 1450 cuentan con predicciones sobre eclipses y ubicación de constelaciones, determinados previamente por el uso de cálculos trigonométricos en la observación astronómica.

Los métodos astronómicos de navegación en aquella época eran muy rudimentarios y se presentaba un gran problema al tratar de encontrar su posición exacta en altamar, lo que se resolvió con la aplicación de la trigonometría esférica en la astronomía esférica. Ya en el siglo XV, época de las grandes navegaciones, la trigonometría fue separada de la astronomía, alzándose como ciencia independiente de la mano de ***Regiomontano***, que trató de una manera sistemática todos los problemas sobre la determinación de triángulos planos y esféricos. Los avances para calcular la función seno de cualquier ángulo se desarrollaron al sur de la india. En el siglo XV ***Marava*** descubrió que podían sumarse cosas hasta el infinito, lo que se llamó series infinitas y buscó la relación de estas series con la trigonometría y esas fórmulas se utilizan para calcular el seno de cualquier ángulo.

François Viète (1540-1603) estableció una fuerte conexión entre los trabajos trigonométricos y algebraicos, se le podría considerar como uno de los padres del enfoque analítico de la trigonometría, esto es, la goniometría. Para hacer más fáciles los cálculos, los matemáticos desarrollaron determinadas relaciones trigonométricas, lo que llevó a la confección de numerosas tablas trigonométricas en las que trabajaron los astrónomos Copérnico y Kepler.

Copérnico trataba de construir un nuevo sistema astronómico (*Figura 1.18*), aunque mantiene la idea de las órbitas circulares. Hacia 1539 hace circular un escrito en el que manifiesta que el modelo geocéntrico de Ptolomeo es erróneo y que en el centro del sistema planetario está el sol y no la tierra. Además explica los movimientos de rotación y translación de la tierra, retomando la visión heliocéntrica. En 1542 se publica una trigonometría dada por Copérnico, en su obra *Derevolutions* en la que aborda también los triángulos planos y esféricos, fue el primero en hacer una demostración sencilla de la formula fundamental de la trigonometría esférica. Su modelo heliocentrista tuvo pocos

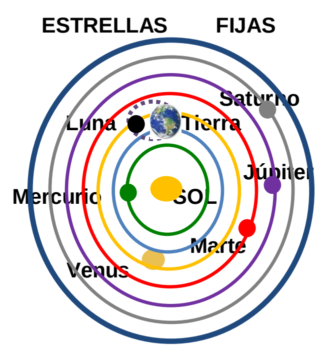


Figura 1.18

[21] HOFFMAN JOSEPH. *Historia de la Matemática*, 2002

partidarios entre los académicos, uno de ellos fue el astrónomo ***Reinhold*** quien hacia 1551 edita las tablas prusianas[22] respaldando la teoría copernicana, estas tablas remplazaron rápidamente las tablas alfonsinas[23].Ya en 1576 el modelo de Copérnico se impone sobre el de Ptolomeo.

En 1583 el sacerdote ***Giordano Bruno*** defiende públicamente el modelo heliocentrista por lo cual fue acusado de hereje y quemado en la hoguera. En 1562 las universidades permitían que sus estudiantes eligieran entre el modelo de Copérnico y el de Ptolomeo; hasta 1594 las lecturas de Copérnico pasaron a ser obligatorias. La comunidad científica fue aceptando cada vez más la visión heliocéntrica mientras la comunidad eclesiástica promovió un movimiento en contra de ella. Simultáneamente a la nueva visión del sistema planetario también se desarrollaron trabajos en el aspecto trigonométrico. En 1596 se imprimen las tablas de las funciones trigonométricas de ***Rhaeticus*** hasta con 10 cifras decimales, en 1613 se completan las tablas con la tabla de senos de *Pitiscus*. El cálculo de todas estas tablas se simplifica con el uso de los métodos prostaferéticos[24].

La velocidad con la que avanzaba la astronomía hizo necesario simplificar y perfeccionar los cálculos trigonométricos ya que su cálculo era larguísimo cuando se usaban números grandes. ***Werner*** proporcionó las herramientas para reducir los cálculos en la multiplicación y división de la trigonometría esférica. Desafortunadamente para él ***Tycho Brahe (1546)***, los dio a conocer antes aplicándolo a sus trabajos sobre astronomía. Fue el primero que introdujo el efecto de la refracción atmosférica en los cálculos astronómicos sobre la posición de los astros. Logró compilar las observaciones meramente descriptivas sobre el movimiento de los planetas con una geometría descriptiva, estos aportes fueron finalmente dados a conocer por su estudiante Kepler mas adelante. ***Euler (1775)*** descubrió las relaciones que habían entre las funciones circulares seno y coseno, también hizo aportes al problema de los tres cuerpos sol – tierra – luna y al de la perturbación de las órbitas planetarias. Antes del siglo XVII todas las estrellas se consideraban fijas hasta que Halley descubrió que algunas tenían movimiento relativo dando así una nueva visión a la astronomía. Hacia ***1844 Bessel*** logró calcular la distancia de una estrella por medios trigonométricos, utilizó como herramienta básica el Heliómetro para medir las pequeñas separaciones angulares entre estrellas.

1.3.4 Siglos XVII y XVIII: Se libera la Trigonometría de la Astronomía

En 1616 la iglesia católica anunció que el libro de Copérnico era una herejía y por lo tanto se consideraba prohibido leerlo o enseñarlo. En *1637 Viete* escribe un extenso libro

[22] Tablas astronómicas calculadas según los métodos matemáticos de Copérnico con base a su modelo heliocéntrico.

[23] Tablas utilizadas para calcular las posiciones de cuerpos celestes, teniendo como base el modelo geocéntrico de Ptolomeo.

[24] Este método permitía convertir el producto de funciones seno y coseno en suma o resta de las mismas.

sobre astronomía en la que manifiesta su desacuerdo con el modelo de Copérnico y corrige también el sistema de Ptolomeo. Influenciado por las tablas de Rhaeticus y Regiomontano desarrolla tablas de hasta 10 decimales para las seis razones trigonométricas, descubrió la relación de los ángulos múltiples y también perfecciona la trigonometría esférica usando el teorema del seno y en parte del coseno. Aplica el álgebra a las trigonometrías plana y esférica, obteniendo muchas de las identidades fundamentales actuales completando casi la trigonometría elemental no analítica. *Pitiscus (1613)* publica las que son consideradas las mejores tablas hasta la fecha, contiene valores para los ángulos de seno con intervalos de 10 segundos y las funciones seno hasta con 15 cifras decimales.

Kepler (1604) al contrario de algunos de sus predecesores pretende crear un sistema astronómico desde las observaciones prácticas, adopta la teoría heliocéntrica y utiliza en sus trabajos matemáticos las secciones cónicas, especialmente la elipse. Se dedicó a corregir el error de las predicciones en las órbitas, inició probando con movimientos circulares pero el error se mantenía por lo que infirió que la figura de las órbitas no era circular. Después de probar con diferentes óvalos encontró que su forma era la de una elipse, dando así una explicación coherente en astronomía para el movimiento elíptico de los planetas (*Figura 1.19*), lo que se conoció como la 1 ley de Kepler. Sus tres leyes del movimiento fueron el fruto de miles de años de observación asociados a una geometría empírica del cielo, pero sobre todo de las observaciones de Tycho Brache.

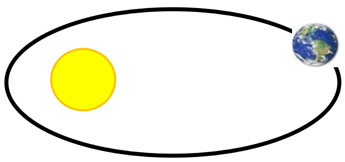


Figura 1.19

Galileo inicia una exploración del cielo en 1609 con el telescopio que aumentaba 30 veces el tamaño, para buscar argumentos prácticos que apoyaran las ideas de Copérnico. Descubrió que la superficie de la luna tenía montañas, observó lo que llamo "las orejas de Saturno", registró estrellas que antes no habían sido visibles y encontró 4 pequeños cuerpos que cambiaban de posición alrededor de Júpiter. Estos nuevos descubrimientos sacudieron la astronomía tradicional ya que ponían en tela de juicio el carácter perfecto de los cuerpos celestes y el hecho de que no todo giraba alrededor de la tierra. En 1615 el dominico Lorini indignado por las afirmaciones de Galileo solicitó se juzgara; fue entonces condenado a no enseñar ni defender públicamente el modelo copernicano. En 1632 haciendo caso omiso a la sentencia, publicó "el Diálogo" que manifestaba una defensa total a las ideas de Copérnico, por lo que se le encerró en prisión domiciliaria por tiempo indefinido.

En ***1668 Mercator*** descubrió sucesiones que permitían calcular la función seno partiendo del ángulo y viceversa, dando espacio a lo que se conoce hoy como arco seno. Hacia 1700 la trigonometría pasa de ser una ciencia auxiliar a una disciplina matemática independiente. Ya habiéndose establecido una excelente trigonometría plana y esférica ***Lambert*** en 1765 y ***Legendre*** en 1787 demuestran cómo la trigonometría plana puede convertirse en esférica. En 1822 la iglesia retiró la prohibición impuesta desde 1616 de leer o promover ideas copernicanas.
El problema de determinar la forma de la tierra llamaba la atención de los astrónomos de esta época. La academia de ciencias de Francia se propuso medir la longitud de dos arcos de meridiano de 1 grado. Para comprobar el achatamiento era necesario hacer estas mediciones en una latitud alta y otra cercana al ecuador terrestre. En 1735 se midió en el Perú y la otra cerca al círculo polar ártico, ***Bouquer*** demostró que al aumentar la latitud también aumenta la longitud de un arco de meridiano.

Para que la trigonometría pudiera considerarse una ciencia matemática independiente como lo era la geometría, primero tuvo que hacerse analítica hacia el siglo XVIII. Cuando la astronomía moderna con Newton, desplaza a la astronomía de posición se usaron las funciones trigonométricas como herramienta matemática indispensable para la mecánica celeste, sin que esta tuviera que ver con la resolución de triángulos. El sen y cos basan su importancia en las ciencias por sus propiedades de periodicidad y sencillez y no por la resolución de triángulos[25].

Hacia 1809 ***Gauss*** motivado por sus estudios sobre las trayectorias de los asteroides, publicó un trabajo con un análisis matemático agradable, en este el movimiento de los cuerpos celestes que orbitan al sol lo hacen en secciones cónicas. En 1854 Riemann creó un nuevo tipo de geometría centrada en la esfera como cuerpo de estudio, sus líneas rectas ahora eran geodésicas, su espacio no tiene límites pero es finito y se conoció como geometría esférica.

Desafortunadamente la geometría y trigonometría esférica pasa inadvertida para los estudiantes de hoy; solo si está aprendiendo astronomía de posición la conocería, de lo contrario para muchos esta parte de la trigonometría no existe.

[25] *MORRIS KLINE*. El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días.

2. NOCIONES BÁSICAS DE ASTRONOMÍA DE POSICIÓN

Cuando observamos el cielo solemos maravillarnos con su belleza y armonía; esta percepción se vuelve más apasionante cuando aprendemos a identificar el cuerpo celeste que observamos, bien sea una estrella, o un planeta, o la luna, etc., cuando podemos caracterizarla en un lugar específico del espacio y entendemos que también se relaciona con la ubicación de quien observa. Esta relación y su descripción hacen parte de lo que se conoce como astronomía de posición, conocer sus elementos y propiedades nos permite encontrar la posición de cualquier astro y describir su movimiento.

En el presente capítulo veremos algunos términos y conceptos astronómicos básicos necesarios para entender este campo de la ciencia, además de describir las herramientas más importantes, como lo son el concepto de esfera celeste y las coordenadas astronómicas.

2.1 El Planeta Tierra

Nuestro planeta tierra al igual que muchos cuerpos celestes se mueve, tiene diversos rasgos que la hacen única y nos permiten describirla, por ejemplo su forma achatada. A continuación mencionaré algunas de las características más relevantes para su estudio.

ROTACIÓN: Es el movimiento que realiza la tierra cada 23 horas 56 minutos, en dirección de occidente W (Oeste) a oriente E (Este), alrededor de su eje que va de polo norte N a polo sur S. La sucesión del día y la noche se asocian a este movimiento ya que mientras la mitad de la tierra está iluminada por el sol y es de día, la otra parte está oscura y es de noche. (*Figura 2.1 a*)

TRASLACIÓN: La tierra se mueve alrededor del sol en una órbita elíptica de 930 000 000 de Km, la cual completa después de 365 días, 5 horas y 57 minutos. Esto quiere decir que la tierra se traslada aproximadamente 29 Km por segundo. La forma de su órbita hace que la distancia entre la tierra y el sol cambie durante el año, lo que está relacionado con las estaciones, aunque también influye la inclinación del eje terrestre.

El eje de rotación de la Tierra tiene una inclinación de casi 23°.5, por esta razón los rayos solares llegan a la superficie terrestre con distinta inclinación para observadores en diferentes latitudes. Cuando los rayos solares caen en forma oblicua sobre el hemisferio sur, el clima es frío y los días son más cortos al mismo tiempo, el hemisferio norte recibe más luz solar, los días son más cálidos y largos. Siempre que es invierno en el norte es verano en el hemisferio sur y viceversa (*Figura 2.1 b*)[26].

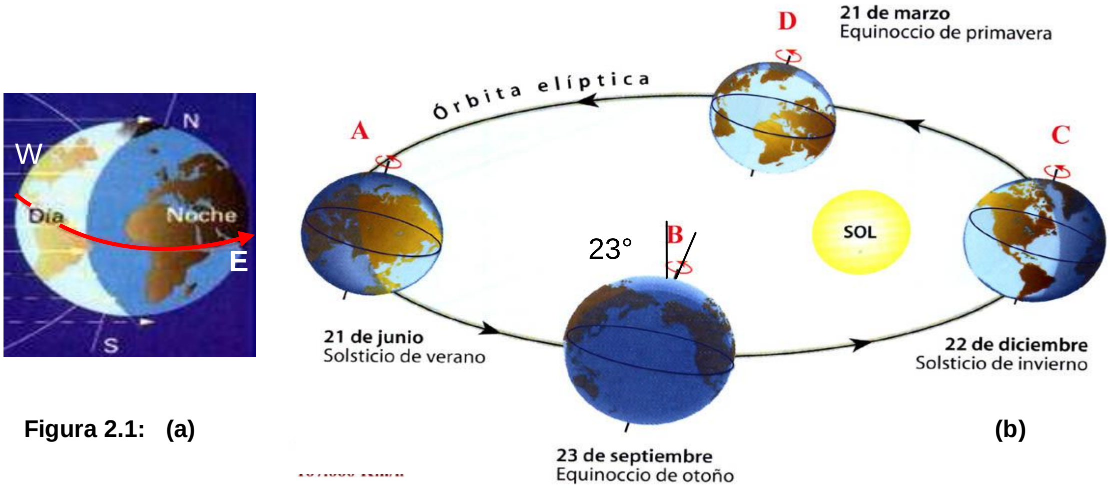


Figura 2.1: (a) **(b)**

PRECESIÓN: Es un movimiento parecido al que describe un trompo, el eje de rotación de la tierra se mueve alrededor de un eje fijo describiendo un círculo en dirección Oeste (W), esto se debe a la atracción gravitatoria que produce el exceso de masa que la tierra tiene en la zona ecuatorial. Se caracteriza por ser lento ya que completa una rotación en 25 800 años.(*Figura 2.2*)

NUTACIÓN: Movimiento producido también por la atracción gravitacional combinada del sol y la luna sobre una tierra no esférica[27]. Son movimientos de vaivén u oscilaciones del eje de la tierra. (*Figura 2.2*)

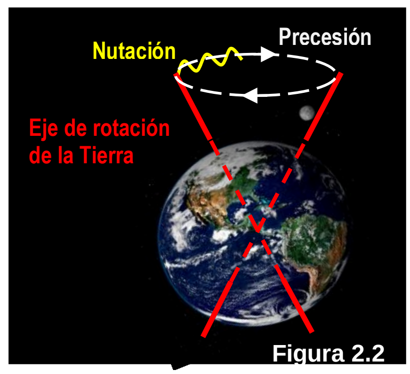


Figura 2.2

2.1.1 Coordenadas Geográficas

Para ubicar diferentes lugares en el globo terrestre, describir la posición de un observador, la navegación y la observación astronómica se utilizan las coordenadas geográficas, definamos sus variables más importantes representadas en la *grafica 2.3*, dada a continuación.

POLOS: En los extremos superior e inferior, alrededor del eje de la Tierra se ubican el polo norte y polo sur.

ECUADOR: Es el círculo máximo perpendicular al eje terrestre, divide la Tierra en dos partes que son el hemisferio norte y el hemisferio sur, de tal forma que cada polo está separado del Ecuador 90°.

---

[26] Las figuras *2.1 a y 2.1 b*, fueron obtenidas del sitio Web www.doslourdes.net. En (a) se muestra la iluminación de media esfera terrestre debido a la luz procedente del sol. En (b) se ilustra la translación de la tierra alrededor del sol, incluyendo la oblicuidad del eje polar.

[27] DÍAZ JORGE. *Elementos Básicos para el Estudio de la Astronomía*, 1991.

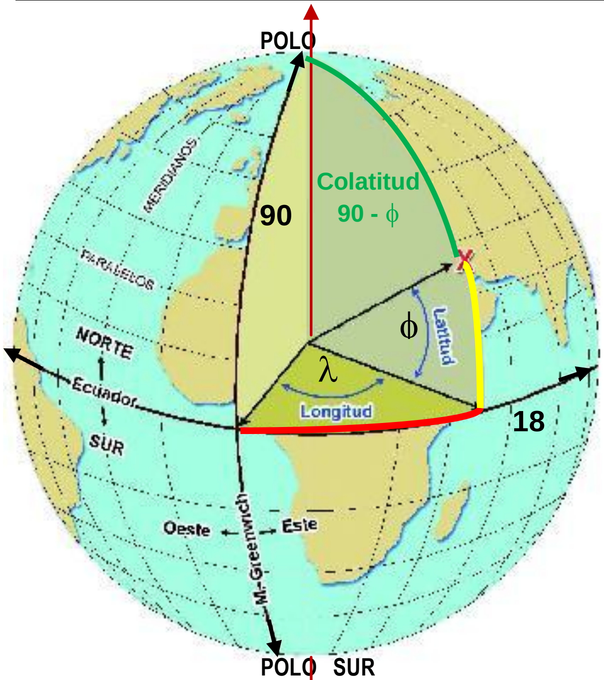


Figura 2.3: Coordenadas Esfera Terrestre

MERIDIANOS: Son semicírculos máximos que van de polo a polo pasando por el Ecuador. El más importante es el meridiano de Greenwich conocido como meridiano primario.

LATITUD ϕ: Es el ángulo de elevación medido sobre cualquier meridiano desde el Ecuador hacia los polos, sus unidades son los grados (°), minutos (´) y segundos (¨) sexagesimales. La latitud permite dar la posición de un lugar o un observador en dirección Norte o Sur; el ecuador tiene latitud cero, el Polo Norte ϕ_N = 90° y el Polo sur ϕ_S = 90°, por esto los valores de la latitud solo pueden oscilar entre 0° y 90°. Para cálculos la latitud en el Norte se considera positiva y en el Sur negativa.

COLATITUD: Es el complemento de la latitud, es decir la medida sobre el resto del meridiano del arco comprendido entre la posición del observador y el polo más cercano. Es usada para solucionar problemas de posición y se calcula con la expresión c = 90 - ϕ.

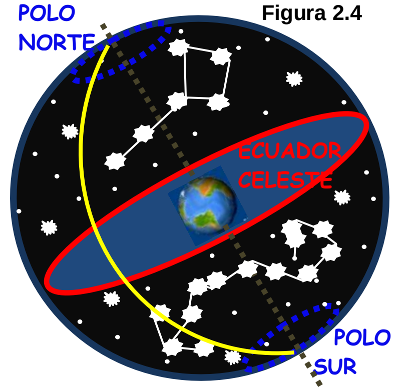
LONGITUD λ: Es el ángulo medido sobre el Ecuador desde el meridiano de Greenwich hasta el meridiano del lugar deseado. Sus unidades son los grados, minutos y segundos sexagesimales. La longitud permite dar la posición de un lugar o un observador en términos de si está al este (E) de Greenwich o si el lugar se ubica al Oeste (W) de Greenwich, hablándose respectivamente de longitudes este, λ_E, y de longitudes Oestes, λ_W; cada una de ellas toma valores entre 0° y 180°.

Conociendo la longitud y latitud se puede ubicar correctamente un lugar sobre la superficie terrestre, por lo cual son usadas siempre para conocer la posición del observador lo que es muy importante y útil para la astronomía de posición.

2.2 Esfera Celeste

Se usa como un sistema de referencia; es una esfera imaginaria con un radio inmensamente grande en la cual se ubican los astros para orientarnos y representar sus posiciones relativas. Su prototipo es similar al de la esfera terrestre como vemos en la *figura 2.4*.
Los cuerpos celestes se ubican a lo largo de toda la esfera, el ecuador celeste **(EC)** divide la esfera celeste en dos, el hemisferio norte celeste donde se encuentra el polo norte celeste **(PNC)** y el hemisferio sur celeste donde se encuentra el polo sur celeste **(PSC)**. Estos dos polos se producen por la intersección de la esfera celeste con el eje de rotación de la tierra.

Figura 2.4



Ahora, para la observación astronómica desde un lugar en la Tierra aparecen otros elementos que se deben tener presentes; para identificarlos los visualizaremos en las siguientes gráficas donde el centro de la esfera celeste pasa a ser el observador y no la tierra como en esta gráfica (*2.4*)[28]

ECUADOR CELESTE (EC): Es un circulo máximo, resultado de la intersección de la esfera Celeste con un plano que contiene el centro de la esfera celeste y es perpendicular al eje polar celeste.

MERIDIANO CELESTE: semicírculos máximos cuyos extremos son el PNC y PSC pasando por el EC, (*curva amarilla figura 2.4*).

Los conceptos[29] presentados a continuación a diferencia de los anteriores sí dependen de la ubicación del observador y estarán representados en las figuras *2.5* y *2.6*.

ZENIT (Z): Es el punto más alto ubicado sobre la esfera celeste, situado exactamente sobre el observador (*Figura 2.5*).

NADIR (Z'): Es el punto más bajo ubicado sobre la esfera celeste, situado exactamente debajo el observador, es totalmente opuesto al zenit, (*figura 2.5*).

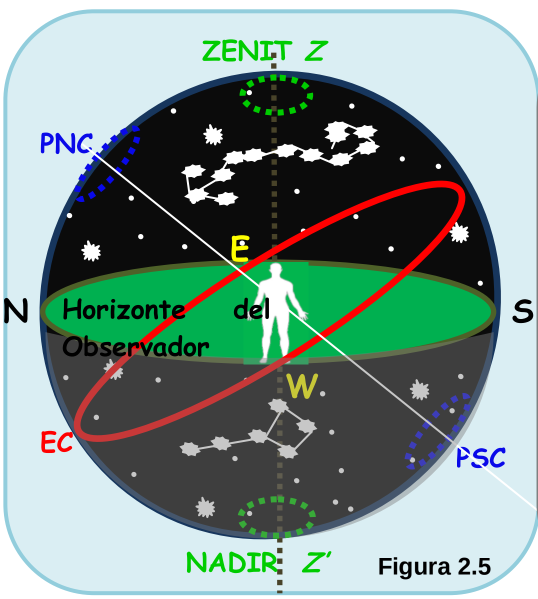


Figura 2.5

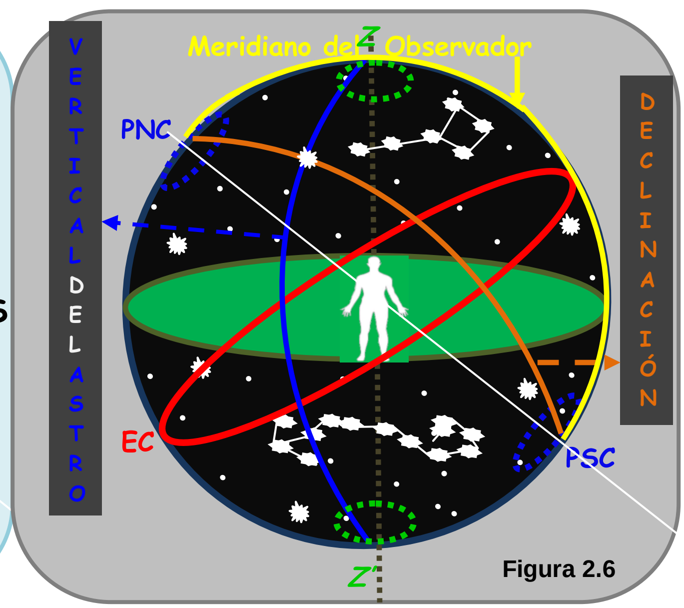


Figura 2.6

HORIZONTE DEL OBSERVADOR: Este es un plano fundamental para el observador, el cual podemos definir trazando la vertical local, digamos mediante el empleo de una

---

[28] Hay diferentes clases de esferas celestes dependiendo de su centro, es Geocéntrica si su centro es el centro de la Tierra y Topocéntrica si el centro es el observador.

[29] La referencia, aunque no textual, de los siguientes conceptos se ha basado en definiciones hechas en el texto, *Elementos de Astronomía de Posición*. PORTILLA JOSE GREGORIO. 2001

plomada, el cual es perpendicular allí a un plano único, el cual es el plano horizontal del observador (*Figura 2.5*).

HORIZONTE CELESTE: Es un círculo máximo que es generado por la intersección de la esfera celeste con el plano horizontal del observador. En dicho plano está el observador, centro de la esfera celeste Topocéntrica (*Figura 2.5*)[30].

PUNTOS CARDINALES: Estos puntos cardinales son muy importantes en la orientación del observador (*Figura 2.5*). Metodológicamente se pueden definir en términos geométricos y astronómicos de dos formas diferentes. El punto cardinal Norte (N) lo podemos encontrar como el punto de intersección del horizonte celeste, con el semicírculo máximo trazado con extremos cenit (z) y nadir (z´), pasando por el polo norte celeste (PNC). A los semicírculos máximos cuyos extremos están en (z) y (z´) se les denomina verticales; así, la vertical del PNC, genera al punto cardinal Norte. Similarmente la vertical que contiene al polo sur celeste (PSC) intersecta al horizonte celeste en el punto cardinal Sur (S).

Es costumbre llamar meridiana al segmento de recta trazada en el plano horizontal del observador, que incluye al observador y cuyos extremos están en los puntos cardinales N y S. Los puntos cardinales Este (Oriente E) y Oeste (Occidente W), son los dos puntos que se obtienen de la intersección del horizonte celeste con el círculo máximo denominado ecuador celeste (EC), siendo el punto cardinal Este aquel situado del lado en el que aparece el movimiento diurno aparente de los astros.
Geométricamente las coordenadas Norte, Sur, Oriente y Occidente, ubicadas sobre el horizonte del observador, dividen el círculo en cuatro partes iguales de 90° cada uno. (*Figura 2.5*).

MERIDIANO DEL OBSERVADOR: Semicircunferencia que va desde el PNC hasta el PSC pasando por el zenit Z del observador, depende del lugar donde se ubique el observador. (*Curva amarilla figura 2.6*).

DECLINACIÓN DEL ASTRO (δ): Semicircunferencia perpendicular al EC que va del PNC pasando por la estrella o el astro hasta el PSC. Cuando esta exactamente sobre el ecuador celeste decimos que su declinación es $\delta = 0°$. En caso contrario el astro está o bien en el hemisferio norte celeste o en el hemisferio sur celeste. Su valor se expresa como la longitud del arco trazado sobre el meridiano celeste del astro desde el EC hasta el astro.
Es costumbre asociar a la declinación valores positivos a los astros ubicados en el hemisferio norte celeste y negativos a los astros ubicados en el hemisferio sur celeste. De este modo las declinaciones de de los polos N y S respectivamente son iguales a $\delta_N = +90°$ y $\delta_S = -90°$ (*Curva Naranja figura 2.6*)

VERTICAL DEL ASTRO: Semicircunferencia perpendicular al horizonte del observador, va desde el zenit z del observador pasando por el astro hasta el nadir z´ (*curva azul figura 2.6*)

---

[30] La imagen y algunas definiciones han sido adaptadas de los apuntes de la cátedra Enseñanza de la Astronomía. Universidad Nacional de Colombia. Docente Benjamín Calvo

2.3 Coordenadas Astronómicas

Usando los elementos vistos anteriormente describiremos algunos tipos de coordenadas que nos permitan solucionar problemas de astronomía de posición a un nivel básico.

Las coordenadas astronómicas nos permiten describir la posición de los astros en la esfera celeste, encontrar sus distancias, saber qué estamos viendo en una observación del cielo o hacia dónde mirar. Hay diferentes tipos, como las coordenadas horizontales, coordenadas ecuatoriales horarias, coordenadas ecuatoriales geocéntricas, coordenadas eclípticas y coordenadas galácticas, las cuales se identifican por su tipo de esfera celeste, su círculo fundamental y puntos de referencia.

Para definir un sistema de coordenadas astronómicas procedemos de la siguiente forma:

1. Definimos el tipo de esfera celeste.
2. En la esfera celeste se escoge un círculo máximo, conocido como círculo fundamental, para tales coordenadas.
3. Sobre el círculo fundamental se escoge un punto de referencia y un sentido.

Para poder ubicar un astro mediante el empleo de coordenadas astronómicas, siempre se le deben asignar una pareja de coordenadas C_1 y C_2, después de definir los puntos anteriores. La primera coordenada C_1 es el valor de la longitud del arco que va desde el punto de referencia hasta el semicírculo que contiene al astro en el sentido de giro; varía de 0° a 360° (*Figura 2.7*). La segunda Coordenada C_2 es el valor de la longitud del arco medido sobre el semicírculo que contiene al astro desde el círculo fundamental hasta el astro; varía según el hemisferio donde esté el astro de, 0° a 90° en un hemisferio y de 0° a – 90° en el otro hemisferio. Lo anterior asume que todo el circulo máximo divide a la esfera celeste en dos superficies de igual extensión, llamadas hemisferios.

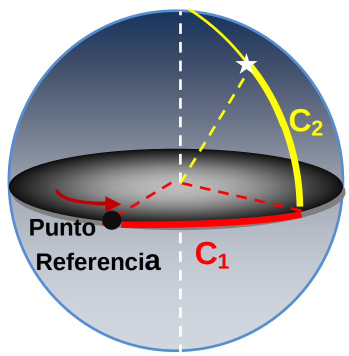


Figura 2.7

2.3.1 Coordenadas Horizontales

Estas coordenadas tienen como base una esfera celeste Topocéntrica, es decir, con centro en el observador, para ubicar un astro en la esfera celeste. El círculo fundamental de estas coordenadas es el horizonte celeste del observador. Los polos del horizonte celeste son el zenit z y el nadir z´, y en él su punto de referencia es el punto cardinal Norte N. El sentido de giro tiene dirección hacia el Oriente E. (*Figura 2.8*)

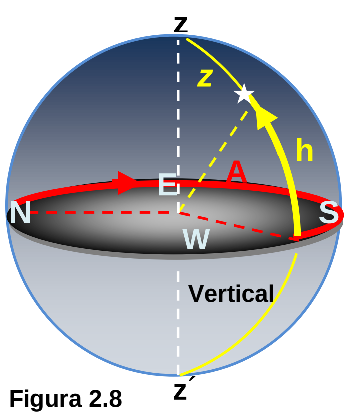


Figura 2.8

Su primera coordenada se conoce como Azimut (**A**), se mide desde el N en sentido E hasta la vertical del astro; la segunda coordenada es la altura (**h**) medida sobre la vertical del astro desde el horizonte celeste hasta el astro. Si está por encima del horizonte celeste es positiva ya que sería visible, en caso contrario sería negativa. La distancia cenital (z) es el complemento de la altura, medida desde el zenit hasta el astro.

$$0° \leq A < 360° \qquad -90° \leq h \leq 90° \qquad z = 90° - h$$

En estas coordenadas el cenit ***z*** tiene altura **h** = +90° y el nadir **z´** altura h = -90°. Los puntos cardinales tienen altura de 0° ya que están sobre el horizonte celeste, sus valores del Azimut son; A = 90° para el Este, A = 180° para el Sur, A = 270° para el Occidente. El cenit ni el nadir no cuentan con esta coordenada ya que estos son los polos del horizonte celeste.

2.3.2 Coordenadas Ecuatoriales Horarias

Estas coordenadas utilizan una esfera celeste centrada en el observador por lo que es Topocéntrica. El círculo fundamental es el ecuador celeste **EC**, sus polos son el polo Norte **PNC** y sur celeste **PSC**; su punto de referencia es el punto de intersección entre el meridiano del observador y el ecuador celeste, y desde este punto se gira en sentido de Oriente E a Occidente W.

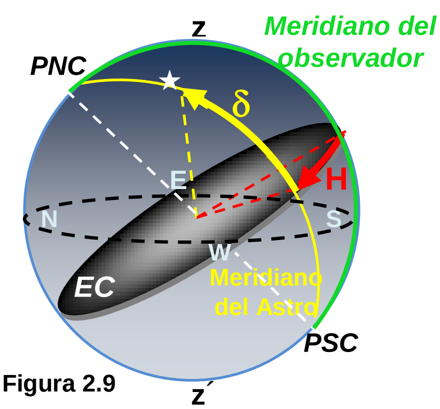


Figura 2.9

La primera coordenada se conoce como Ángulo Horario (**H**) se mide sobre el EC desde el meridiano del observador hasta el meridiano del astro. Su característica más importante es que varía homogéneamente con el tiempo por lo que se le asocian también unidades de tiempo[31], horas (^{h}), minutos (^{m}) y segundos (^{s}). Miremos su equivalencia con el sistema sexagesimal teniendo en cuenta que la esfera celeste completa 360° en 24 horas en su movimiento diurno aparente.

$$1^h = 15° \qquad 1^m = 15´ \qquad 1^s = 15´´$$

La segunda coordenada es la Declinación (δ), se mide sobre el meridiano celeste del astro desde el EC hasta el astro (*Figura 2.9*). La declinación se considera positiva si está por encima del EC en el Hemisferio Norte Celeste, pero si esta en el Hemisferio Sur Celeste se considera negativa; en conclusión:

$$0° \leq H < 360° \text{ ó también } 0^h \leq H < 24^h$$

$$-90° \leq \delta \leq 90° \quad \begin{matrix} 0° \leq \delta \leq 90° & \text{Astros HNC} \\ -90° \leq \delta \leq 0° & \text{Astros HSC} \end{matrix}$$

Una alternativa para mantener el valor de la declinación positiva, es añadirle al símbolo δ las letras N o S mayúsculas para especificar el hemisferio celeste donde está el astro.

$$0° \leq \delta_N \leq 90° \ \text{Astros HNC} \qquad 0° \leq \delta_S \leq 90° \ \text{Astros HSC} \qquad \delta = 0° \ \text{Astros en el EC}$$

---

[31] A E ROY. *Astronomy Principles and Practice*. cuarta Edición

2.3.3 Coordenadas Ecuatoriales Geocéntricas

Utiliza la Tierra como centro de la esfera celeste, por lo tanto se habla de una esfera celeste geocéntrica, estas coordenadas no se ven afectadas por la posición geográfica del observador, su círculo fundamental es el Ecuador Celeste y su punto de referencia es el punto vernal[32] ♈, desde el cual se gira hacia el E.

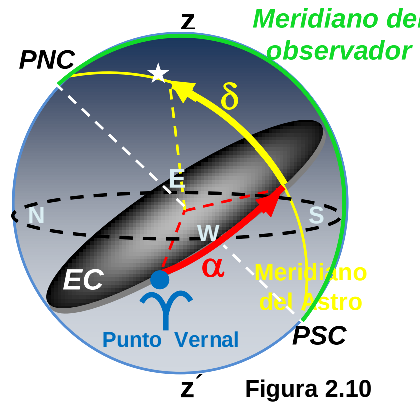


Figura 2.10

Su primera coordenada es la Ascensión Recta (α); esta se mide desde el punto vernal sobre el **EC** hasta el meridiano del astro en unidades de tiempo, horas (h), minutos (m) y segundos (s). La segunda coordenada es la Declinación (δ) (*Figura 2.10*), igual a la definida en las coordenadas Ecuatoriales horarias. Los intervalos en que pueden variar estas coordenadas son:

$$\mathbf{0° \leq \alpha < 360°} \text{ ó también } \mathbf{0^h \leq \alpha < 24^h}$$

$$\mathbf{-90° \leq \delta \leq 90°}, \ \delta_N \text{ de } 0° \text{ a } 90° \text{ y } \delta_S \text{ de } 0° \text{ a } 90°$$

2.4 Movimiento Aparente de Cuerpos Celestes

Cuando observamos el cielo vemos que el sol, las estrellas, la luna y los planetas cambian su posición o se están quietos aparentemente con el pasar del tiempo. A continuación describiremos las características más importantes del movimiento de estos cuerpos para entender más de lo que vemos y porque lo vemos.

2.4.1 Estrellas

Cuando vemos las estrellas intentamos buscar en el cielo las constelaciones con formas fáciles de identificar. A lo largo de la noche creemos que mantiene su posición y que al observarla nuevamente en la noche siguiente a la misma hora tendrá la misma ubicación, si fuera así durante todo el año veríamos las mismas constelaciones, pero esto no pasa. Resulta que cada noche las estrellas avanzan un arco de 1° por lo tanto después de aproximadamente 6 meses ya no se encontrarán en el hemisferio visible del observador.
Es decir que después de un tiempo las estrellas que no eran visibles ya se pueden observar y las visibles ya no. Por eso durante lo largo del año vamos viendo diferentes constelaciones. En la figura (*2. 11*) se ve como la constelación de escorpión va avanzando.

También hay estrellas que van a ser visibles para el observador continuamente ya que siempre van a estar por encima del horizonte del observador sin importar si están culminando. Se les conoce como **estrellas circumpolares**. (*Figura 2. 12*)

---

[32] Es el punto donde el Ecuador Celeste se intercepta con la Eclíptica. Se explicara más adelante.

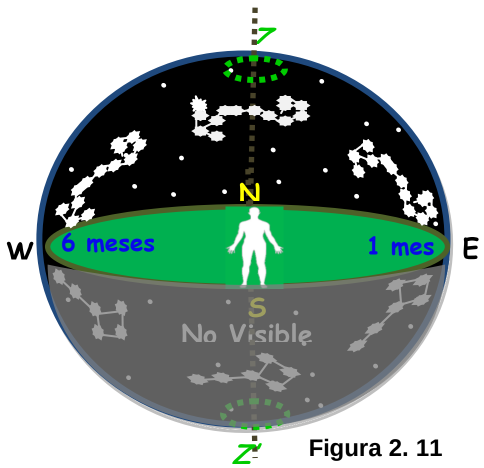


Figura 2. 11

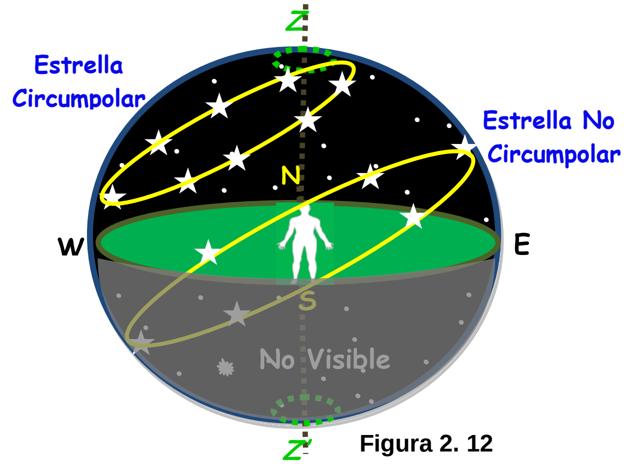


Figura 2. 12

2.4.2 El Sol – La Eclíptica

Históricamente el hombre se ha preguntado como el sol influye en la dinámica de la tierra, su curiosidad lo llevó a registrar día tras día y año tras año la salida y puesta de sol sobre el horizonte. Encontró que siempre producía sombra pero curiosamente su dirección cambiaba, que dos veces al año esta sombra desaparecía y solo ocurría cuando el sol está en el zenit. Esto mostraba que la declinación del sol cambiaba a lo largo del año. En las siguientes figuras[33] (*2.13 a*) y (*2.13 b*) podemos ver que el lugar de salida y puesta del sol cambian durante el año, lo que ayudó a construir el concepto de la Eclíptica

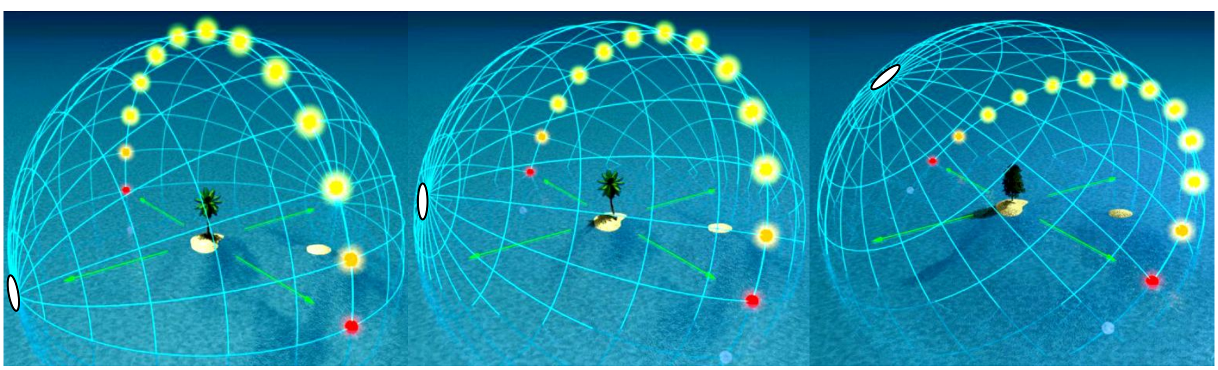


Figura 2. 13 (a): Transcurso del equinoccio en tres latitudes diferentes del planeta

En efecto en la figura *2.13 (a)* mostramos el transcurso del día durante un equinoccio para tres tipos de observador: en la izquierda para un observador ecuatorial, los puntos cardinales N y S, corresponden respectivamente a los polos celestes PNC y PSC. En el centro para un observador en latitudes bajas y a la derecha para un observador con latitudes altas, note en este último que el PNC está bastante elevado sobre el horizonte celeste. Cuantitativamente la altura del polo celeste visible, es igual en valor numérico al de la latitud geográfica correspondiente.

---

[33] Imágenes tomadas de la presentación "Coordenadas Astronómicas II", de la cátedra: Enseñanza de la Astronomía. Docente Benjamín Calvo, Universidad Nacional de Colombia.

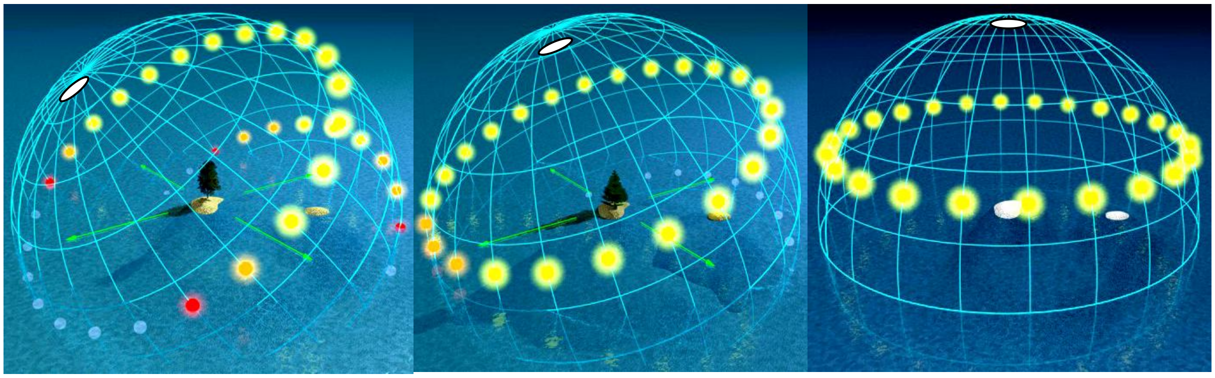


Figura 2. 13 (b): Transcurso del Solsticio en tres latitudes diferentes del planeta

En la figura (*2.13 b)*, aparecen las salidas y puestas de sol para las mismas tres latitudes de la figura (*2.13 a)*, pero esta vez para la fecha del solsticio de Junio. En los tres casos la salida del sol ocurre siempre al norte del punto cardinal Este, mientras que para el solsticio de Diciembre la salida del sol acontece al Sur del punto cardinal Este.

Resumiendo, vemos que el sol en el transcurso del año se está desplazando en la esfera celeste en sentido este a lo largo de un círculo máximo conocido como Eclíptica, casi a un promedio de 1° por día. En ese desplazamiento barre 13 constelaciones, en la nomenclatura moderna: Piscis, Aries, Tauro, Geminis, Cáncer, leo virgo, libra, escorpión, ofiuco, sagitario, capricornio y acuario, volviendo a Piscis nueva mente. A este conjunto de constelaciones se le conoce como zodiaco, excluyendo a Ofiuco.

En síntesis la Eclíptica es la trayectoria aparente que sigue el sol sobre la esfera celeste visto desde la tierra, el cual se puede obtener al extender el plano de la órbita que describe la tierra alrededor del sol en un año (Figura 2.14 (a)). Este plano se encuentra inclinado con respecto al plano del ecuador terrestre aproximadamente 23°; este ángulo se denomina como la oblicuidad de la eclíptica (ε) y es el mismo ángulo que hay entre la Eclíptica y el ecuador celeste.

Figura 2.14(a)

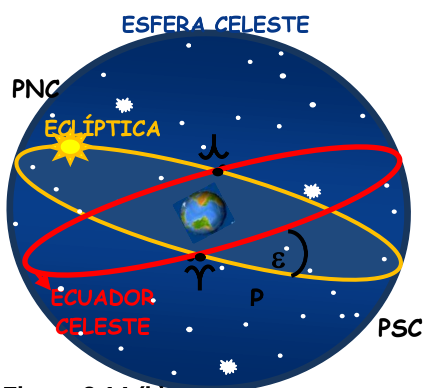


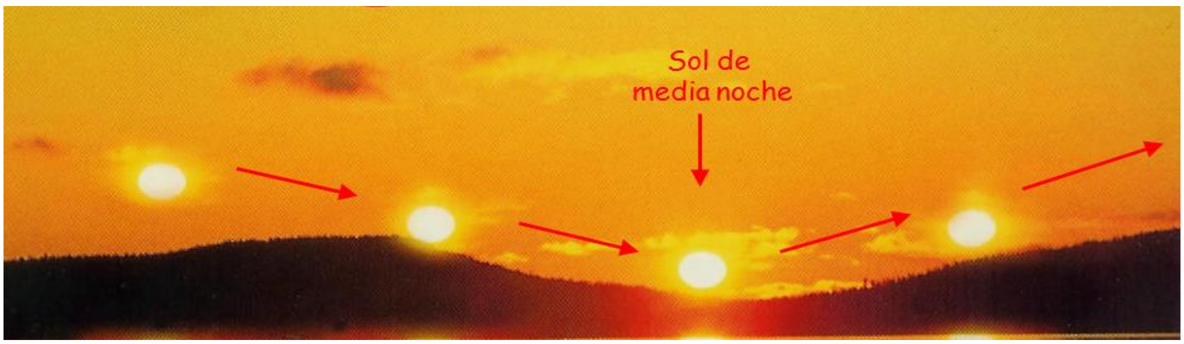
Figura 2.14 (b)

Como se ve en la figura 2.14 (b), existen dos puntos de corte entre el Ecuador Celeste y la Eclíptica que son muy importantes para las coordenadas astronómicas. El punto Vernal ♈ aparece cuando el sol de desplaza de Sur a Norte del hemisferio celeste y el punto anti vernal ⅄ cuando se desplaza de Norte a Sur.

El movimiento del sol sobre la eclíptica y el punto vernal nos ayudan a describir dos fenómenos conocidos como Equinoccios y Solsticios, los cuales están relacionados con los cambios de las estaciones. Para identificarlos observemos la figura 2.1.

Los equinoccios se producen dos veces al año cuando se intersecan la Eclíptica con el ecuador Celeste, en ese caso los rayos del sol inciden perpendicularmente sobre el ecuador terrestre haciendo que el día y la noche tengan la misma duración y que los rayos del sol se distribuyan de forma uniforme, la mitad de la superficie terrestre está totalmente iluminada y la otra mitad oscura. En el 2012 esto sucede el 21 de Marzo y el 21 de septiembre.

Los Solsticios se relacionan con la distancia y la posición máxima y mínima que alcanza el sol en la Eclíptica, después de pasar por el punto vernal el sol empieza a alejarse del ecuador Celeste alcanzando su máxima altura y se conoce como solsticio de verano. En este el día se hace más largo en el Hemisferio Norte y se conoce como sol de media noche.



Después de pasar por este punto, pasa por el punto anti vernal y llega a su mínima posición donde ocurre el solsticio de invierno, este es el día más corto del año en el hemisferio Norte, al medio día el sol se encuentra en la posición más baja que puede alcanzar. En el 2012 estos eventos ocurren el 20 de Junio y 21 de Diciembre respectivamente.

3. ENTENDIENDO LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA A TRAVÉS DE LA TRIGONOMETRÍA PLANA

Como vimos en el capítulo anterior los conceptos más importantes de astronomía de posición se fundamentan en un modelo esférico. Esto implica que la matemática asociada a su descripción no sea la referente a un espacio plano; se requieren entonces elementos matemáticos asociados a un espacio esférico.

Debido a las grandes distancias entre los cuerpos celestes no es posible hacer mediciones directas, por lo cual inicialmente la astronomía hiso uso de la trigonometría plana. Al desarrollarse la astronomía esférica se aplicó una trigonometría esférica también, es decir que se pasó de estudiar representaciones en triángulos planos a representaciones en triángulos esféricos, modificando las características de sus principales variables como ángulos y lados por sus correspondientes ángulos y arcos.

Veamos entonces cómo podemos entender la trigonometría esférica partiendo de los conceptos y teoremas fundamentales de la trigonometría plana vistos en el colegio en el grado décimo.

3.1 Elementos de la Trigonometría Plana

Repasemos los elementos más relevantes de la trigonometría plana vistos en el colegio, los cuales serán de utilidad para comprender su relación con la trigonometría esférica.

3.1.1 Razones Trigonométricas

La trigonometría plana relaciona los tres lados de un triángulo plano con sus ángulos internos. En el caso del triángulo rectángulo hay una relación en el que el cociente entre dos de sus lados correspondientes se mantiene constante. Debido a que el triángulo tiene tres lados, se producen seis posibilidades de dividir uno entre otro, lo que se conoce como las seis razones trigonométricas, cada una de ellas definida con nombre propio.
Consideremos una circunferencia de radio $r > 0$ con un ángulo θ desde su centro hasta un punto de la misma. Como se aprecia en la figura (*3.1*), las relaciones trigonométricas respecto a este ángulo θ se definen mediante el radio **r**, el cateto opuesto al ángulo **co**, el cateto adyacente al ángulo **ca,** y son:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{co}{r} \qquad \cos\theta = \frac{ca}{r} \qquad \tan\theta = \frac{co}{ca}$$

$$\cot\theta = \frac{ca}{co} \qquad \sec\theta = \frac{r}{ca} \qquad \csc\theta = \frac{r}{co}$$

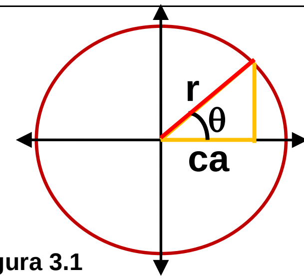


Figura 3.1

Los nombres propios de las 6 relaciones anteriores en su orden son, seno (sen), coseno (cos), tangente (tan), cotangente (cot), secante (sec) y cosecante (csc). Es importante recalcar que estas funciones dependen sólo del ángulo y no de los lados de los triángulos. En efecto cuando los ángulos internos son iguales en una familia de triángulos de lados diferentes (*Figura 3.2*), las razones entre los lados respectivos se mantienen. Veamos:

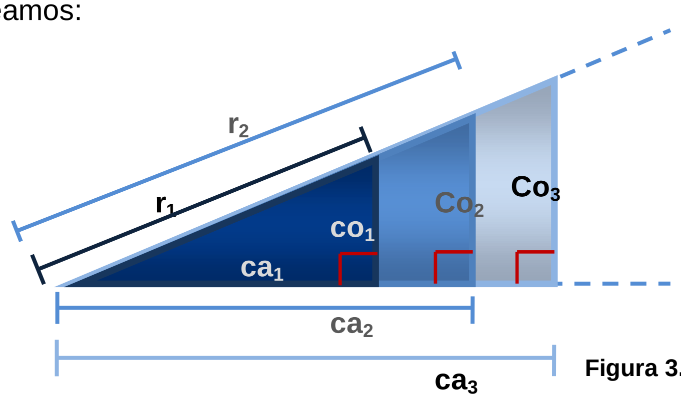


Figura 3.2

Se cumple que

$$\frac{co_1}{ca_2} = \frac{co_2}{ca_2} = \frac{co_3}{ca_3} = \ldots\ldots\ldots$$

Esta es la razón Tangente:

$$\tan\theta = \frac{co_1}{ca_2} = \frac{co_2}{ca_2} = \frac{co_3}{ca_3} = \ldots$$

También se obtienen relaciones similares para las otras 5 razones trigonométricas, teniéndose entonces que estas dependen sólo del ángulo.

Estas razones son de gran utilidad cuando se quieren encontrar valores desconocidos del triangulo rectángulo, para esto se deben conocer como mínimo tres elementos, sean dos lados y un ángulo o un lado y dos ángulos.

3.1.2 Teorema Del Seno

Las razones trigonométricas funcionan perfectamente cuando trabajamos con triángulos rectángulos, pero qué sucede si nuestros modelos pasan a ser triángulos acutángulos u obtusángulos.

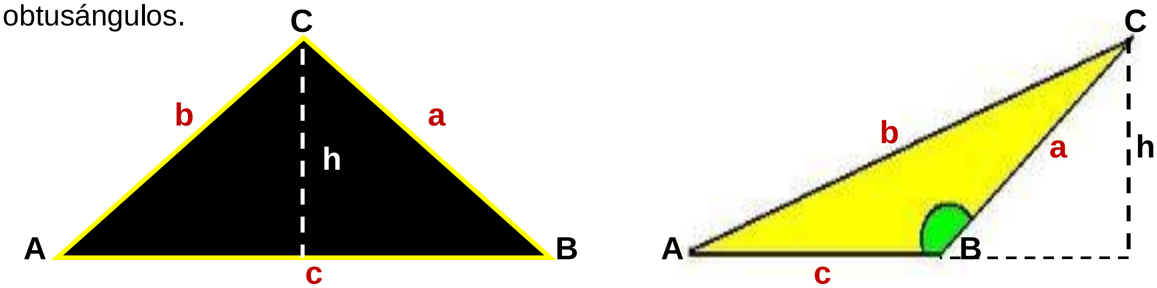


Figura 3.3 (a) Triangulo Acutángulo, (b) Triángulo Obtusángulo. Los ángulos en letras mayúsculas y sus lados en minúsculas.

En estos casos se hace necesario trazar la altura h, correspondiente a uno de los lados conocidos, con el fin de descomponerlos en triángulos rectángulos, como se aprecia en la *figura (3.3)*. Esta descomposición produce un patrón en su solución, sin importar si es acutángulo u obtusángulo, por lo cual puede ser generalizado y se conoce como ley del seno. Fijémonos por un momento en la *figura 3.3 (a)*, la altura se traza respecto al lado **c**, por lo cual usaremos la razón seno con los ángulos **A** y **B** para encontrar la altura:

$$\operatorname{sen} A = \frac{h}{b} \qquad\qquad \operatorname{sen} B = \frac{h}{a}$$

$$h = b \operatorname{sen} A \ (1) \qquad\qquad h = a \operatorname{sen} B \ (2)$$

Igualando (1) y (2) tendremos

$$b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B$$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}$$

La misma expresión se obtendría ´para el triángulo obtusángulo. Si se hubiera trazado la altura respecto al lado ***a*** o al lado ***b*** solo cambiaría un lado y un ángulo, por lo que esta ley se puede generalizar en la expresión:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \qquad (3.1)$$

Esta ley plantea: ***La razón entre el seno de un ángulo y el lado opuesto a este, es constante en cualquier triángulo***[34]. Sólo se utiliza para solucionar triángulos cuando conocemos dos ángulos y cualquier lado o dos lados y un ángulo diferente al comprendido entre los dos.

3.1.3 Teorema Del Coseno

Ninguna de las expresiones anteriores nos permite solucionar triángulos no rectángulos en los que solo se conozcan los tres lados o dos lados y el ángulo comprendido entre los dos. Para estos dos casos se hace necesario buscar una nueva herramienta, conocida como ley del coseno. Observemos el triangulo acutángulo de la *figura (3,4)* la altura ***h*** lo divide en dos triángulos rectángulos, ∆ABD y ∆BDC. Dado que solo conocemos la relación entre los lados usaremos el teorema de Pitágoras:

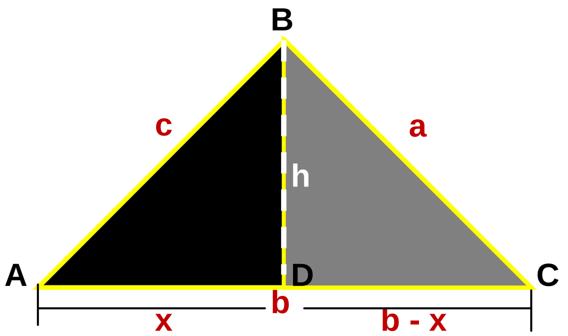


Figura 3.4

Para el triángulo **BDC**

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (b-x)^2 \\ a^2 &= h^2 + b^2 - 2bx + x^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Para el triángulo **ABD**

$$c^2 = h^2 + x^2$$

remplazamos h^2 en la expresión (**1**) de a^2:

$$a^2 = \underbrace{(c^2 - x^2)}_{h^2} + b^2 - 2bx + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx \qquad (2)$$

[34] EARL SWOKOWSKI. *Algebra y Trigonometría con geometría analítica*.

Como $\cos A = \dfrac{x}{c} \quad \Rightarrow \quad x = c\cos A$. Sustituimos esta expresión en **(2)**:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Esta ecuación es una de las tres que hacen parte de la ley de cosenos, las otras son:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \qquad (3.2)$$

La ley de cosenos afirma entonces que: ***en todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble del producto de estos por el coseno del ángulo que forman.***

3.2 Conociendo la Trigonometría Esférica

Como vimos en el capítulo anterior, la tierra pasa a estudiarse como un modelo esférico, por lo cual los triángulos planos no satisfacen las nuevas condiciones y se hace necesario utilizar nuevas herramientas geométricas y trigonométricas, pasando de triángulos y trigonometría plana a triángulos y trigonometría esférica.

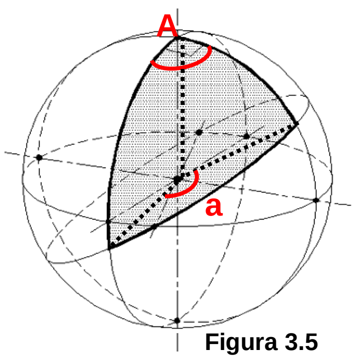


Figura 3.5

El triangulo esférico (*figura 3.5*) es una figura geométrica sobre la esfera, formada por tres arcos de círculos máximos intersecantes y los vértices son sus ángulos. La suma de sus ángulos internos es mayor de 180° y menor que 540°. Se cumple que el valor del ángulo ***A*** es igual a la longitud del arco ***a***, el cual debe tener una longitud menor de 180°.

Los arcos son los lados de un triángulo esférico, por lo que sus magnitudes son angulares en vez de lineales, y se miden en grados. Al igual que en la trigonometría plana, un triángulo esférico queda definido al conocer tres de los seis elementos y también se utilizan teoremas que relacionan las diferentes partes de un triángulo para calcular los elementos desconocidos. Es por esto que en la trigonometría esférica también existen los teoremas del coseno y del seno para hallar arcos y ángulos de un triángulo esférico. Veamos cuales son y como la trigonometría plana contribuye a su deducción.

3.2.1 Teorema del Coseno en Trigonometría Esférica

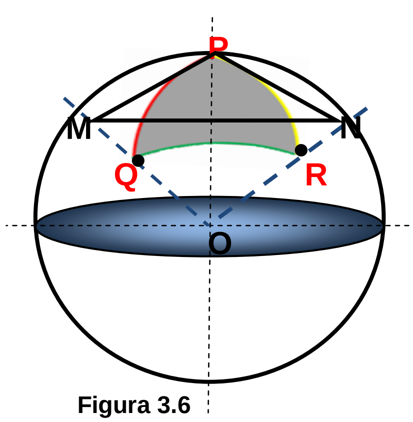


Figura 3.6

Consideremos que elegimos los puntos **Q** y **R** sobre una esfera de centro **O** y radio unitario, formando el triángulo esférico **ΔQPR** (*figura 3.6*).
Al trazar líneas tangentes a los arcos **PQ** y **PR** en el punto **P**, y trazando rectas secantes desde **O** a **Q** alcanzando a una de las rectas tangentes en el punto M, y otra recta desde **O** hasta **R**, prolongándola hasta intersecar a la otra recta tangente en el punto N, obtenemos cuatro triángulos planos que son: el **ΔMPN**, **ΔMON**, **ΔMPO** y **ΔNPO**.

El triángulo **ΔMON** es un plano secante que corta la esfera, parte desde el origen **O** pasando por los puntos **Q** y **R**, hasta los puntos **M** y **N** que no están en la esfera. El triángulo **ΔMPN** es un plano tangente a la esfera en el punto **P**. Estos dos planos tienen en común el lado $\overline{\mathbf{MN}}$, pero observemos que están en planos diferentes.

A continuación en la *figura (3.7)* presentamos de forma independiente los triángulos que aparecen en la figura (*3.6*)[35] con sus variables respectivas. El triángulo esférico y los cuatro triángulos planos, lo que será útil para nuestra demostración de la ley del coseno de la trigonometría esférica.

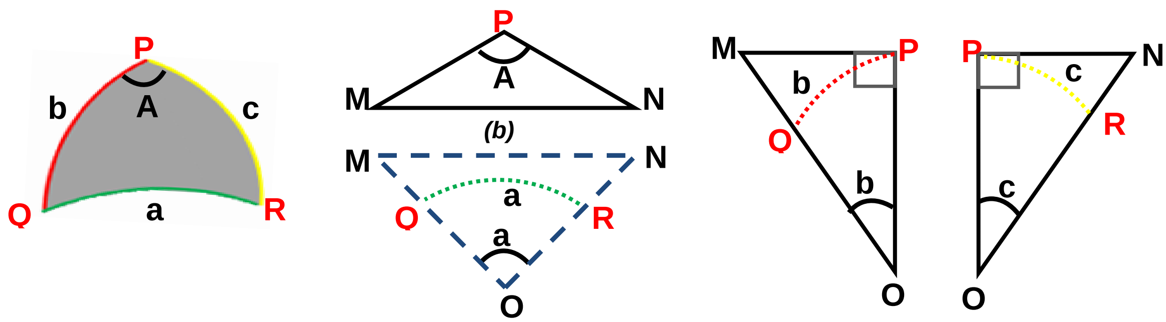


Figura 3.7: ***(a)*** ***(c)*** ***(d)*** ***(e)***

Para encontrar la hipotenusa de los triángulos rectángulos de la *figura 3.7* (*d*) y (*e*), utilizamos el teorema de Pitágoras:

$$\Delta\mathbf{MPO} \Rightarrow \overline{\mathbf{OM}}^2 = \overline{\mathbf{MP}}^2 + \overline{\mathbf{OP}}^2 \quad (3.3\,\mathrm{a}) \qquad \Delta\mathbf{NPO} \Rightarrow \overline{\mathbf{ON}}^2 = \overline{\mathbf{OP}}^2 + \overline{\mathbf{PN}}^2 \quad (3.3\,\mathrm{b})$$

Para encontrar el lado común $\overline{\mathbf{MN}}$ de los triángulos acutángulos (b) y (c) de la *figura 3.7*, utilizamos la ley del coseno de la trigonometría plana:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{bc}\cos\mathbf{A}$$

$$\Delta\mathbf{MPN} \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{MN}}^2 = \overline{\mathbf{MP}}^2 + \overline{\mathbf{PN}}^2 - 2\,\overline{\mathbf{MP}}\,\overline{\mathbf{PN}}\cos\mathbf{A} \qquad (3.4)$$

$$\Delta\mathbf{MON} \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{MN}}^2 = \overline{\mathbf{OM}}^2 + \overline{\mathbf{ON}}^2 - 2\,\overline{\mathbf{OM}}\,\overline{\mathbf{ON}}\cos\mathbf{a} \qquad (3.5)$$

Como ambos tienen en común el lado $\overline{\mathbf{MN}}$, igualamos las ecuaciones (3.4) y (3.5):

$$\overline{\mathbf{OM}}^2 + \overline{\mathbf{ON}}^2 - 2\,\overline{\mathbf{OM}}\,\overline{\mathbf{ON}}\cos\mathbf{a} = \overline{\mathbf{MP}}^2 + \overline{\mathbf{PN}}^2 - 2\,\overline{\mathbf{MP}}\,\overline{\mathbf{PN}}\cos\mathbf{A} \qquad (3.6)$$

Los lados $\overline{\mathbf{OM}}$ y $\overline{\mathbf{ON}}$ se encuentran definidos en las ecuaciones (3.3a) y (3.3b), al remplazarlos en (3.6) tenemos:

$$\overline{\mathbf{MP}}^2 + \overline{\mathbf{OP}}^2 + \overline{\mathbf{OP}}^2 + \overline{\mathbf{PN}}^2 - 2\,\overline{\mathbf{OM}}\,\overline{\mathbf{ON}}\cos\mathbf{a} = \overline{\mathbf{MP}}^2 + \overline{\mathbf{PN}}^2 - 2\,\overline{\mathbf{MP}}\,\overline{\mathbf{PN}}\cos\mathbf{A}$$

Eliminamos términos semejantes y se obtiene:

---

[35] A E ROY. *Astronomy Principles and Practice*. Cuarta Edición

$$2\overline{OP}^2 - 2\overline{OM}\,\overline{ON}\cos a = -2\overline{MP}\,\overline{PN}\cos A \qquad (3.7)$$

Despejamos *cos a* de la ecuación (3.7)

$$\cos a = \frac{\overline{OP}^2 + \overline{MP}\,\overline{PN}\cos A}{\overline{OM}\,\overline{ON}}$$

$$\cos a = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}}\frac{\overline{OP}}{\overline{ON}} + \frac{\overline{MP}}{\overline{OM}}\frac{\overline{PN}}{\overline{ON}}\cos A \qquad (3.8)$$

Aplicando las razones trigonométricas de la sección 3.1.1 a los triángulos ***(d)*** y ***(e)*** de la *figura 4.7*, obtenemos las siguientes relaciones:

$$\cos b = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}};\quad \cos c = \frac{\overline{OP}}{\overline{ON}};\quad \operatorname{sen} b = \frac{\overline{MP}}{\overline{OM}};\quad \operatorname{sen} c = \frac{\overline{PN}}{\overline{ON}}$$

Al remplazarlas en la ecuación (3,7), obtenemos

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A \qquad (3.9)$$

La ecuación (3.9) se conoce como ***el teorema del coseno*** de la trigonometría esférica. Este enuncia que el coseno de un arco es igual al producto de los cosenos de los otros arcos, más el producto de los senos de dichos arcos por el coseno del ángulo interno entre los dos[36]. De esta forma también se pueden obtener las otras dos relaciones que completan el teorema:

$$\begin{aligned}\cos b &= \cos c \cos a + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos B\\ \cos c &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C\end{aligned} \qquad (3.9)$$

Al comparar esta definición con la ecuación (3.2) de la ley del coseno de la trigonometría plana, notamos sus grandes similitudes, no solo en el esquema matemático sino también en su significado.

3.2.2 Teorema del Seno en Trigonometría Esférica

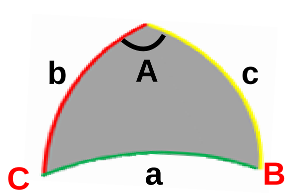


Figura 3.8

Usando el mismo triángulo esférico (*figura 3.8*) de la demostración anterior y las ecuaciones (*3.9*) del teorema del coseno hallaremos el teorema del seno. Iniciemos con el arco c:

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$$

Despejamos

$$\cos c - \cos a \cos b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$$

$$(\cos c - \cos a \cos b)^2 = (\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C)^2$$

$$\cos^2 c - 2\cos c \cos a \cos b + \cos^2 a \cos^2 b = \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b \cos^2 C \qquad (3.10)$$

Utilizamos la identidad trigonométrica pitagórica $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ despejando $\cos^2 x$ $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, y remplazamos en la ecuación 3.10:

[36] A E ROY. Astronomy Principles and Practice. Cuarta Edición

$$\cos^2 c - 2\cos c\cos a\cos b + \cos^2 a\cos^2 b = \operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 b\,(1-\operatorname{sen}^2 C)$$
$$\cos^2 c - 2\cos c\cos a\cos b + \cos^2 a\cos^2 b = \operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 b - \operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 b\operatorname{sen}^2 C$$

Utilizando nuevamente $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ despejando $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ y remplazando

$$\cos^2 c - 2\cos c\cos a\cos b + \cos^2 a\cos^2 b = (1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b) - \operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 b\operatorname{sen}^2 C$$
$$\cos^2 c - 2\cos c\cos a\cos b + \cos^2 a\cos^2 b = 1-\cos^2 a - \cos^2 b + \cos^2 a\cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 b\operatorname{sen}^2 C$$

Cancelamos términos semejantes y agrupamos los de la misma razón trigonométrica:

$$\cos^2 c - 2\cos c\cos a\cos b = 1-\cos^2 a - \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 b\operatorname{sen}^2 C$$

$$\operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 b\operatorname{sen}^2 C = 1-\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos c\cos a\cos b \qquad (3.11)$$

Repetimos el mismo procedimiento anterior, pero ahora para con el teorema del coseno para el arco b:

$$\cos b = \cos c\cos a + \operatorname{sen} c\operatorname{sen} a\cos B$$
$$\cos b - \cos c\cos a = \operatorname{sen} c\operatorname{sen} a\cos B$$
$$(\cos b - \cos c\cos a)^2 = (\operatorname{sen} c\operatorname{sen} a\cos B)^2$$
$$\cos^2 b - 2\cos b\cos c\cos a + \cos^2 c\cos^2 a = \operatorname{sen}^2 c\operatorname{sen}^2 a\cos^2 B$$
$$\cos^2 b - 2\cos b\cos c\cos a + \cos^2 c\cos^2 a = \operatorname{sen}^2 c\operatorname{sen}^2 a(1-\operatorname{sen}^2 B)$$
$$\cos^2 b - 2\cos b\cos c\cos a + \cos^2 c\cos^2 a = \operatorname{sen}^2 c\operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 c\operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 B$$
$$\cos^2 b - 2\cos b\cos c\cos a + \cos^2 c\cos^2 a = (1-\cos^2 c)(1-\cos^2 a) - \operatorname{sen}^2 c\operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 B$$
$$\cos^2 b - 2\cos b\cos c\cos a + \cos^2 c\cos^2 a = 1-\cos^2 a - \cos^2 c + \cos^2 c\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 c\operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 B$$
$$\cos^2 b - 2\cos b\cos c\cos a = 1-\cos^2 a - \cos^2 c - \operatorname{sen}^2 c\operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 B$$
$$\operatorname{sen}^2 c\operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 B = 1-\cos^2 a - \cos^2 c - \cos^2 b - 2\cos b\cos c\cos a \qquad (3.12)$$

Notemos que la expresión del lado derecho de las ecuaciones (3.11) y (3.12) es exactamente la misma. Si repetimos el procedimiento con el teorema del coseno para el arco a obtendríamos:

$$\operatorname{sen}^2 b\operatorname{sen}^2 c\operatorname{sen}^2 A = 1-\cos^2 a - \cos^2 c - \cos^2 b - 2\cos b\cos c\cos a \qquad (3.13)$$

Como las expresiones del lado izquierdo de (3.11), (3.12) y (3.13) son iguales a la misma expresión del lado derecho, entonces podemos afirmar que son iguales entre sí:

$$\operatorname{sen}^2 b\operatorname{sen}^2 c\operatorname{sen}^2 A = \operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 c\operatorname{sen}^2 B = \operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 b\operatorname{sen}^2 C$$

Partiendo de esta expresión se definen tres igualdades diferentes, las cuales pueden ser simplificadas como mostraremos usando las dos primeras partes:

$$\operatorname{sen}^2 b\operatorname{sen}^2 c\operatorname{sen}^2 A = \operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 c\operatorname{sen}^2 B$$
$$\frac{\operatorname{sen}^2 b\operatorname{sen}^2 c}{\operatorname{sen}^2 B} = \frac{\operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 c}{\operatorname{sen}^2 A}$$

$$\frac{\mathrm{sen}^2 b}{\mathrm{sen}^2 B} = \frac{\mathrm{sen}^2 a}{\mathrm{sen}^2 A}$$

Al repetir el mismo proceso con las otras dos igualdades, obtendríamos la expresión:

$$\frac{\mathrm{sen}^2 a}{\mathrm{sen}^2 A} = \frac{\mathrm{sen}^2 b}{\mathrm{sen}^2 B} = \frac{\mathrm{sen}^2 c}{\mathrm{sen}^2 C} \qquad (3.14)$$

Sacando la raíz de esta expresión, solo podremos considerar soluciones positivas. Esto se debe a que los ángulos y arcos de un triángulo esférico deben ser mayores de 0° y menores de 180°. En este intervalo la función seno solo toma valores positivos. Por lo tanto la expresión (4.14) quedaría:

$$\frac{\mathrm{sen} a}{\mathrm{sen} A} = \frac{\mathrm{sen} b}{\mathrm{sen} B} = \frac{\mathrm{sen} c}{\mathrm{sen} C} \qquad (3.15)$$

La expresión 3.15 se conoce como el teorema del seno de la trigonometría esférica. Este enuncia que los senos de los lados de un triángulo esférico son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos. El seno de un arco sobre el seno de un ángulo opuesto a él es constante.

Notemos el parecido de la expresión 3.1 del teorema del seno de la trigonometría plana con la expresión 3.15 de la trigonometría esférica. Igual pasa con el teorema del coseno en ambas, esto nos muestra que estas dos trigonometrías están íntimamente relacionadas aunque posean propiedades diferentes.

La utilidad práctica de estos teoremas de la trigonometría esférica se verá en los problemas de aplicación sobre distancias y coordenadas astronómicas, en el siguiente capítulo. Aunque cabe recalcar para los docentes el valor pedagógico de las demostraciones anteriores como herramienta para la enseñanza de la trigonometría y para la introducción de la trigonometría esférica en el aula.

4. DETERMINACIÓN DE DISTANCIAS EN UN MODELO ESFÉRICO DE LA TIERRA

Cuando queremos encontrar la distancia más corta entre dos puntos en un espacio plano, trazamos una línea recta entre ellos. Pero qué debemos hacer cuando queremos conocer la distancia más corta entre dos puntos ubicados en un espacio curvo, como en una superficie esférica, como la forma de nuestro planeta.

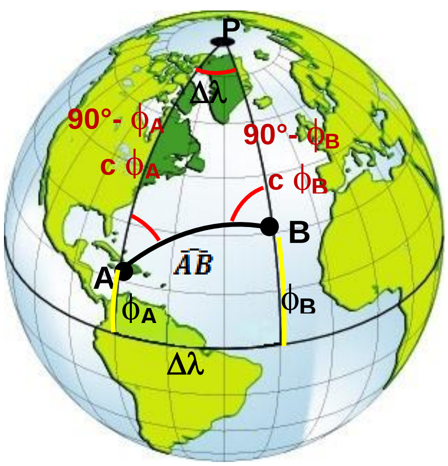


Figura 4.1

La distancia más corta entre dos puntos en el espacio esférico, es una línea curva trazada sobre un círculo máximo llamada ***Geodésica***[37]. Este término proviene de la ciencia de medir el tamaño y forma del planeta Tierra, conocida cómo geodesia. La geodésica es usada entonces, cuando queremos medir distancias entre dos lugares sobre la superficie terrestre.

Mostraremos cómo podemos hacer estas mediciones con el uso herramientas del capítulo anterior, como triángulos esféricos y conceptos vistos en el capítulo 3 de astronomía de posición. Este tipo de cálculos son útiles para que nuestros estudiantes comprendan el uso de las coordenadas, los ángulos y la trigonometría esférica.

La *figura*[38] *4.1* muestra los puntos A y B sobre la superficie terrestre, ϕ_A y ϕ_B son sus latitudes medidas desde el Ecuador, formamos un triángulo esférico prolongando estas, sobre el círculo máximo hasta el polo. Estos arcos del triángulo se conocen como colatitudes $c\phi A$ y $c\phi B$, y se calculan restando a 90° la latitud del lugar. Se preguntaran ¿para qué formar el triángulo? Como necesitamos encontrar el arco que une los puntos A y B, conociendo los dos arcos de las colatitudes y el ángulo $\Delta\lambda$ entre ellos, podemos encontrar el valor del arco $\bar{A}\bar{B}$ desconocido mediante el teorema del coseno de la trigonometría esférica.

---

[37] AYRES, *Teoría y Problemas de Trigonometría Plana y Esférica*. 1970

[38] La base de esta figura ha sido tomada de www.comoves.unam.mx aunque ha sido modificada para uso de este capítulo.

4.1 Aplicación Cálculo de Distancias Sobre la Esfera Terrestre

Para este ejemplo elegimos dos lugares sobre la tierra ubicados en el hemisferio norte: *Punto **A** Madrid con coordenadas geográficas 40° 24' N de latitud y 3° 41' W de longitud, punto **B** Tokio con 35° 40' N de latitud y 139° 45' E de longitud. ¿Cuál es la distancia entre estos puntos?*

La *figura 4.2* muestra el triángulo esférico de la situación, Madrid sería el punto **A** y Tokio el **B**, los arcos **a** y **b** son las colatitudes y el arco **c** nuestra incógnita. Hallamos los valores de **a** y **b**:

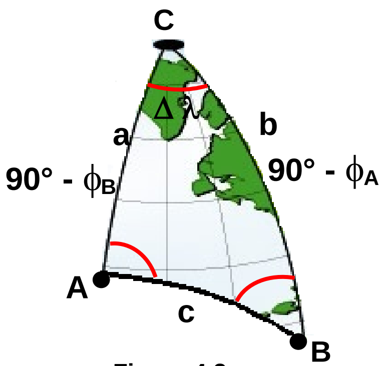


Figura 4.2

$$\mathbf{a = 90° - \phi_{NB} = 90° - 35°\,40' = 54°\,20'} \qquad \mathbf{(4.1)}$$

$$\mathbf{b = 90° - \phi_{NA} = 90° - 40°\,26' = 49°\,34'} \qquad \mathbf{(4.2)}$$

Como el ángulo **C** es igual a $\Delta\lambda$, tendremos

$$\mathbf{\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A = 139°45' - (-3°42') = 143°\,27'} \qquad \mathbf{(4.3)}$$

El signo de λ_A se debe a Madrid que se encuentra al occidente del meridiano fundamental o meridiano de Greenwich.

Si remplazamos (4.1), (4.2) y (4.3) en el teorema del coseno:

$$\mathbf{\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C}$$

$$\mathbf{\cos c = \cos 54°20' \cos 49°34' + \operatorname{sen} 54°20' \operatorname{sen} 49°34' \cos 143°27'}$$

$$\mathbf{\cos c = -\,0{,}118614943}$$

$$\mathbf{c = \cos^{-1}(-0{,}118614943)}$$

$$\mathbf{c = 96°\,48'\,43{,}83''}$$

El valor del arco obtenido esta en unidades angulares y debemos transformarlo a unidades de longitud. Para esto debemos considerar en el modelo esférico de la tierra la siguiente relación: un minuto de arco (1') de un círculo máximo equivale a una milla náutica y una milla náutica equivale a 1, 852 Km. Para usar esta relación tenemos en cuenta que 1° tiene 60' y 1" tiene 1'/60. Dejamos el resultado de **c** en minutos de arco:

$$\mathbf{96° = 5760'}$$

$$\mathbf{c = 96°\,48'\,43{,}83'' = 5808{,}7305'}$$

$$\mathbf{c = 5808{,}7305' \bullet 1{,}852\,Km/'}$$

$$\mathbf{c = 10\,757{,}77\,Km}$$

La distancia entre Tokio y Madrid será entonces de 10 757,77Km. De esta forma se pueden calcular distancias entre diferentes lugares de la superficie terrestre. Solo necesitamos conocer sus coordenadas geográficas y aplicar el teorema del coseno de la trigonometría esférica. Cabe recalcar que se debe tener presente sólo para los cálculos, que la coordenada Oeste (W) va acompañada de un negativo en esta convención.

Ejemplo 2

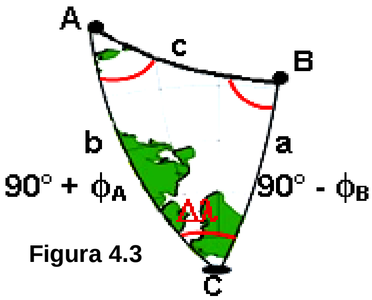


Figura 4.3

Hallemos la distancia desde Bogotá: latitud 4° 39' N, longitud 74° 5' W, hasta Brasilia: latitud 15° 47' S, longitud 47° 53' W.

Note que formamos nuevamente un triángulo esférico, mostrado en la *figura 4.3*. **A** es Bogotá, **B** Brasilia, **C** el polo Sur terrestre, **a** y **b** las colatitudes de cada punto y **c** la distancia que estamos buscando. Hay que aclarar que en este caso que la Colatitud del lado **b** se encuentra sumando los 90° del polo al Ecuador terrestre más la latitud de Bogotá, ya que se encuentra al N: $\mathbf{b = 90° + \phi_{NA}}$

Aclarando esto, repetimos el proceso anterior:

$$\mathbf{a = 90° - \phi_{SB} = 90° - 15°\,47' = 74°\,13'}$$

$$\mathbf{b = 90° + \phi_{NA} = 90° + 4°\,39' = 94°\,39'}$$

$$\mathbf{\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A = -47°\,53' - (-74°\,5') = 26°\,12'}$$

Remplazando los tres resultados anteriores en el teorema del coseno obtenemos:

$$\mathbf{\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C}$$

$$\mathbf{\cos c = \cos 74°13' \cos 94°31' + \operatorname{sen} 74°13' \operatorname{sen} 94°31' \cos 26°12'}$$

$$\mathbf{\cos c = 0{,}839327993}$$

$$\mathbf{c = \cos^{-1}(0{,}839327993)}$$

$$\mathbf{c = 32°\,55'\,50{,}79''}$$

Transformamos de unidades angulares a Km, pasando todo a segundos de arco:

$$\mathbf{c = 1975{,}846'}$$

$$\mathbf{c = 1975{,}846' \bullet 1{,}852\,Km}$$

$$\mathbf{c = 3659{,}27\,Km}$$

4.2 Aplicación a Transformación de Coordenadas Astronómicas

Es posible transformar un tipo de coordenadas astronómicas en otra, al encontrar las variables que las relacionan. Como vimos en el capítulo 2 cada sistema de coordenadas tiene sus variables propias, para relacionarlas debemos hacer uso de la trigonometría esférica. En este capítulo sólo abordaremos el paso de coordenadas Ecuatoriales a Horizontales[39] o viceversa, ya que es uno de los más tradicionales y representativos. La figura *4.4 (a)* relaciona para un solo astro las coordenadas horarias, Acimut **A** y altura **h**, trazadas sobre el horizonte del observador, con las coordenadas ecuatoriales, ángulo horario **H** y declinación δ, trazadas sobre el ecuador celeste.

[39] PORTILLA JOSE GREGORIO. *Elementos de Astronomía de Posición*. 2001

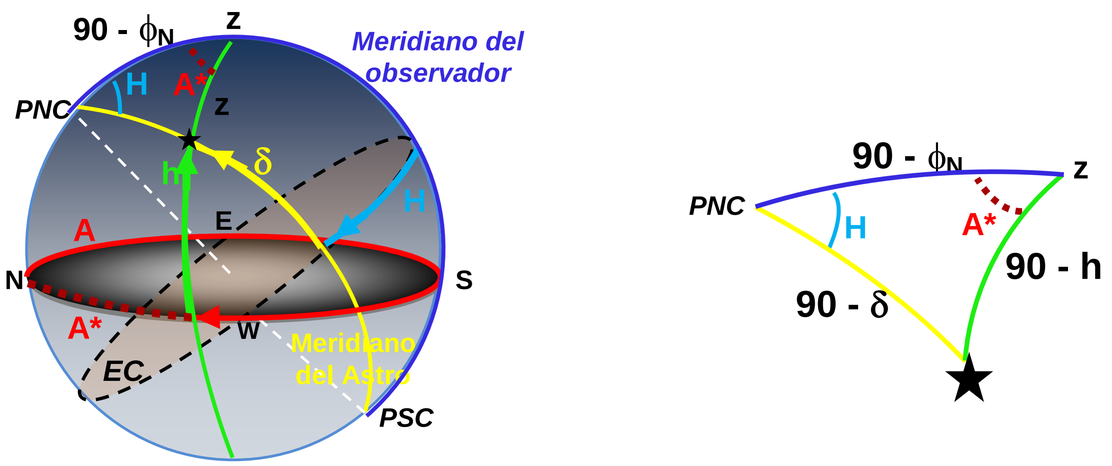


Figura 4.4 (a) (b)

Observe que en la parte superior de la figura, se forma un triángulo esférico que es descrito en la *figura 4.4 (b).* Sus lados son **z**, (90° - δ), (90° - ϕ_N) y ángulos respectivos **H**, **A*** y el ángulo donde se encuentra el astro. El lado **z** es la distancia cenital **z = 90° - h** y **A*** es el suplemento del azimut **A** y se define como **A* = 360° - A.** Note que estas definiciones relacionan las variables de ambos sistemas de coordenadas.

Ahora para poder relacionar estas variables en un solo sistema de ecuaciones hacemos uso en primera instancia del teorema del seno (*ecuación 3.1*), en la cual remplazamos los dos primeros lados y sus ángulos, así:

$$\frac{\operatorname{sen}(90° - \delta)}{\operatorname{sen}(360° - A)} = \frac{\operatorname{sen}(90° - h)}{\operatorname{sen} H} \qquad (4.4)$$

Sabiendo que el sen de 90° y de 360° es 1 y 0 respectivamente, se cumple para cualquier ángulo x: sen (90°- x) = cos x, sen (360°- x) = - sen x. Aplicando esto a la ecuación **(4.4)** obtenemos:

$$\frac{\operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen} A} = \frac{-\cos h}{\operatorname{sen} H}$$

$$\cos\delta \operatorname{sen} H = -\cos h \operatorname{sen} A \qquad (4.5)$$

Usaremos primero el teorema del coseno (ecuación 4.9), para el lado $(90° - \delta)$ y tendremos en cuenta que: cos (360°- x) = cos x, y cos (90°- x) = sen x, obteniendo:

$$\cos(90° - \delta) = \cos(90° - \phi)\cos(90° - h) + \operatorname{sen}(90° - \phi)\operatorname{sen}(90° - h)\cos(360° - A)$$

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen} h + \cos\phi \cos h \cos A \qquad (4.6)$$

Remplazamos nuevamente en el teorema del coseno, pero ahora para el lado $(90° - h)$:

$$\cos(90° - h) = \cos(90° - \delta)\cos(90° - \phi) + \operatorname{sen}(90° - \delta)\operatorname{sen}(90° - \phi)\cos H$$

$$\operatorname{sen} h = \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\phi + \cos\delta \cos\phi \cos H \qquad (4.7)$$

Usando las ecuaciones[40] (**4.5**), (**4.6**) y (**4.7**) se pueden hacer las transformaciones entre estos dos sistemas de coordenadas. Para estos cálculos se deben tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

1. Si la latitud del lugar es Sur, se considera negativa.
2. Para encontrar el cuadrante correcto en el que se encuentra ubicado el astro, se debe calcular el ángulo horario H, teniendo en cuenta el valor del Acimut A. Si **A** $>$ 180° el **H** calculado es correcto, pero si **A** $<$ 180° entonces **H*** = **360° - H**, es decir se le resta a 360 el **H** encontrado. Hallando así el valor correcto.
3. Para encontrar el valor correcto del Acimut **A** en el que se encuentra ubicado el astro, se debe tener en cuenta el valor de **H**. Si **H** $< 12^h$ (180°) entonces **A* = 360° - A**, es decir se resta él A encontrado, hallando así el valor correcto. Pero si. H $> 12^h$ (180°), entonces el valor de A es correcto.

Antes de realizar los ejemplos, hay una última recomendación en el momento de elegir la ecuación a utilizar. Si queremos hallar el valor de un ángulo utilizando el teorema de senos se hace necesario usar el teorema del coseno para verificar el cuadrante donde se encuentra el ángulo ya que el signo de la expresión **(4.5)** afecta el resultado.

Veamos en los siguientes ejemplos como estas ecuaciones y propiedades pueden ser aplicadas.

Ejemplo 1

Encuentre el ángulo horario **H** y la declinación δ del astro M42 con coordenadas horizontales: **A** = 103° 59´ y **h** = 34° 10´, para un observador ubicado en Cartagena.

La ecuación **(4.6)** nos permite encontrar la declinación, y sabiendo que la latitud de Cartagena es 10° 27´ N, tenemos:

$$\mathbf{sen}\,\delta = \mathbf{sen}\,(10°\,27')\,\mathbf{sen}\,(34°\,10') + \cos(10°\,27')\cos\,(34°\,10')\cos(103°\,59')$$

$$\mathbf{sen}\,\delta = -0{,}094756302$$

$$\delta = \mathbf{sen}^{-1}\,(-0{,}094756302) = -5°\,26'$$

Ahora para el cálculo de H podemos utilizar la ecuación **(5.5)**, obteniendo:

$$\cos\delta\,\mathbf{sen}\mathbf{H} = -\cos\mathbf{h}\,\mathbf{sen}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{sen}\mathbf{H} = \frac{-\cos 34°\,10'\,\mathbf{sen}103°\,59'}{\cos(-5°\,26')}$$

$$\mathbf{sen}\mathbf{H} = -0{,}806511716$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{sen}^{-1}\,(-0{,}806511716) = 53°\,45'$$

Como **A** $<$ 180°, entonces **H** = 360° - **H**

$$\mathbf{H} = 360° - 53°\,45' = 306°\,15'$$

Dado que el ángulo horario esta dado en unidades de tiempo, usamos la correlación entre unidades angulares y de tiempo: $1^h = 15°$, $1^m = 15´$, obteniendo el valor de **H**:

$$\mathbf{H} = 306°\,15' = 20^h\;25^m$$

[40] Ecuaciones tomadas del texto: *Elementos de Astronomía de Posición*, José Gregorio Portilla

Ejemplo 2

Encuentre la altura **h** y el azimut **A** de la estrella Sirius para un observador situado en Leticia (Amazonas), si su ángulo horario en ese momento es de **H** = $19^h\ 15^m$.

La latitud de Leticia es 4° 17´ S y la declinación de Sirius es δ = - 16° 43´. El valor de H lo transformamos a unidades angulares, **H** = 288° 45´. Remplazamos estos datos en la ecuación **(5.7)**, resultando:

$$\mathbf{sen\,h = sen(-16°\,43')\,sen(-4°\,17') + cos(-16°\,43')\,cos\,(-4°\,17')\,cos(288°\,45')}$$

$$\mathbf{sen\,h = 0,328478578}$$

$$\mathbf{h = sen^{-1}\,(0,328478578) = 19°\,10'}$$

Ahora encontramos el valor de **A** despejándola la ecuación **(5.6)**, obteniendo:

$$\mathbf{cos\,A = \frac{sen\,\delta - sen\,\phi\,sen\,h}{cos\,\phi\,cos\,h}}$$

$$\mathbf{cos\,A = \frac{sen\,(-16°\,43') - sen(-4°\,17')\,sen(19°\,10')}{cos\,(-4°\,17')\,cos(19°\,10')}}$$

$$\mathbf{cos\,A = -0,279338978}$$

$$\mathbf{A = cos^{-1}\,(-0,279338978) = 106°\,13'}$$

Como H es mayor que 180°, el valor encontrado de A es el correcto.

4.3 Cálculo de Estrellas Circumpolares para el Observador

Un astro circumpolar es aquel que es visible para el observador cualquier noche del año, ya que incluso en su posición más baja va a estar por encima del horizonte visible. Como podemos ver en la figura 4.5.

Según la latitud del lugar, el observador puede ver diferentes astros circumpolares. Si está más próximo a los polos vera más estrellas circumpolares, pero pasa lo contrario si está es cerca al Ecuador.

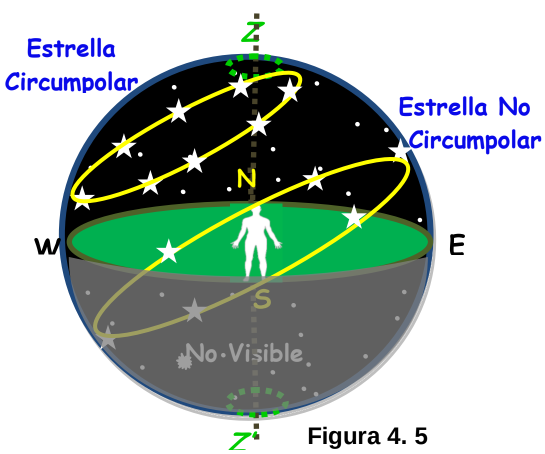


Figura 4. 5

Para conocer que estrellas son circumpolares debemos calcular la declinación a partir de la cual pueden ser consideradas circumpolares, para una latitud terrestre específica. Este resultado se compara con la declinación de la estrella, cuyo valor debe ser mayor. Para calcular esta declinación se utilizan las siguientes relaciones, según el hemisferio donde se encuentre él observador:

$$\begin{aligned} &\mathbf{Norte:}\quad \delta_N \rangle\ 90° - \phi_N \\ &\mathbf{Sur:}\quad \delta_S \rangle\ 90° - \phi_S \end{aligned} \qquad \mathbf{(4.8)}$$

Ejemplo 1
Encuentre si la estrella Polaris con declinación δ = 89° 15´ 50,8" N, es circumpolar para un habitante en Bogotá.

La latitud de Bogotá es 4° 39´ N, remplazando en la ecuación **(4.8)** obtenemos:

$$\delta_N > 90° - 4° 39'$$

$$\delta_N > 85° 21'$$

Esto significa que todas las estrellas con una declinación superior a 85° 21´ son circumpolares para un observador en Bogotá. Al revisar la declinación de Polaris, podemos afirmar entonces que es circumpolar.

Ejemplo 2
Calcule para qué latitudes la estrella Acrux con declinación 63° 06´ S, es una estrella circumpolar. Usando la ecuación **(4.8)**, tenemos:

$$\textbf{Sur:} \quad \phi_S > 90° - \delta_S$$

$$\phi_S > 90° - 63° 06'$$

$$\phi_S > 26° 54'$$

Es decir que para los lugares con una latitud geográfica Sur casi mayor a 27°, como Argentina y Santiago de Chile, Acrux es visible como una estrella circumpolar.

5. PROPUESTA ACTIVIDADES PEDAGÓGICAS

El presente capítulo pretende brindar al docente actividades que puedan ser aplicadas en clase, salidas pedagógicas o actividades extra escolares, después de haber abordado los conceptos matemáticos y astronómicos necesarios. Por lo cual es necesario que el docente maneje las temáticas vistas en los capítulos anteriores y hayan sido dadas a conocer con anterioridad a sus estudiantes.

El objetivo de estas actividades es que los docentes y estudiantes desarrollen algunas experiencias significativas durante el proceso de enseñanza de la Trigonometría y de la Física. Los talleres están diseñados para ser aplicados con estudiantes de grado décimo de educación media, para que sean más enriquecedoras se propone la participación de los docentes de ambas áreas.

En este capítulo no se describen todos los aspectos del taller, por lo que se hace necesario leer los apéndices como complemento. Además no requieren ningún orden de aplicación, pueden desarrollarse cuando el docente lo crea conveniente.

El esquema de cada propuesta es el siguiente:

1. **Actividad**: Nombre de la actividad

2. **Guía de trabajo**: Son las guías en las que trabajarán los estudiantes para desarrollar la actividad. Contiene la lista de materiales que se necesitan, los cuales deben ser pedidos con anterioridad, gráficas explicativas y tablas para el registro de datos.

3. **Objetivo**: Es el propósito general que tiene la actividad para el aprendizaje de los estudiantes.

4. **Debes Saber:** Son todos aquellos preconceptos que el estudiante ya debe manejar o conocer para poder realizar satisfactoriamente la actividad y deben ser verificados previamente por el docente.

5. **Conceptos a trabajar**: Son las temáticas que se utilizarán, desarrollarán o afianzarán durante la actividad.

6. **Metodología**: Se describe cada paso necesario en la implementación de la actividad, las etapas de trabajo que llevarán a cabo los estudiantes y el papel que juega el docente durante dicho proceso.

7. **Advertencia**: El objetivo de este ítem es prevenir al docente sobre algunas situaciones metodológicas en que el estudiante puede tener dificultades a la hora de desarrollar la actividad.

Los ítems 4 al 7 son dados como herramienta solo para el docente, el ítem 2 de todas las actividades se encuentra como anexos al final del trabajo.

5.1 Actividad 1: Ubicando las Estrellas – Reconociendo las Coordenadas Astronómicas

Guía de trabajo: Anexo A

Objetivo: Reconocer y medir las coordenadas horizontales de estrellas visibles para aprender a ubicar cuerpos celestes y reconocer el efecto de rotación del firmamento, mediante la medición de ángulos.

Debes Saber

- Medición y operaciones entre ángulos
- Esfera Celeste - Carta Celeste
- Coordenadas Geográficas y Coordenadas Horizontales

Conceptos a Trabajar

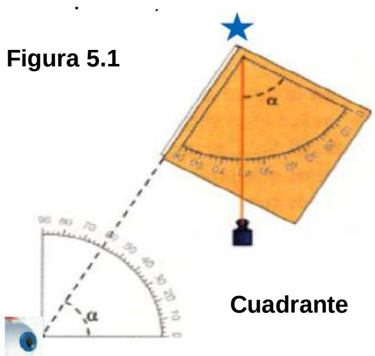
- Medición y operaciones entre ángulos
- Altura (h) y azimut (A) de una estrella
- Relación tiempo y desplazamiento de estrellas.
- Carta Celeste

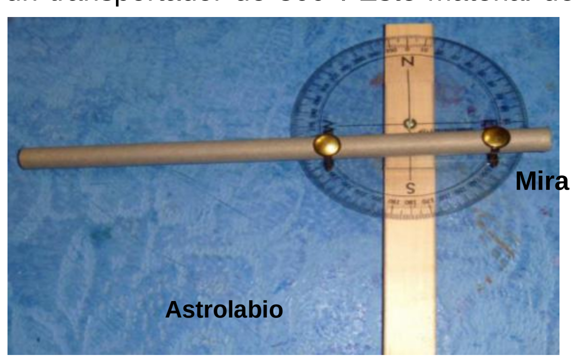
Metodología

Esta actividad se desarrollará por grupos, preferiblemente de 3 estudiantes, aunque cada uno debe tener su guía para el registro de datos. El tiempo de observación es en horas de la noche y se recomienda buscar un espacio abierto libre de contaminación lumínica.

Se necesita de un cuadrante o un astrolabio que será utilizado para medir los ángulos en las observaciones y una brújula para medir el Azimut. El cuadrante es un cuarto de círculo graduado, del vértice cuelga una plomada que indica la dirección vertical. Al apuntar al astro que se observa se toma la medida en grados sobre la que esta la marca de la plomada. El astrolabio funciona exactamente igual, tiene una mira para apuntar al astro, también está graduado, su única diferencia radica en que su forma es de un círculo completo. En caso de no contar con este instrumento se puede crear utilizando un transportador, se pega al centro de este una pita con un peso en su extremo como si fuera la plomada y como mira se puede utilizar un pitillo, el cual se pega a la base en un transportador de 180° o en el centro en un transportador de 360°. Este material deberá realizarse

Figura 5.1





Se debe apuntar el pitillo hacia la estrella a la cual se le desea determinar la altura; esta medición se repite con la misma estrella en intervalos de media o una hora, según el tiempo dispuesto por el docente y se registran en la guía, el docente debe rotar por los grupos aclarando dudas y verificando el buen uso de los instrumentos.

En los espacios de tiempo entre cada medición, cada grupo usará la carta celeste para tratar de identificar la estrella con la que están trabajando, por lo cual el docente debe explicar previamente cómo usar una carta celeste. Puede referirse al siguiente link http://www.astroviewer.com/mapa-celeste-interactivo.php, le permitirá trabajar con cartas celestes interactivas, practicar el manejo de estas e imprimirlas.

Por último, los estudiantes completarán la guía operando los datos tomados y resolviendo las preguntas propuestas. Luego, el docente mediará una socialización sobre las preguntas resueltas por cada grupo y reflexionará sobre el aporte de la actividad al entendimiento de las coordenadas horizontales y el efecto de rotación del cielo.

Advertencia

- Se debe tratar de realizar la actividad en condiciones de cielo despejado, por lo cual se debe realizar un estudio previo del estado del clima. Si la salida pedagógica no es avalada por la institución educativa se puede dejar de actividad extra escolar, por lo que se hace necesario explicar previamente el uso y aplicación de los instrumentos en clase.
- Recuerde que el sentido de medición del azimut tomado es Norte a Este y es necesario que el docente aclare dudas realizando una medición ejemplo, se pueden da muchas confusiones en este punto. Además se sugiera repetir la medida de la altura antes de registrarla.

5.2 Actividad 2: Cómo se Mueve el Sol….Cómo lo Veo Yo

Guía de trabajo: Anexo B

Objetivo: Describir y reconocer las variaciones de la altura del Sol en su movimiento aparente y su relación con el funcionamiento de un reloj solar mediante el uso del Gnomon.

Debes Saber

- Medición y operaciones entre ángulos
- Razones Trigonométricas
- Movimiento aparente de los astros

Conceptos a Trabajar

- Semejanza de figuras planas — Triángulos Rectángulos
- Razones trigonométricas
- Medición de distancias indirectas
- Movimiento del sol – Gnomon - Eclíptica

Metodología

En esta actividad cada grupo de estudiantes debe construir sus propios elementos de observación, en esta actividad deberá hacer una réplica de un indicador de sombras conocido como Gnomon. Es una varita vertical colocada sobre un plano horizontal, la longitud de la sombra de la varita sirve de base para calcular la altura aparente del sol y también para medir el tiempo.

Para construir nuestro Gnomon necesitamos una vara preferiblemente cilíndrica que mida de 40 cm a 80 de cm altura y tenga un diámetro mínimo de 3 o 4 cm, puede ser el palo de una escoba por ejemplo. Para mejorar la precisión de las mediciones se debe poner algo puntiagudo en la parte superior.

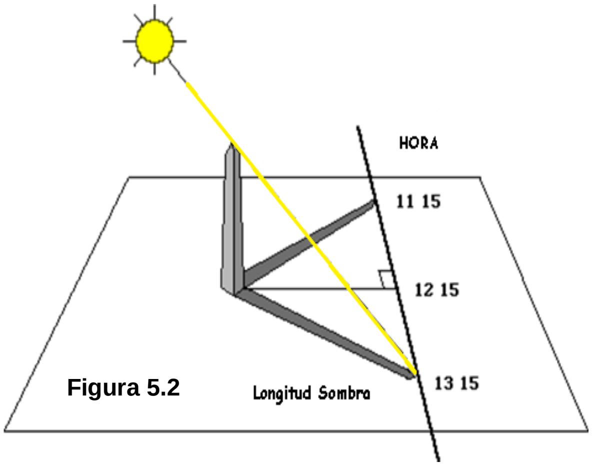


Figura 5.2

La vara debe estar sobre una base que le dé estabilidad ya que se necesita conseguir una sombra bien definida. Se debe buscar un lugar abierto lo mas horizontal posible para ubicarlo. Sobre la superficie donde se tomaran las medidas debe ponerse papel sobre el cual se harán las marcas de las alturas de las sombras, o puede aplicar pintura si la institución lo permite, siempre manteniendo la forma de la marca y al terminar la medición se debe guardar.

Cada grupo debe registrar las mediciones hechas durante el transcurso del día según la guía (Apéndice B) en los periodos de tiempo que el docente establezca, teniendo como precedente que deben ser valores antes, al medio día y después del medio día. Al terminar los registros se deben conectar las marcas hechas sobre el papel y realizar los cálculos trigonométricos correspondientes para encontrar el ángulo de inclinación. El material se debe guardar ya que se debe repetir la experiencia otro día, para comparar y analizar los resultados.

Advertencia

- El docente debe verificar previamente las dimensiones de la vara y cómo se piensa dejar estable, así como las condiciones de la superficie donde piensa realizar la actividad. Entre más despejado este el cielo, más horizontal sea la superficie y más estable sea la vara mejor será la calidad de la sombra y las mediciones.
- Explicar porque hay que hacer la corrección de medida mencionada en la guía.
- Se debe recalcar la importancia de guardar los datos de la medición ya que se deben comparar con los obtenidos en la segunda experiencia.

5.3 Actividad 3: Bautizando Astros Encontrando la Declinación

Guía de trabajo: Anexo C

Objetivo: Transformar las coordenadas horizontales en coordenadas ecuatoriales, para identificar el astro que se está observando.

Debes Saber

- Medición y operaciones entre ángulos
- Esfera Celeste - Carta Celeste
- Coordenadas Geográficas, Horizontales y Coordenadas Ecuatoriales
- Teoremas de la Trigonometría Esférica

Conceptos a Trabajar

- Altura (h), Azimut (A) y Declinación (δ) de una estrella
- Transformación de Coordenadas
- Relación coordenadas del Observador y Estrellas Visibles
- Teoremas de Trigonometría

Metodología

Esta actividad se desarrollará por grupos, preferiblemente de 3 estudiantes, aunque cada uno debe tener su guía para el registro de datos. El tiempo de observación es en horas de la noche y se recomienda buscar un espacio abierto libre de contaminación lumínica.

Se necesitan los mismos materiales y procedimientos para medir la altura y el Azimut de la actividad 1, llenando la guía correspondiente (Apéndice C). Además se utiliza una nueva herramienta conocida como "World Wide Telescope"Este programa permite revisar visualmente y en tiempo real diferentes astros, sistemas y conceptos en astronomía, con una gran resolución. Debe estar instalado previamente en algún computador portátil y el docente debe explorarlo previamente para aprender sobre el manejo de sus herramientas. El programa puede descargarse del siguiente link http://www.worldwidetelescope.org/experienceit/experienceit.aspx?page=downloadwwt . Sus aplicaciones pedagógicas son ilimitadas y sólo dependen de la imaginación del docente. Puede usarse también el programa Stellarium, revisar el link: http://www.stellarium.org/es/, se deja a decisión del docente la elección del programa.

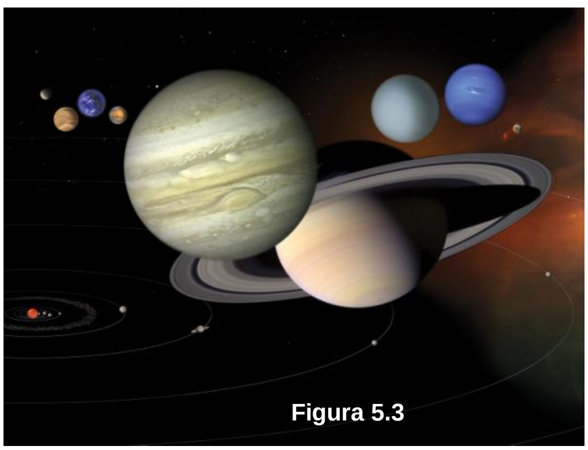


Figura 5.3

Cada grupo tomara las medidas para 5 astros diferentes. Conociendo la altura **h**, azimut **A** de la estrella y la latitud ϕ del lugar de observación, cada grupo encontrara la declinación δ y ángulo horario **H** de cada estrella respectiva. El docente debe estar rotando por los grupos para resolver las dudas presentadas en el desarrollo de la actividad.

Después de obtener las coordenadas ecuatoriales, se pasara a identificar la estrella que se está observando, iniciando con la herramienta World Wide Telescope o Stellarium, introduciendo las coordenadas encontradas y después se verifica con el uso de la carta celeste.

Advertencia

- Se deben realizar ejercicios previos practicando la transformación de coordenadas.
- Llevar a la salida más de un computador con el programa instalado y la batería cargada en su totalidad previamente.
- Se sugiere capacitar estudiantes en el manejo de las herramientas de los programas, para evitar el caos en el momento de la identificación del astro.
- En caso de que los valores obtenidos no coincidan, se deben volver a tomar los datos.

5.4 Actividad 4: La Estrella que Veo y el Lugar Donde Estoy Hacen Buena Pareja

Objetivo: Identificar que estrellas pueden ser circumpolares según la ubicación geográfica del observador y que otras no circumpolares son visibles en ese lugar.

Debes Saber

- Operaciones entre ángulos
- Esfera Celeste - Condiciones de Circumpolaridad
- Coordenadas Geográficas y Coordenadas Ecuatoriales

Conceptos a Trabajar

- Estrellas Circumpolares
- Relación coordenadas del Observador y Estrellas Visibles
- Operaciones entre Ángulos

Metodología

En dos bolas de icopor grandes el docente pondrá diferentes papeles en su superficie, en cada uno escribirá las coordenadas geográficas de algún lugar de la Tierra. En el tablero o colgando del techo ubicara unos papeles en forma de estrella, en cada uno debe ir el nombre de alguna estrella con sus coordenadas Ecuatoriales Horarias correspondientes.

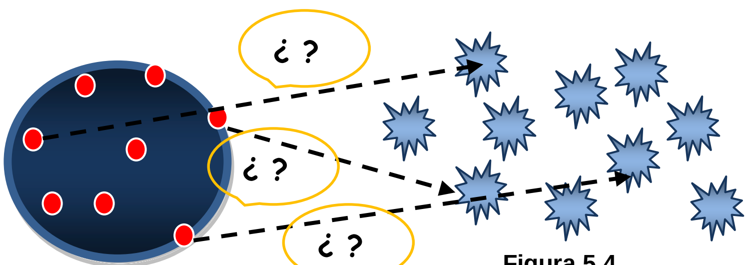


Figura 5.4

Cada grupo puede tomar los datos que quiera sin retirar los papeles de sus ubicaciones, el objetivo es encontrar según la coordenada de la estrella en que lugares puede ser visible y según las coordenadas geográficas del lugar que estrellas puede ver y cuales serian circumpolares. Después de que algún grupo haya hecho los cálculos y análisis respectivos tendrá derecho de retirar la estrella y el lugar de la bola de icopor. Los que encuentren estrellas circumpolares según el lugar, ganaran dos puntos. El grupo que más parejas complete ganara el juego.
El docente debe ir comprobando que los cálculos estén bien hechos y debe dar un tiempo específico de juego, según el espacio académico asignado.

Advertencia

- El docente debe realizar los cálculos previos al juego revisando que se encuentren coincidencias entre estrellas, lugares y se puedan encontrar estrellas circumpolares.
- El material debe hacerse de tal forma que no pueda ser plagiado por los grupos.
- Se deben realizar ejercicios de cálculo de estrellas circumpolares antes de la actividad.

Una recomendación final, recrear los cálculos hechos por Eratóstenes y Aristarco (capítulo 1) para el cálculo de distancias y tamaños de cuerpos celestes, proporciona una herramienta pedagógica invaluable para la enseñanza de elementos trigonométricos sobre el pensamiento astronómico de la época.

6. CONCLUSIONES

- El establecimiento de una relación histórica entre la astronomía y la matemática requirió de una extensa revisión bibliográfica, debido a las inconsistencias en algunas fechas, por lo cual requerían confirmación de diversas fuentes.

- Conocer la historia desde los inicios hasta el conocimiento actual de las cosas especialmente de la astronomía, mostrando no sólo fechas, sino los argumentos ideológicos, prácticos y matemáticos que llevaron a que las ideas y modelos se modificaran sirve para que los estudiantes entiendan que las ciencias fueron construcciones del ser humano, que aun pueden cambiar.

- Al revisar el aspecto histórico en la evolución de conceptos astronómicos, desde el contexto de porque se pensaron y porque se modificaron, se encontró que algunos estudiantes seguían con ideas de modelos antiguos, como la no rotación de la tierra.

- Si es posible llegar a teoremas de la trigonometría esférica partiendo de teoremas y conceptos de la trigonometría plana vistos en las temáticas desarrolladas en grado décimo.

- El desarrollo de situaciones correspondientes a cálculos de distancias y transformaciones de coordenadas en el modelo esférico de la tierra es bien manejado por los estudiantes, aunque hay que tener especial cuidado en la inclusión de los signos para latitudes, longitudes y declinaciones.

- No se presenta un estado de resultados de aplicación de las actividades pedagógicas ya que esto no era un fin del presente trabajo, aunque mucho del material fue involucrado en algunas clases.

- Cada capítulo del presente trabajo puede ser abordado a lo largo del año lectivo, según los propósitos del docente. Esta incursión en las temáticas escolares puede ser más efectiva, productiva y eficiente si se abordan simultáneamente en las asignaturas de física y matemáticas. Para esto ambos docentes deben contar con el material y concretar objetivos en común.

- Las actividades prácticas motivan la participación del estudiante durante todo el proceso, además permiten tanto el estudiante como el docente se den cuenta de los vacios que tiene en matemáticas y física, ya que obstaculizan de cierta forma el desarrollo de la actividad.

- Para que las actividades sean efectivas el docente a cargo si es de matemáticas debe reforzar sus conocimientos es astronomía y si es físico debe reforzarlos en matemáticas.

- El desarrollo de las actividades depende principalmente de la motivación del docente por involucrar la astronomía como estrategia de enseñanza. Debido a que se requiere bastante tiempo no solo para la implementación de las actividades sino para la preparación del mismo docente.

- La implementación de las actividades pedagógicas propuestas requieren de la participación y compromiso no sólo de docentes y estudiantes, sino también del apoyo brindado por padres de familia y directivas de la institución educativa. Debe evidenciarse una buena disposición de la comunidad educativa

A. ANEXO: Actividad Pedagógica 1

UBICANDO LAS ESTRELLAS – RECONOCIENDO LAS COORDENADAS ASTRONÓMICAS

INTEGRANTES: ____

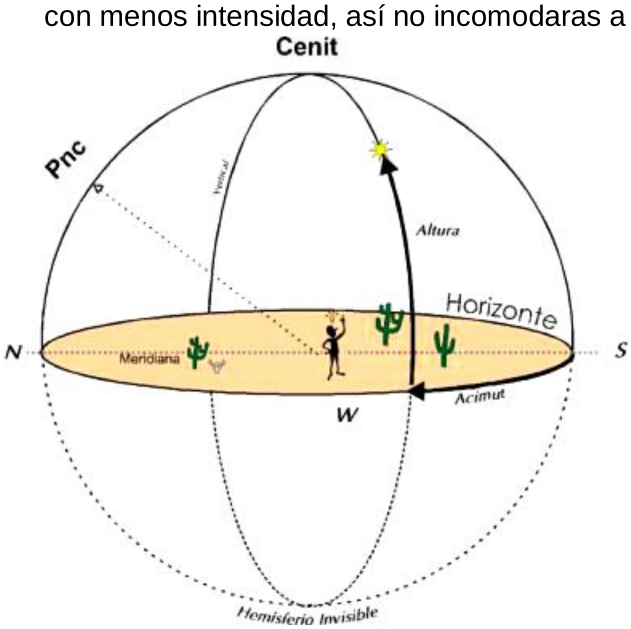
APRENDERAS A: Reconocer y medir las coordenadas horizontales de estrellas visibles para aprender a ubicar cuerpos celestes y reconocer el efecto de rotación del firmamento, mediante la medición de ángulos.

MATERIALES

- Astrolabio o Cuadrante
- Carta Celeste
- Brújula y Reloj
- Linterna
- Papel Celofán Rojo

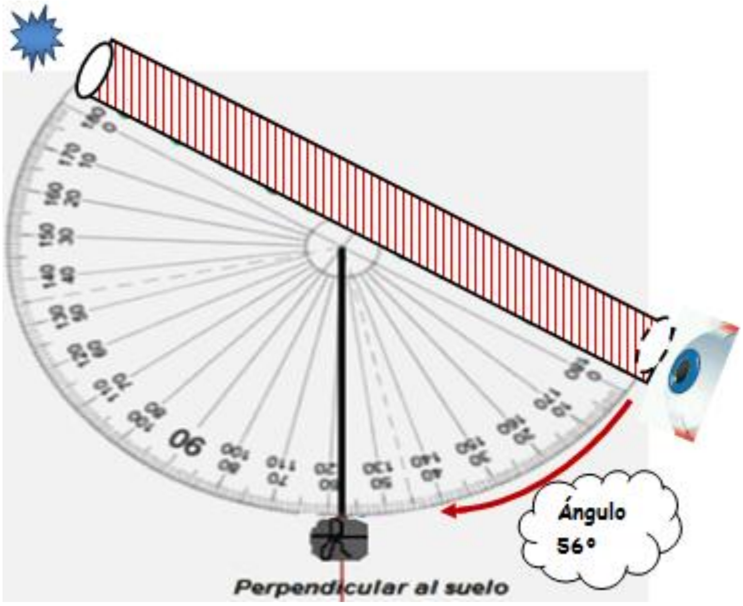
PROCEDIMIENTO

Para que el uso de linterna no afecte las observaciones, coloque el papel celofán sobre la superficie por donde sale la luz. De tal forma que cuando la enciendas sale una luz rojiza con menos intensidad, así no incomodaras a los demás observadores.



Recordemos que para determinar la posición de una estrella se deben encontrar dos valores básicos. En esta actividad vas a medir con el astrolabio la altura y con la brújula el Azimut.

Para empezar elija tres estrellas en el firmamento que pueda identificar fácilmente, sea por su brillo o la figura que forme con las estrellas cercanas. Una de las estrellas debe estar próxima a su cenit



Dirija el astrolabio usando la mira (pitillo) hacia una de las estrellas seleccionadas y mida el ángulo, cuyo valor es la altura de la estrella, como muestra la figura. Repita nuevamente la medición para confirmar el dato y regístrelo en la tabla.

Para medir el Azimut, ubique su brújula en dirección Norte y gire en sentido Este (E) hasta donde estaría ubicada la estrella en el horizonte del observador. Registre el valor en la tabla

	ESTRELLA 1			ESTRELLA 2			ESTRELLA 3		
Tomas	Tiempo hh:mm	Altura h	Azimut A	Tiempo hh:mm	Altura h	Azimut A	Tiempo hh:mm	Altura h	Azimut A
1									
2									
3									
Variación									

Para cada estrella debes hacer las mismas mediciones, después de una hora repite el mismo proceso de medida hasta completar las tres tomas. En la casilla que dice variación debes escribir la diferencia entre la primera y última toma de cada variable.

Después de que tomes la primera medida utiliza la carta celeste ubicando el mes y la hora de observación, intenta identificar las estrellas que estas observando.
Para complementar la actividad responde las siguientes preguntas:

1. ¿Qué sucede al pasar el tiempo con las coordenadas altura y azimut de las estrellas?
2. Se puede afirmar que alguna de las dos coordenadas no varía o varia más rápido que la otra? Explique.
3. Compare las variaciones de las dos coordenadas entre las tres estrellas. ¿Qué encontraste?
4. ¿Cada noche vas a ver siempre las mismas estrellas, en el mismo lugar?
5. ¿Estas mediciones que ideas antiguas de la astronomía podrían apoyar o contradecir?

Discute y socializa tus respuestas

B. ANEXO: Actividad Pedagógica 2

COMO SE MUEVE EL SOL….COMO LO VEO YO

INTEGRANTES: ____

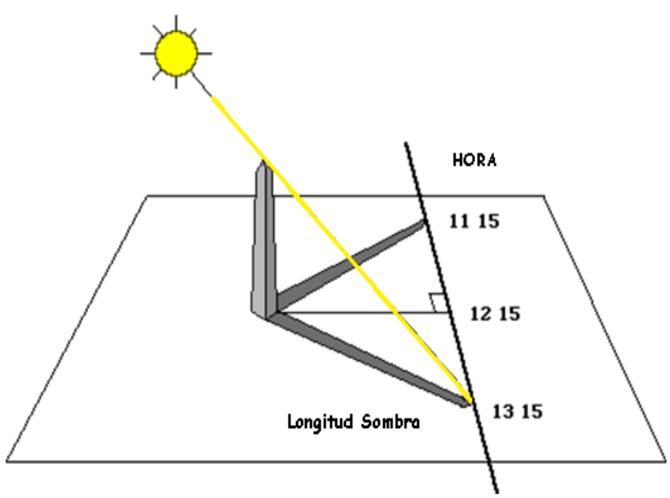
APRENDERAS A: Describir y reconocer las variaciones de la altura del Sol en su movimiento aparente y su relación con el funcionamiento de un reloj solar mediante el uso del Gnomon.

MATERIALES

- Vara 40 cm – 80 cm o palo de escoba con punta aguda.
- 5 Pliegos de Papel Periódico, Marcadores y cinta
- Base para la Vara
- Calculadora científica
- Metro y Reloj

PROCEDIMIENTO

Coloque la base con la vara verificando que al ponerla de pie quede estable, de no ser así debe modificarla.

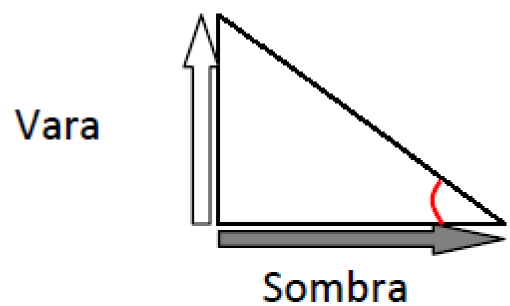


Ubique su Gnomon en un espacio abierto y desde su base coloque los pliegos de papel en la dirección donde se están produciendo las sombras.

Según las instrucciones del docente marque sobre el papel el punto más alto de la sombra indicando la hora de medición, como en la figura. Tome la medida de la sombra con el metro y registre los datos tomados en la siguiente tabla:

Tiempo hh: mm	Medida de la Sombra	Medida Corregida	Ángulo °	Altura

La medida corregida consiste en quitarle al valor de la medida de la sombra el valor del radio del gnomon.



El valor del ángulo se encuentra al aplicar las funciones trigonométricas al triángulo formado por la medida de la vara y la sombra:

Mida las distancias que hay entre las marcas hechas sobre el papel en orden de la toma de medición y con base a la longitud de la sombra, llene:

TIEMPO	Variación del Tamaño de la sombra	Variación de la Distancia entre Marcas	Variación del Ángulo

* Debe guardar guía con los datos para compararlos con los obtenidos en la segunda sesión
.

Para complementar la actividad responde y socializa las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se relaciona el paso del tiempo con el tamaño de la sombra?
- ¿Qué sucede con la sombra al medio día? ¿Por qué crees que pasa esto?
- ¿Los triángulos formados por cada sombra tienen alguna relación?
- ¿Cómo se podría medir el tiempo con esta herramienta y que desventajas tendría?
- ¿Cuál crees que es la importancia del ángulo en esta medición?
- ¿Cómo se relaciona el tamaño de la sombra con la posición del sol?

Después de la segunda sesión de mediciones:

- ¿Qué cambios encontró entre las medidas y resultados de la primera experiencia con los que midió el día de hoy?
- ¿Qué explicación podría darle a estas variaciones?

C. ANEXO: Actividad Pedagógica 3

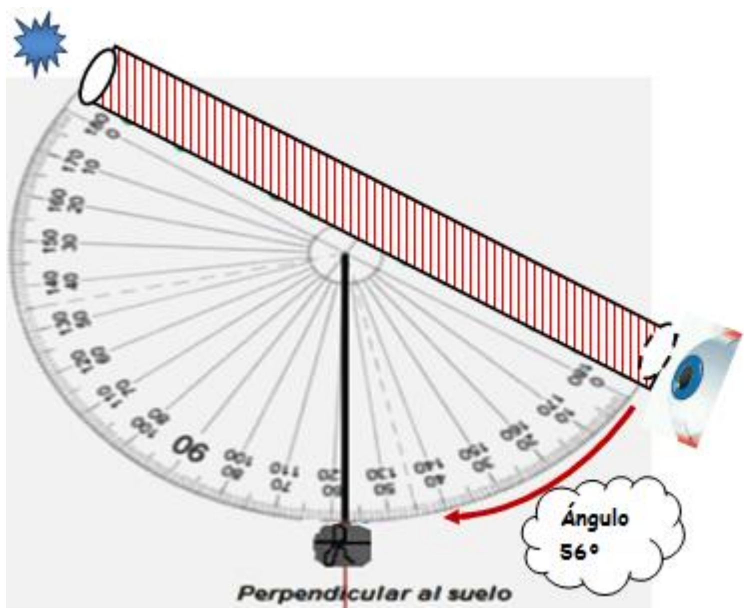
BAUTIZANDO ASTROS ENCONTRANDO LA DECLINACIÓN

INTEGRANTES: ____

APRENDERAS A: Transformar las coordenadas horizontales en coordenadas ecuatoriales, para identificar el astro que se está observando.

MATERIALES
- Astrolabio o Cuadrante
- Carta Celeste
- Brújula y Reloj
- Linterna y Papel Celofán Rojo
- Calculadora Científica
- Computador Portátil con el Programa Elegido

PROCEDIMIENTO
El tiempo de observación es en horas de la noche y se recomienda buscar un espacio abierto libre de contaminación lumínica. En grupos de 3 estudiantes, elegirán cinco astros del firmamento ubicados en coordenadas bastante diferentes.



Apunte el astrolabio a la estrella seleccionada y mida su altura, mida el Azimut con la brújula ubicando el punto cardinal Norte y muévase en sentido este hasta el lugar donde está el astro sobre el horizonte.

Registre los datos y complete la siguiente tabla transformando las coordenadas con los teoremas dados en clase anteriormente:

Astro	Altura h	Azimut A	Declinación δ	Ángulo Horario H	Nombre de la Estrella
1					
2					
3					
4					
5					

Después de completar la tabla abra el programa instalado en su computador puede ser "World Wide Telescope" ó Stellarium, introduzca las coordenadas **H** y δ e inicie la exploración hasta encontrar el nombre de la estrella. Verifique en la carta celeste que la estrella aparezca en el rango de la fecha y hora de la observación.

Para Reflexionar:

- ¿Qué relación encuentras entre ambos sistemas de coordenadas?
- ¿Cómo afecta la imprecisión de las mediciones de **h** y **A**, el reconocimiento de la estrella?
- ¿Qué relación encuentras entre los teoremas de la trigonometría plana vistos en clase con los que utilizaste en la actividad?
- Navega en el programa y explora los conceptos astronómicos vistos.

D. ANEXO: Tabla Estrellas más Cercanas al Sol

Lista de estrellas con sus coordenadas[41], útil para generalizar los datos en el aula de clase, de una estrella usada en algún problema sobre aplicación de distancias.

Las estrellas más cercanas al Sol

Estrella	α		δ		Magnitud	Espectro	Paralaje	Mov. propio
	h	m	°	'	absoluta		(")	"/año
α Cen C (Próxima)	14	30	-62	41	15.45	M5eV	0.762	3.85
α Cen A	14	40	-60	50	4.35	G2V	0.745	3.68
α Cen B	14	40	-60	50	5.69	K5V	0.745	3.68
Estrella de Barnard	17	58	04	34	13.25	M5V	0.552	10.31
Wolf 359	10	56	07	01	16.68	M6eV	0.429	4.71
BD+36°2147	11	03	35	48	10.49	M2V	0.401	4.78
α CMa (Sirius A)	06	45	-16	43	1.42	A1V	0.377	1.33
α CMa (Sirius B)	06	45	-16	43	11.56	eb A	0.377	1.33
Luyten 726-8 A	01	39	-17	57	15.27	M6eV	0.367	3.36
Luyten 726-8 B	01	39	-17	57	15.8	M6eV	0.367	3.36
Ross 154	18	50	-23	50	13.3	M4eV	0.345	0.72
Ross 248	23	42	44	10	14.80	M6eV	0.317	1.59
ϵ Eridani	03	33	-09	28	6.13	K2V	0.303	0.98
Luyten 789-6	22	39	-15	19	14.60	M6eV	0.303	3.26
Ross 128	11	48	00	48	13.50	M5V	0.301	1.37
61 Cygni A	21	07	38	45	7.58	K5V	0.294	5.21
61 Cygni B	21	07	38	45	8.39	K7V	0.294	5.21
ϵ indi	22	03	-56	47	7.00	K5V	0.291	4.69
α CMe (Procyon A)	07	39	05	13	2.64	F5V	0.286	1.25
α CMe (Procyon B)	07	39	05	13	13.0	ebF	0.286	1.25

[41] Tabla tomada del libro: *Elementos de astronomía de Posición*. JOSE GREGORIO PORTILLA

E. ANEXO: Tabla de Estrellas Más Brillantes

Lista de las estrellas más brillantes con sus coordenadas[42], útil para generalizar los datos en el aula de clase, de una estrella usada en algún problema sobre aplicación de distancias.

Las estrellas más brillantes

Estrella		α		δ		Magnitud	Espectro	r	Mov. propio
		h	m	°	'	absoluta		(parsecs)	"/año
α CMa	Sirius	06	45.1	−16	43	1.4	A1V, ebA	2.7	1.33
α Car	Canopus	06	24.0	−52	42	-4.6	F0Ib-II	60	0.02
α Cen	Rigil Kentarus	14	39.6	−60	50	4.1	G2V, K5V	1.3	3.68
α Boo	Arcturus	14	15.7	19	11	-0.3	K2IIIp	11	2.28
α Lyr	Vega	18	36.9	38	47	0.5	A0V	8.1	0.34
α Aur	Capella	05	16.7	46	00	-0.6	G5III,G0III	14	0.44
β Ori	Rigel	05	14.5	−08	12	-7.0	B8Ia	250	0.00
α CMi	Procyon	07	39.3	05	13	2.6	F5V, ebF	3.5	1.25
α Eri	Achernar	01	37.7	−57	14	-2.5	B3Vp	38	0.10
α Ori	Betelgeuse	05	55.0	07	24	-6.0	M2I	200	0.03
β Cen	Hadar	14	03.8	−60	22	-5.0	B1 II	120	0.04
α Aql	Altair	19	50.8	08	52	2.2	A7V	5.1	0.66
α Cru	Acrux	12	26.6	−63	06	-4.7	B0.5IV,B1V	120	0.04
α Tau	Aldébaran	04	35.9	16	31	-0.8	K5III	21	0.20
α Vir	Spica	13	25.2	−11	10	-3.6	B1V	80	0.05
α Sco	Antares	16	29.4	−26	26	-4.6	M1 Ib,B2.5V	130	0.03
β Gem	Pollux	07	45.3	28	01	1.0	K0III	11	0.62
α PsA	Fomalhaut	22	57.6	−29	37	1.9	A3V	7	0.37
α Cyg	Deneb	20	41.4	45	17	-7.2	A2Ia	500	0.00
β Cru	Mimosa	12	47.7	−59	41	-4.6	B0III	150	0.05
α Leo	Regulus	10	08.4	11	58	-0.7	B7V	26	0.25

[42] Tabla tomada del libro: *Elementos de astronomía de Posición*. JOSE GREGORIO PORTILLA

BIBLIOGRAFÍA

[1] AABOE Asger. *Episodios Históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo*. New York, Random House. 1964.

[2] ABETTI Giorgio. *Historia de la Astronomía*. Florencia, Fondo de cultura económica, 1963.

[3] APPEL Jhon. *Proyectos de Astronomía*. Colombia, Jhon Appel, 2000.

[4] AVERBUJ Eduardo, *Con el cielo en el Bolsillo: la Astronomía a través de la Historia*. Segunda edición, Madrid, Edición de la Torre, 1990.

[5] BELL. E. *Historia de las Matemáticas*. New York, Mc Graw-Hill, 1945.

[6] BOURBAKI Nicolas. *Elementos de Historia de las Matemáticas*. Madrid, Alianza Editorial, 1976.

[7] DORCE Carlos. Ptolomeo el Astrónomo de los Círculos. España, Nivola Libros Ediciones, 2006.

[8] DREYER J. *A History of Astronomy from Thales to Kepler.* New York, Dover Publications, 1953.

[9] FRANCO Salvador. *Historia Del Arte y Ciencia De Navegar*. España: Instituto Histórico de Marina, 1947.

[10] GIANFRANCO V. *Lecciones De Trigonometría*. Segunda edición, México: Limusa, 1990.

[11] GONZALEZ José Ignacio. *Obras Clásicas De Náutica y Navegación*. España: Fundación Histórica Tavera, 1998.

[12] HOFFMAN Joseph. Historia de la Matemática. México, Limusa Noriega Editores, 2002.

[13] KARTTUNEN Hannu. *Fundamental Astronomy*. Quinta Edición, New York: Springer, 2007.

[14] MEN (Ministerio De Educación Nacional). *Estándares Básicos De Calidad en Matemáticas y Ciencias*. Bogotá, 2003.

[15] MORA Juan. *Historia de las Matemáticas y la Astronomía en la India Antigua*. México, Universidad Autónoma, 2003.

[16] MOREIRA Antonio. *Aprendizaje Significativo Crítico*. Indivisa No 6, Brasil, Instituto de Física da UFRGS, 2005.

[17] MORRIS Kline. *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días*. Madrid: Alianza, 1994.

[18] NORTH John. *The Fontana History of Astronomy and Cosmology*. Segunda edición, Fondo de Cultura Económica, 2001.

[19] PORTILLA José Gregorio. *Elementos De Astronomía De Posición*. Segunda edición, Bogotá: Observatorio Astronómico Nacional, 2001.

[20] PORTILLA José Gregorio. *Astronomía Para Todos*. Segunda edición, Bogotá: Observatorio Astronómico Nacional, 2001.

[21] ROY A. y Clarke. *Astronomy Principles and Practice*. Cuarta edición, Instiute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, 2003.

[22] SANCHEZ Angel. Astronomía y Matemáticas en el Antiguo Egipto. Madrid, Aldebaran Ediciones, 2000.

[23] SIR HEATH Thomas*.* *Greek Astronomy*, Volumen I. New York, Dover Publications, 1991.

[24] SIR HEATH Thomas. *A History for Greek Mathematics, From Thales to Euclid*, Volumen I. New York, Dover Publications, 1981.

[25] SOLIS Carlos. *Galileo Galilei, Consideraciones y Demostraciones Matemáticas Sobre dos Nuevas Ciencias*. Madrid, Editora Nacional, 1976.

[26] STRUIK Dirk. *A concise History of Mathematics. New York, Publications Inc*, 1967.

[27] VILLAMARIN Torres. *Reseña Histórica sobre Trigonometría hasta el siglo II A.C*. Revista Notas de Matemáticas, No 32, 1993.