Examen de Matemáticas. 7 de Abril 2017

Examen Tema 10: Sucesiones.

Apellidos/Nombre: .... GRUPO ....

1. Escribe el término que ocupa el lugar 4, 5 y 10 de las siguientes sucesiones:

   a) (0,75 puntos) $a_n = 2n - 1$
   La solución es: $a_4 = 2\Delta 4 - 1 = 8 - 1 = 7$ Se Puntuará con 0,25 cada uno de los términos que calcule correctamente. Se restará 0,1 puntos por cada error en numérico cometido en los cálculos de cada término.

   b) (0,75 puntos) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$
   La solución es:
   $a_1 = 1$ $a_2 = 2$ $a_3 = 2a_2 - a_1 = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$ $a_4 = 2a_3 - a_2 = 2 \cdot 3 - 2 = 6 - 2 = 4$ $a_5 = 2a4 - a_3 = 2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 = 5$ $a_6 = 2a_5 - a_4 = 2 \cdot 5 - 4 = 10 - 4 = 6$ $a_7 = 2a_6 - a_5 = 2 \cdot 6 - 5 = 12 - 5 = 7$ $a_8 = 2a_7 - a_6 = 2 \cdot 7 - 6 = 14 - 6 = 8$ $a_9 = 2a_8 - a_7 = 2 \cdot 8 - 7 = 16 - 7 = 9$ $a_10 = 2a_9 - a_8 = 2 \cdot 9 - 8 = 17 - 8 = 9$

   - Se Puntuará con 0,25 cada uno de los términos que calcule correctamente.
   - Se restará 0,1 puntos por cada error en numérico cometido en los cálculos de cada término.

2. Escribe el término general de las siguientes sucesiones:

   a) (0,5 puntos) 3,5,7,9,...
   Solución: En este caso basta con observar que se trata de una progresión aritmética con diferencia d=2, y primer término $a_1 = 3$, por lo tanto el término general viene determinado por: $a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1) \cdot 2$ Así se tiene que $a_n = 3 + 2n - 2$, de donde el término general viene dado por: $a_n = 2n + 1$

   - Si el alumno identifica que se trata de una progresión aritmética pero se equivoca al calcular el término general, se le puntuará con 0,25.
   - Si el alumno identifica el término general sin razonar de donde lo obtiene se puntuará con 0,25.
   - Si el alumno encuentra otra forma válida de encontrar el término general sin utilizar la fórmula de las progresiones aritméticas y lo razona, se puntuará con la puntuación máxima 0,5 puntos.

   b) (0,5 puntos) 2,5,10,17, ...
   Solución: En este caso basta con observar $a_1 = 1^2 + 1 = 2$ $a_2 = 2^2 + 1 = 5$ $a_3 = 3^2 + 1$ $a_4 = 4^2 + 1$ El término general vendrá dado por lo tanto por $a_n = n^2 + 1$

   - Se puntuará con 0,25 si el alumno realiza un razonamiento similar para obtener el término general pero no consigue calcularlo correctamente.
   - Se puntuará con 0,5 cualquier solución válida y razonada para llegar a la solución correcta.

3. Indica si las siguientes progresiones son aritméticas o geométricas y calcula la suma de los 10 primeros términos.

   a) (0,75 puntos) 32, 16, 8, ... Solución: En este caso se trata de una progresión geométrica de razón $r = 1/2$. Calculamos la suma de los 10 primero términos, para ello calculamos en primer lugar el término a_{10}: $a_{10} = a_1 \cdot r^{10-1} = 32 \cdot (\frac{1}{2})^9 = 32 = \frac{2^5}{2^9} = \frac{32}{512} = \frac{1}{16}$.
   Ahora calculamos la suma: $S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} - 32}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{64} - \frac{2048}{64}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{2}} = \frac{\frac{-2017}{64}}{\frac{-1}{2}} = \frac{2047}{32}$

   - No se puntuará el ejercicio si el alumno no calcula el término décimo o pone un resultado para éste sin razonar.
   - Se puntuará con 0,25 si el alumno calcula el término décimo, pero no intenta calcular la suma de los diez términos, o no utiliza la fórmula correcta para ello.
   - Se puntuará con 0,5 puntos si el alumno calcula el término décimo, utiliza la fórmula correcta para la suma pero se equivoca al realizar los cálculos.
   - Se penalizará con 0,1 puntos si el alumno utiliza decimales en sus razonamientos.

   b) (0,75 puntos) 15,12,9,...
   Solución: En este caso se trata de una progresión aritmética con diferencia $d = -3$. Calculamos el término décimo, para ello utilizamos la fórmula general de las progresiones aritméticas: $a_n = a_1 + (n-1)d = 15 + (n-1)(-3)$ Es decir el término general vendrá dado por $a_n = -3n + 18$ Sustituyendo tenemos $a_10 = -3(10) + 18 = -12$ Así la suma de los n primeros términos vendrá dada por: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$
   Por tanto para los diez primeros términos tendremos: $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})10}{2} = \frac{(15-12)10}{2} = 15$

   - No se puntuará el ejercicio si el alumno no calcula el término décimo o pone un resultado para éste sin razonar.
   - Se puntuará con 0,25 si el alumno calcula el término décimo, pero no intenta calcular la suma de los diez términos, o no utiliza la fórmula correcta para ello.
   - Se puntuará con 0,5 puntos si el alumno calcula el término décimo, utiliza la fórmula correcta para la suma pero se equivoca al realizar los cálculos.
   - Se penalizará con 0,1 puntos si el alumno utiliza decimales en sus razonamientos.

4. (1 punto) De una progresión aritmética se sabe que $a_{13} = 40$ y que $a_{21} = 64$. Calcula el primer término y la diferencia.

   Solución: En este caso si utilizamos el término general se tiene: $a_n = a_1 + (n-1)d$
   Sustituyendo por n=13, tenemos: $a_{13} = a_1 + (13-1)d$ de donde se obtiene que
   $40 = a_1 + 12d$
   Sustituyendo por n=21, tenemos: $a_{21} = a_1 + (21-1)d$ de donde se obtiene que
   $64 = a_1 + 20d$
   Con las dos ecuaciones anteriores se resuelve el sistema de ecuaciones y obtenemos el primer término y la diferencia. Se obrtiene que $a_1 = 4, d = 3$

   - Si el alumno no utiliza la fórmula general pero no llega a plantear el sistema de ecuaciones se puntuará con 0,25 puntos.
   - Si el alumno plantea el sistema de ecuaciones obtendrá 0,75 puntos.
   - Si el alumno resuelve correctamente el problema, pero tiene errores numéricos propios de un despiste se penalizará con 0,25 puntos.

- Si el alumno logra resolver el problema pero tiene errores numéricos relacionados con la jerarquía de operaciones se penalizará con 1 punto.
- Será válido cualquier razonamiento siempre que sea matemáticamente correcto y sea explicado por el alumno.

5. (1 punto) De una progresión geométrica se sabe que $a_2 = 1$, $a_4 = 4$. Calcula el primer término y la razón.

   Solución: Se trata de una progresión geométrica, por lo que utilizaremos la fórmula general para este tipo de sucesiones: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ Sustituyendo n=2, se tiene:
   $a_2 = a_1 \cdot r^{2-1}$, de donde
   $1 = a_1 \cdot r$
   Sustituyendo n=4, se tiene: $a_4 = a_1 \cdot r^{4-1}$, de donde:
   $4 = a_1 \cdot r^3$ Planteando el sistema de ecuaciones y resolviéndolo, se llega a: $r = 2, a_1 = \frac{1}{2}$.

   - Si el alumno no utiliza la fórmula general pero no llega a plantear el sistema de ecuaciones se puntuará con 0,25 puntos.
   - Si el alumno plantea el sistema de ecuaciones obtendrá 0,75 puntos.
   - Si el alumno resuelve correctamente el problema, pero tiene errores numéricos se penalizará con 0,25 puntos.
   - Si el alumno logra resolver el problema pero tiene errores numéricos relacionados con la jerarquía de operaciones se penalizará con 1 punto.
   - Será válido cualquier razonamiento siempre que sea matemáticamente correcto y sea explicado por el alumno.

6. (2 puntos) Elena quiere vender su coche, por el que pide 5000 euros. Juan está interesado, pero le parece algo caro. "Hagamos un trato"dice Elena. En lugar de venderte el coche, te vendo ... no sé, los tornillos de las ruedas, por ejemplo. Por el primer tornillo me das un céntimo, por el segundo tornillo dos céntimos, cuatro céntimos por el siguiente y así sucesivamente. Cuando me pagues los 20 tornillos que hay en total, te regalo el coche. ¡Y mira que la rueda de repuesto tampoco te la cobro!. Juan acepta el trato. ¿Cuanto pagará Juan por el coche?

   Solución: Se trata de una progresión geométrica, donde el primer término es $a_1 = 1$, y la razón es r=2. Se trataría de calcular la suma de los veinte primeros términos para obtener el valor de los tornillos.
   Calculamos en primer lugar el término a_20, para ello utilizamos la fórmula general $a_20 = a_1 \cdot r^{20-1} = 1 \cdot 2^{19} = 524288$
   Así tenemos que la suma de los veinte primeros términos nos queda: $S_{20} = \frac{a_{20} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{524288 \cdot 2 - 1}{2-1} = 1048576$, por lo tanto el coche le costará 1048576 céntimos de euro, es decir 10 485,76 euros, más de lo que le costaría incialmente.

   - Si el alumno identifica la progresión geométrica se puntuará con 0,25.
   - Si el alumno calcula el término vigésimo se puntuará con 0,75 puntos.
   - Si el alumno identifica la solución del problema con la suma de los veinte primeros términos, calcula el término vigésimo pero no logra sumarlos obtendrá 1 punto.
   - Si el alumno se equivoca en la fórmula de la suma de los términos pero identifica a ésta como la solución y calcula el término vigésimo, obtendrá 1 punto.

- Si el alumno logra resolver el problema pero tiene errores numéricos propios del despiste, se penalizará con 0,25 puntos.
- Si el alumno logra resolver el problema pero tiene errores numéricos relacionados con la jerarquía de operaciones se penalizará con 1 punto.

7. El primer piso de un rascacielos está a 5 m de altura, y cada uno de los siguientes está a una altura de 3 metros más que el anterior. Calcula:

   a) (0,5 puntos) La altura a la que estará el piso número 20. Solución: En este caso se trata de una progresión arítmética con $a_1 = 5$, $d = 3$. La altura del piso 20 corresponde al término 20 de la sucesión, es decir $a_20 = a_1 + (20-1)d = 5 + 19 \cdot 3 = 62$. El piso número 20 estará a 62 metros de altura.

   - Si el alumno identifica la progresión aritmética pero calcula la suma de los veinte primeros términos se puntuará con 0,25 puntos.
   - Si el alumno se equivoca al realizar los cálculos con un error propio del despiste se penalizará con 0,1 puntos. Si el alumno logra resolver el problema pero tiene errores numéricos relacionados con la jerarquía de operaciones este apartado no puntuará.

   b) (1 punto) Si una persona se asoma a 95 metros de altura, ¿En qué piso se asoma? Solución: En este caso tenemos que $a_n = 95$, tendremos que calcular n, para ello utilizaremos la fórmula general:
   $a_n = a_1 + (n-1)d$ de donde: $95 = 5 + (n-1)3$ Despejando n se tiene $n = 31$ Es decir se asomará desde el piso 31.

   - Si el alumno utiliza la fórmula general de las progresiones aritméticas para resolver el problema pero no logra despejar n, se puntuará con 0,5 puntos.
   - Si el alumno calcula de forma sucesiva términos de la sucesión pero no logra llegar hasta el término 31, y por tanto no logra resolver el problema se puntuará con 0,25 puntos.
   - Si el alumno se equivoca con fallos propios de un despiste se penalizará con 0,25 puntos.
   - Si el alumno logra resolver el problema pero tiene errores numéricos relacionados con la jerarquía de operaciones se penalizará con 1 punto.
   - Si el alumno obtiene una solución incongruente, por ejemplo que el número de pisos es extremadamente elevado, una cantidad negativa o decimal, la actividad no puntuará.

   c) (0,5 puntos) La altura total del edificio si tiene 45 pisos.
   Solución:
   En este caso se pide calcular el término 45 de la sucesión ya que esa será la altura del último piso.
   $a_{45} = a_1 + (45-1)d = 5 + 44 \cdot 3 = 137$. Por lo tanto la altura total del edificio será de 137 metros.

   - Si el alumno entiende que la solución al problema es la suma de los 45 primeros términos de la sucesión (la solución evidentemente será incongruente por salir una cantidad extremadamente elevada) el ejercicio no se puntuará.
   - Si el alumno calcula de forma sucesiva términos de la sucesión pero no logra llegar hasta el término 45, y por tanto no logra resolver el problema se puntuará con 0,25 puntos.

- Si el alumno se equivoca con fallos propios de un despiste se penalizará con 0,25 puntos.
- Si el alumno logra resolver el problema pero tiene errores numéricos relacionados con la jerarquía de operaciones se penalizará con 1 punto.

NOTAS

- Se deben incluir todas las operaciones que sean necesarias para la resolución de cada actividad, de lo contrario no se puntuará dicha actividad.
- No se puede usar lápiz ni tippex, ni bolígrafos de distintos colores. En caso contrario la puntuación del examen será de 0 puntos.
- Se permite el uso de calculadora no programable.
- No se permite el uso de dispositivos móviles ni con transmisión de datos a modo de calculadora.