Las diferencias más notables entre una metodología y otra (I)

3

1. EL ORDEN DE ABORDAJE

Queremos señalar con este apartado que en los algoritmos tradicionales una de sus señas de identidad es, precisamente, el aprendizaje de un conjunto de instrucciones que se tienen que aplicar ciegamente. La primera de todas es, precisamente, saber por dónde se tiene que comenzar. Es lo primero con lo que se enfrenta el alumno.

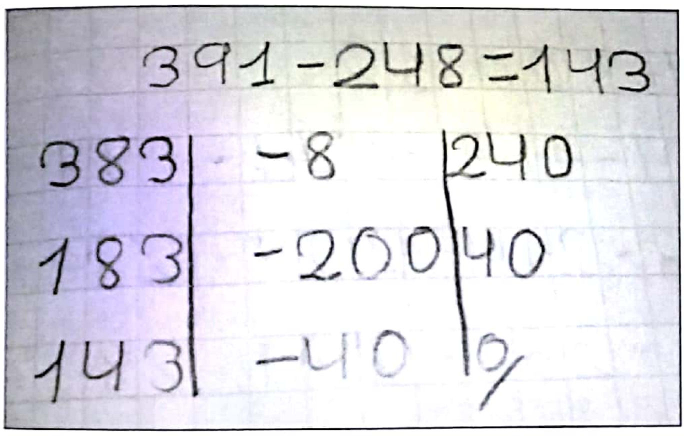


Foto 3.1

En efecto: el orden en el abordaje de las diferentes operaciones es clave: se debe comenzar siempre por la derecha en el caso de las sumas, resta y multiplicación, y por la izquierda en la división. En los algoritmos ABN tal aspecto pierde por completo relevancia.

La foto 3.1 recoge una sustracción en la que el alumno ha elegido detraer primero las unidades, luego las centenas y finalmente las decenas. Podría, perfectamente, haber alterado el orden. Para el cálculo ABN, al no estar basado en la descomposición y combinación de los órdenes de magnitud, el seguir un orden estricto en el abordaje de los cálculos pierde sentido. El orden viene derivado de la descomposición en números menores que hagan los alumnos, y esta descomposición va a depender de la estrategia que el sujeto se haya marcado para resolver la operación. Finalmente, esta estrategia va a depender directamente del grado de competencia en el cálculo que hayan alcanzado los alumnos.

2. CÁLCULOS DESDOBLADOS

La esencia del cálculo tradicional consiste en que se han de descomponer los números con los que se opere en sus diversos órdenes de magnitud, para a continuación comenzar a realizar el cálculo del emparejamiento que se haya producido. Ese cálculo se hace de una vez para cada emparejamiento, y la fragmentación de las cantidades garantiza que no haya ninguna combinación distinta a la que se ha memorizado gracias al aprendizaje de las tablas. Así, el sujeto suma, resta, multiplica o divide en un solo intento las unidades, decenas, etc. Si el cálculo es complicado o tiene algún problema en recordar algún resultado de la tabla, la cuenta saldrá mal, porque no hay plan alternativo.

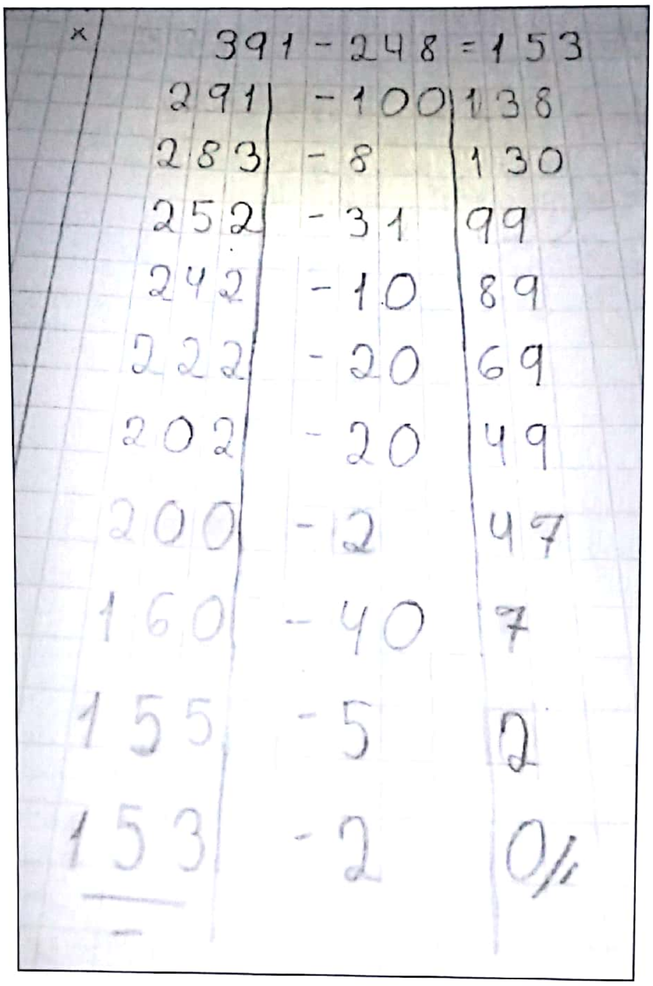


Foto 3.2

Por el contrario, en ABN se pueden desdoblar los órdenes de magnitud cuantas veces sean precisas. En la foto 3.2, que corresponde a una sustracción comparativa, la segunda centena del minuendo se desdobla en bastantes números. En la suma que ofrecemos (foto 3.3), que corresponde a un alumno de 3.º, este ha desdoblado las ocho centenas en cinco y tres. Lo ha hecho para mejor ajustar los cálculos. En la foto 3.3, el alumno desdobla para asegurar mejor el cálculo, y porque así redondea al millar más próximo.

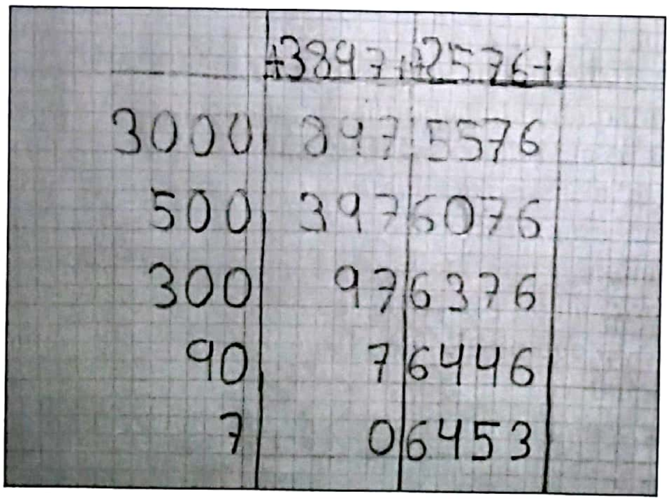


Foto 3.3

3. CÁLCULOS CON INTEGRACIÓN

Llamamos aquí integración cuando, para operar, se juntan diversos órdenes de magnitud en un solo cálculo, bien de manera completa o de manera parcial. Es la situación contraria a la que se acaba de explicar. En el cálculo tradicional es imposible calcular a la vez más de un orden de magnitud. Sí lo es en el formato ABN. Vayamos con ejemplos.

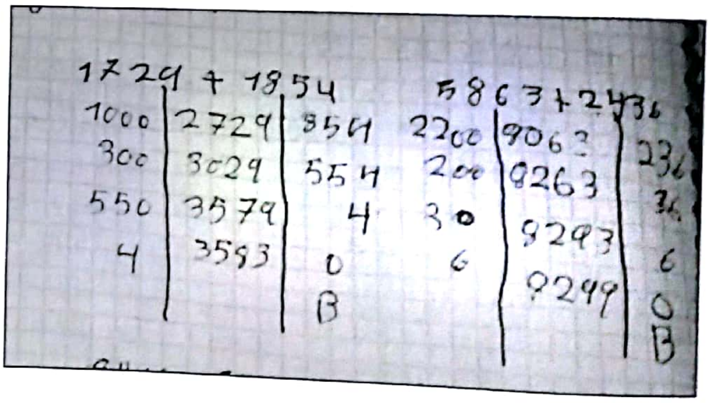


Foto 3.4

En la operación 1.729+1.854 (foto 3.4), el alumno ha integrado (tercera fila) las decenas del segundo sumando con las centenas que le quedaron del cálculo anterior. Lo hace así por conveniencia de sus cálculos, y no lo hizo en la fila anterior porque ahí busco redondear hasta 3.000. En la operación situada arriba, integra en los millares del segundo sumando (primera fila de la operación) parte de las centenas de este. Es decir, que se maneja el desdoble del mismo orden de magnitud y la integración de estas a la vez, en función de la estrategia que se haya marcado el sujeto. Esto otorga un elevado nivel de flexibilidad, imposible de llevar a cabo con la metodología antigua.

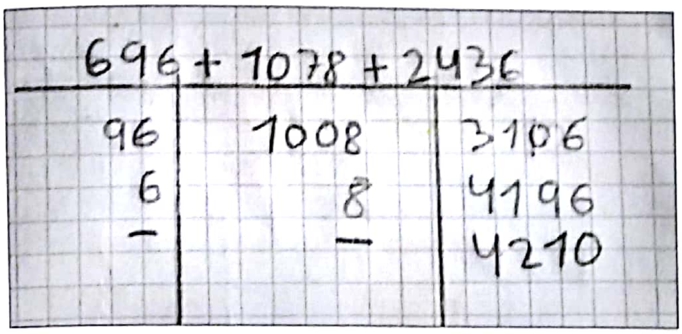


Foto 3.5

En la foto 3.5 se observa la ejecutoria de un alumno muy competente que resuelve la operación en muy pocos pasos. Ello es gracias a que calcula a la vez con varios órdenes de magnitud. En la primera fila ha integrado seis centenas del primer sumando con siete decenas del segundo sumando. En la segunda fila ha reunido el millar del segundo sumando con las nueve decenas del primero. Finalmente, suma las unidades.

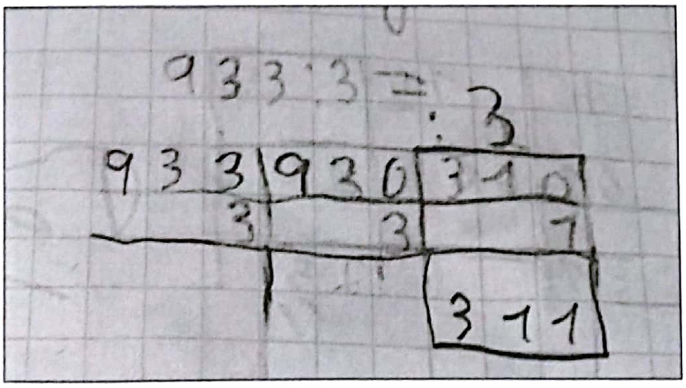


Foto 3.6

Esta característica no la tiene solo la operación de sumar, sino que concierne a todas. En el caso de la división (la foto 3.6 pertenece a un alumno de 2.º de Primaria), el sujeto ha efectuado de una vez el cálculo correspondiente a centenas y decenas. Se podrá argüir que en la división tradicional ocurre igual cuando la correspondiente unidad del dividendo es menor que la del divisor: claro, pero lo que se muestra aquí es la integración de dos órdenes de magnitud distintas cuando no hacía falta, puesto que la cifra de las centenas del dividendo es mayor que la del divisor.

4. SE ACABARON LAS LLEVADAS

Llevadas, acarreos, préstamos... Son artilugios para poder resolver algoritmos muy sintéticos como lo son los tradicionales. Son recursos para poder hacer con grafías lo que antes se hacían con ábacos y con cuentas o piedras ***(calculus)***. Son trucos o artificios inventados para salvar las dificultades de un formato, pero que no tienen su reflejo en la realidad. No se llevan nada a ninguna parte. Cuando, en el caso de la resta tradicional se produce una «llevada», lo que se da en la realidad es un añadido. Se suman diez a cada uno de los términos, lo que ocurre es que en el caso del minuendo se hace en la cifra de las unidades (diez) y en la del sustraendo en la de las decenas (uno). Se les llama llevadas, cuando en realidad son «traídas». En el cálculo ABN no hay artilugios ni formatos artificiales, sino que se manejan los números de la misma manera que las cantidades. Por ello esta cuestión desaparece.

Repasemos las dos operaciones de la foto 3.7 de la siguiente página. Corresponden al 2.º curso de Primaria. Ambas contienen «llevadas difíciles». En la suma y en la resta aparecen en la cifra de las unidades y en la de las decenas. En la adición de 129 + 274 el alumno ha ido añadiendo orden a orden de magnitud. ¿Dónde queda el problema? ¿Y la segunda llevada?

En la sustracción, con llevadas consecutivas en unidades y decenas, el alumno va detrayendo conforme le viene bien, y orilla las dificultades descomponiendo el sustraendo en números menores

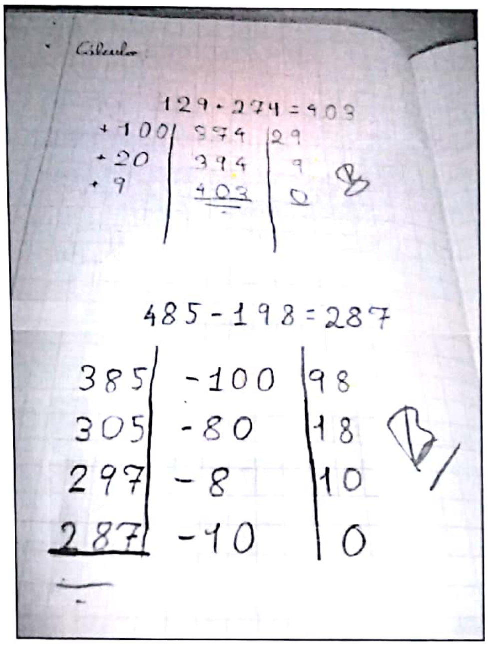


Foto 3.7

cuando así resuelve mejor el cálculo: primero quita cien, luego ochenta, luego ocho y, por último, las diez restantes. Ni presta, ni acarrea, ni trae ni lleva.

¿Habrá algo más absurdo e ilógico que la llevada en la sustracción? Supongamos que le preguntamos a un alumno de 14 años cuántos años le faltan para cumplir 21. Él dirá: de 4 a 11 van siete, y me llevo una. Ante esto, la lógica dicta dos consideraciones. Si de cuatro a once van siete y se lleva una, entonces quedan seis, y no siete. ¿Cómo se va a llevar una si quedan las mismas que había antes de llevárselas? Y la última: ¿qué estupidez es esa de llevarse qué? Si el niño tiene catorce años, cuando pasen siete tendrá veintiuno y nada se llevará ni traerá. Bueno, sí. Los años los traerá el tiempo.

5. EL REDONDEO Y LA COMPENSACIÓN COMO ESTRATEGIAS HABITUALES

Conviene hacer una distinción entre redondeo y compensación, porque a veces se pueden entender como una misma cosa.

Hablamos de redondeo cuando, previamente a realizar los cálculos, los alumnos realizan ajustes en los términos de la operación con el fin de poder realizarla de una forma rápida y sencilla. Por ejemplo, en la suma 199 + 256, un alumno competente añade 1 (del 256) a 199 para obtener 200. A partir de ahí la operación se resuelve con gran rapidez y exactitud: 200 + 255 = 455. Por supuesto hay más tipos de redondeo, pero aquí lo aplicamos en este sentido.

Nos referimos a compensación cuando el sujeto que realiza el cálculo, ya iniciada la operación, opera con un número distinto o no presente, pero que es más sencillo. Una vez hecho, compensa añadiendo o quitando el exceso o defecto de la compensación. Para entenderlo mejor veremos tres ejemplos.

En el caso de 391 – 248 (foto 3.8), el sujeto llega en el segundo cálculo a que en el sustraendo solo le queden 8 unidades. Prefiere no complicarse la vida y detraer 10, que es muy sencillo. Una vez hecho esto, y como ha quitado dos de más, en el siguiente cálculo lo compensa añadiendo 2. Nótese que se explica muy bien con los signos que va colocando el niño.

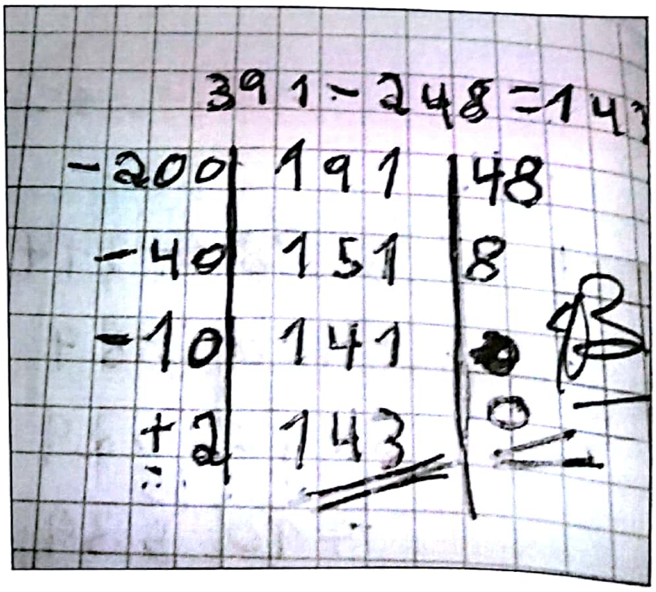


Foto 3.8

En la suma 178 + 206 (foto 3.9) se ha seguido la misma técnica. Se ha buscado conscientemente la estrategia de dar los menores pasos posibles en la resolución de la operación. El alumno ha comenzado sumando 200, y después, en lugar de sumar 6 lo hace con 10. Naturalmente, como se pasa en 4 porque en la siguiente fila lo compensa.

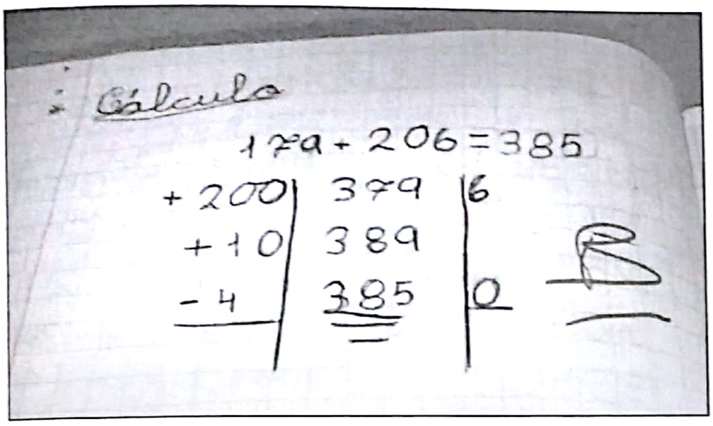


Foto 3.9

Mención especial merece la operación recogida en la foto 3.10. La autora es una niña de siete años. Respondía a un problema en escalera descendente: un ascensor de una torre gigantesca bajaba desde el piso 364 hasta el 138, y se preguntaba por el número de pisos que había que bajar. La niña hizo bajar 230 pisos, y luego ascendió 4. Lo que es más notable es la madurez que demuestra en el uso de los signos: suma los negativos y resta el positivo, pese a que la interpretación literal de los mismos le empujaría a hacer lo contrario.

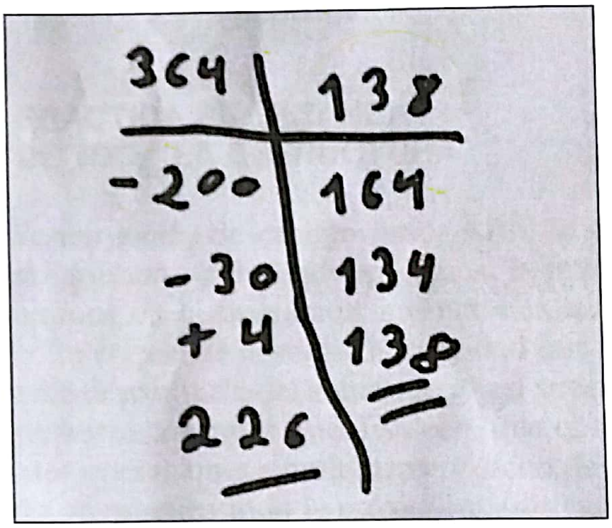


Foto 3.10

Las diferencias más notables entre una metodología y otra (II) 4

1. LA RECURSIVIDAD O REVERSIBILIDAD

Se llama recursividad a la posibilidad que tienen los algoritmos ABN de que los diversos cálculos se lleven a cabo en una u otra dirección, en función de la estrategia.

+	788	1.462
600	188	2.062
12	200	2.050
200	0	2.250

La tabla de arriba muestra la suma 788 + 1.462. El alumno comienza a añadir el sumando más pequeño en el mayor. Añade 600 para redondear al millar. Y entonces se da cuenta de que si añade 12 al sumando menor obtiene 50, con lo que redondea a 200. Es evidente que convirtiendo el sumando en 200 la suma está prácticamente resuelta. Es lo que hace en la última fila. Le hemos llamado a esto reversibilidad o recursividad porque se cambia el sentido del cálculo para realizar otro más ventajoso que el que tendría que hacer si hubiese seguido la misma dirección. En realidad, la recursividad es la búsqueda de un redondeo sobrevenido para acortar la resolución o llegar antes al resultado.

2. PRÁCTICA SIMULTÁNEA DE TODA LA ESTRUCTURA

La resolución de los algoritmos ABN de suma y resta conlleva, por su propia lógica, la práctica simultánea de la operación inversa a la que se trate. En el caso de la suma, la cantidad que añada debe descontarla del sumando, y así sucesivamente hasta consumir este. Es decir, que se realizan dos operaciones simultáneas o, dicho de otro modo, se practica toda la estructura aditiva y no solo uno de sus casos.

Hay cuatro modelos de sustracción, pero que utilizan tres formatos y, por tanto, tres modos diferentes de obrar. En el formato de ***comparación-detracción*** (CD), por su propia mecánica, no requiere del empleo simultáneo de ambos procesos. Pero en los formatos de ***escalera ascendente*** (EA) y ***escalera descendente*** (ED) se practica la suma de una forma natural. En EA prácticamente la sustracción se convierte en una suma, tanto para alcanzar los resultados parciales como el resultado final. En ED se ha de emplear la suma para hallar el resultado final.

En definitiva, la sustracción abre el abanico total de posibilidades. El formato EA practica intensivamente la suma. El formato ED tan solo de manera parcial. Finalmente, el formato CD no necesita usar ese recurso.

En el caso de la multiplicación, tampoco se requiere el empleo simultáneo de la división, aunque sí de la suma o adición. Finalmente, la división si va a requerir el uso continuo tanto de la multiplicación o producto como de la sustracción.

3. GENERALIZACIÓN DE LA TABLA A TODOS LOS ÓRDENES DE MAGNITUD

Es uno de los principios del método, y la condición inexcusable para poder resolver los algoritmos. ¿Qué queremos decir exactamente? Que lo que el alumno sepa hacer con las unidades simples también debe hacerlo con las de orden superior. E incluso algo más: extender las tablas de multiplicar de manera tal que algunos productos y cocientes por dos cifras se resuelvan como si solo tuvieran una.

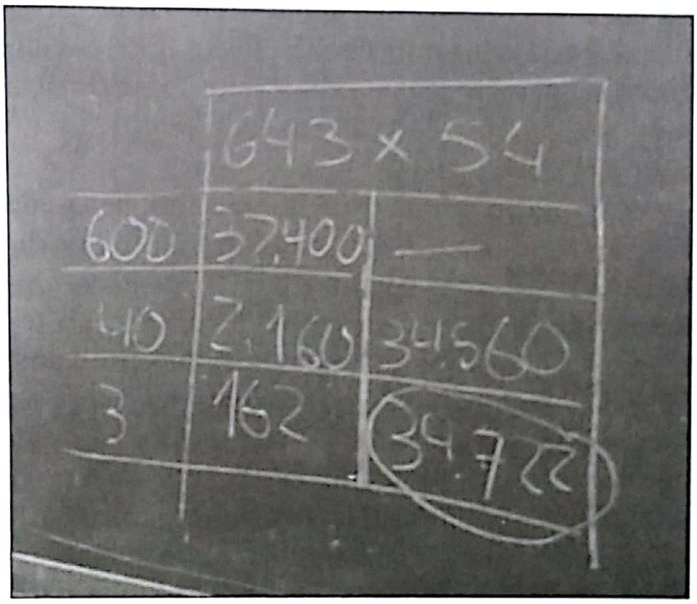


Foto 4.1

Si el alumno sabe sumar 3 + 4, entonces aprende a hacerlo con decenas (30 + 40), centenas (300 + 400), millares, etc. Ocurre exactamente igual en la sustracción, multiplicación y división. En la foto 4.1 se puede observar con claridad. Multiplica 600 por 50 (30.000), luego por 4 (2.400) y suma ambos resultados. Lo mismo hace con el 40 y con el 3. La acumulación de resultados, tanto en cada orden de magnitud como en la acumulación de los anteriores, requiere una actuación similar en la suma, como se puede ver.

	× 11	
300	3.300	
20	220	3.520
4	44	3.566

Evidentemente, los niños no empiezan a multiplicar por dos cifras a partir de ejemplos como el anterior. Cuando los alumnos van a abordar el producto y el cociente empleando bidígitos, comenzamos porque lo hagan por números que puedan seguir utilizando como de una sola cifra. Por ejemplo, empiezan la multiplicación por dos cifras por 11, y lo mismo ocurre con la división. En la tabla en la que representamos el producto de 324 × 11 mostramos lo que se quiere decir. Actuamos igual cuando se trata de productos por decenas completas (20, 40, etc.) o divisiones en las que el divisor sea de estas mismas características.

4. CAPACIDAD DE FORMALIZACIÓN DE LAS EXPERIENCIAS DE CÁLCULO INFANTILES

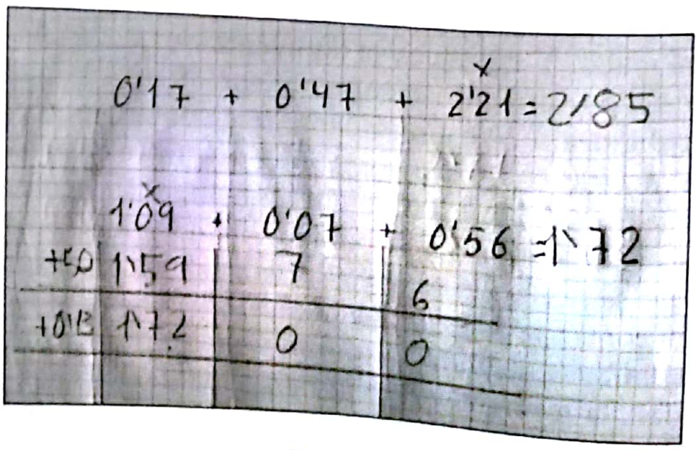


Foto 4.2

En las fotos 4.2 y 4.3 se observan dos operaciones, resueltas por un alumno (la primera) y una alumna (la segunda) de 2.° curso. No trabajan con décimas ni centésimas, sino con euros y monedas de diez céntimos y de céntimo de euro. Han incorporado su experiencia en el manejo de pequeñas cantidades de dinero a la estructura de los cálculos, y lo han hecho con toda naturalidad y con muy escasa instrucción. Ambas operaciones las resolvieron mentalmente, pero se les pidió que las realizaran en papel. Nótese, en el primer caso, que señala con una cruz el sumando en el que va a «cargar» los otros dos.

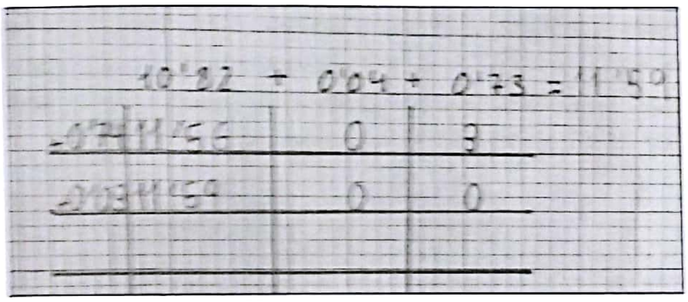


Foto 4.3

La segunda operación tiene una notación muy curiosa. Los residuos los escribe como si fueran números naturales, mientras que la cantidad a añadir que escribe en la columna de la izquierda sí que lo hace en notación decimal.

¿Cómo se llevó a cabo la introducción de este tipo de sumas? De manera somera les explicamos a los niños cómo se escribían las cantidades de dinero que incluían céntimos. Sin más, les propusimos que hicieran sumas y restas con ellos. Una vez entendido lo que tenían que hacer, lo llevaron a cabo con toda naturalidad, y extendieron a este dominio lo que ya sabían realizar con números naturales.

5. ¡AHORA SÍ SE PUEDE HACER CÁLCULO MENTAL!

Todas las operaciones ABN exigen un alto rendimiento en cálculo mental. A su vez, el formato de las operaciones facilita y refuerza esta destreza. Para las personas que conocen por primera vez el método de cálculo ABN, posiblemente sea este el ámbito en el que más se sorprenden y en el que con más intensidad se asombran. El asombro y la duda vienen de que no piensan que los cálculos se puedan efectuar de otra forma. Cuando nos expresan su extrañeza, les solemos comentar que sí, que parece imposible, pero porque ellos piensan que ese cálculo lo hacen a la manera tradicional. Si siguen la metodología ABN, no hay tal milagro.

En el capítulo anterior explicamos por qué es tan malo el cálculo mental en los alumnos del método tradicional y tan bueno en los alumnos que practican algoritmos ABN, por lo que no nos vamos a repetir.

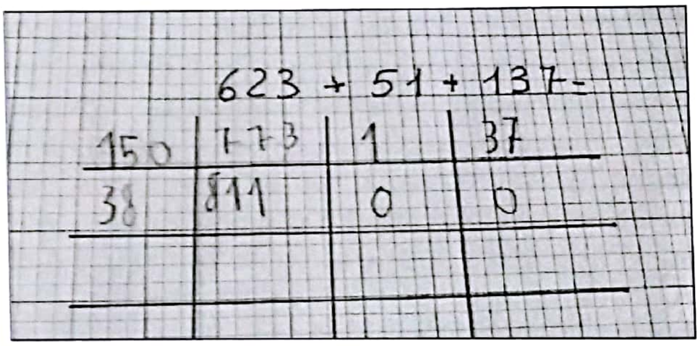


Foto 4.4

Todos los grupos que trabajan el método ABN mejoran mucho todo el cálculo, pero especialmente los cursos que desde el primer momento aplicaron el nuevo método. Más de la mitad de los alumnos de cada clase es capaz (repetimos, en 2.° de Primaria) de efectuar las sumas y las restas de centenas con reestructuración de unidad mentalmente. En la operación que mostramos en la foto 4.4, correspondiente a un alumno de 2.°, se puede constatar lo señalado: no solo es capaz de sumar 150 a 623, sino que después suma, de una vez, 38 a 773. Nótese que son sumandos que implican reestructuración de unidades y de decenas, que, como se dice en el lenguaje tradicional, lleva todas las llevadas posibles.

6. CÁLCULOS A LA MEDIDA DE CADA ALUMNO Y DE CADA ALUMNA

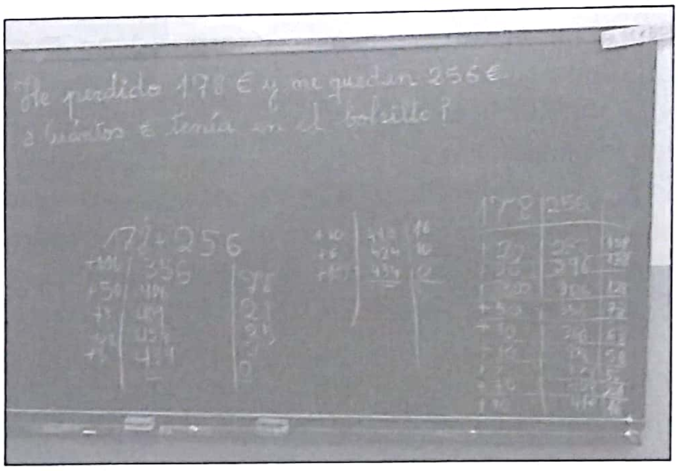


Foto 4.5

La foto 4.5 muestra la resolución de un problema por dos alumnos diferentes. Una niña muy capaz y un niño con menos recursos. En el primer caso, el cálculo se efectúa en cinco pasos. En el segundo, el niño requiere de doce pasos. Hay que subrayar este extremo. En el cálculo tradicional solo cabe hacer la operación bien o mal. En el ABN hay muchas maneras de hacerlas bien, con la particularidad de que muchos de los alumnos que realizarían mal el cálculo tradicional, aquí lo hacen bien, si bien dando más pasos o empleando cálculos menos sofisticados.

Las posibilidades del cálculo abierto traducen a la realidad una de las más viejas y difíciles aspiraciones de la didáctica: que cada alumno pueda hacer la misma tarea, pero cada uno de acuerdo con sus posibilidades, con su ritmo, con sus propias capacidades. Si las operaciones se pueden resolver de una única manera, tal aspiración es completamente imposible. En la foto 4.6 se refleja cómo ha hecho un niño la sustracción 948 – 176. Tiene una buena capacidad de cálculo y realiza la operación en un paso menos del que se precisaría por el modo tradicional. ¿Y los demás niños y niñas? Hicimos el experimento con un grupo de alumnos de 2.º y controlamos cómo hacía cada uno la sustracción indicada (948 – 176). Estos son los resultados que se obtuvieron:

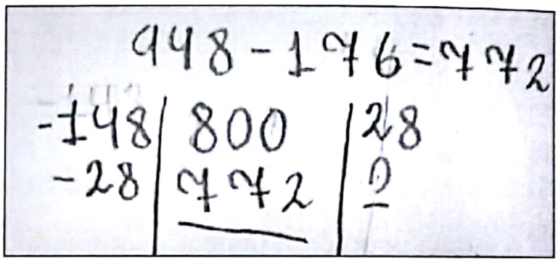


Foto 4.6

948 – 176 = 772					
		Contenido de los pasos			
Identificación	**N.º de pasos**	**Paso 1**	**Paso 2**	**Paso 3**	**Paso 4**
1	4	100	6	40	30
2	3	140	6	30	
3	3	106	50	20	
4	3	100	70	6	
5	3	100	50	26	
6	3	100	46	30	
7	3	100	40	36	
8	3	40	6	130	
9	2	148	28		
10	2	146	30		
11	2	106	70		

La tabla no es difícil de describir. El sujeto 1 realizó la operación en 4 pasos. Primero retiró de ambas cantidades 100, después 6, luego 40 y finalmente 30. El sujeto 2 la hace en tres pasos, y comienza retirando 140, luego 6 y después 30. Etc. Se puede comprobar la riqueza y variedad de estrategias y cálculos, donde cada uno las va haciendo conforme a sus propios intereses y atendiendo a la evolución de la operación.

¿Cuánto puede dar de sí una operación? Miren las fotos 4.7 a 4.16. Dividen 76 entre 3.

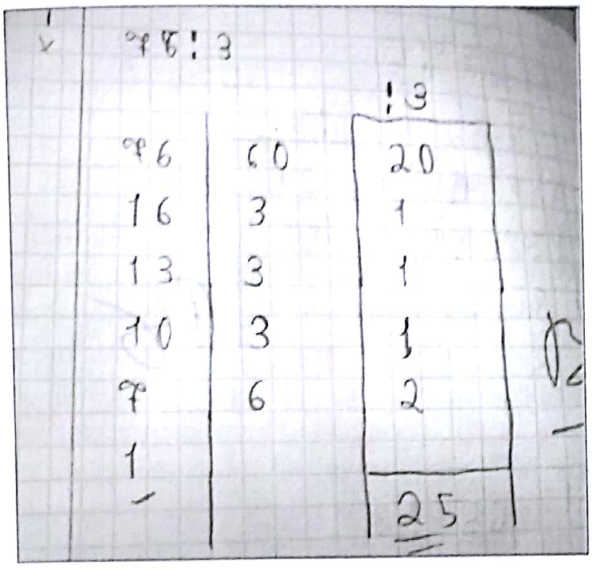


Foto 4.7

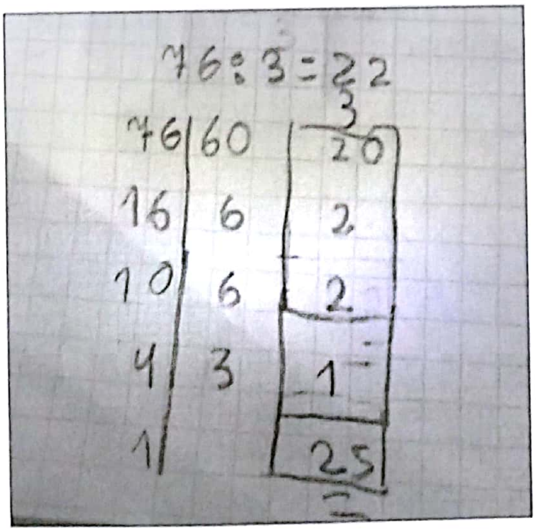


Foto 4.8

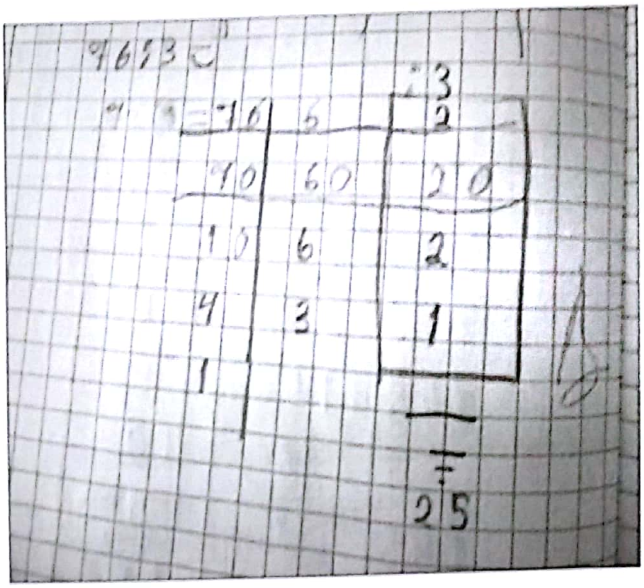


Foto 4.9

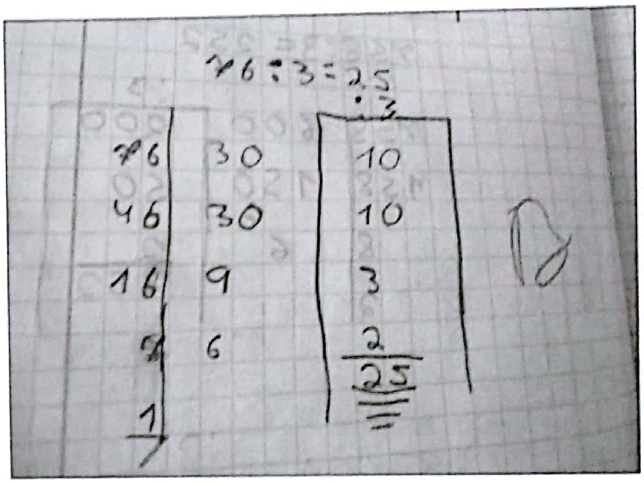


Foto 4.10

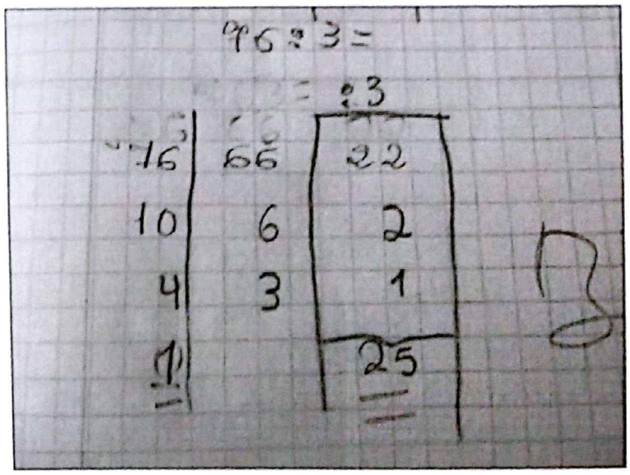


Foto 4.11

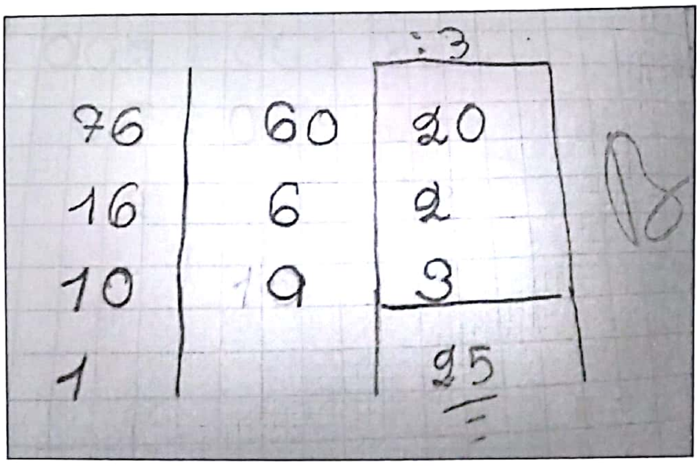


Foto 4.12

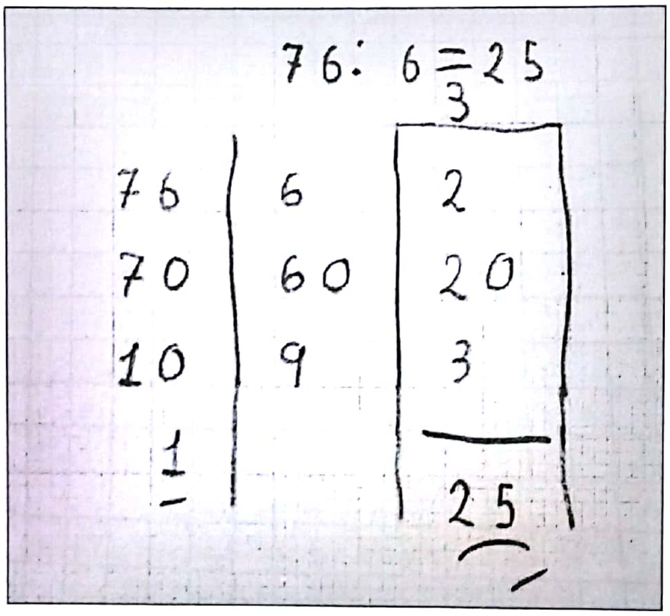


Foto 4.13

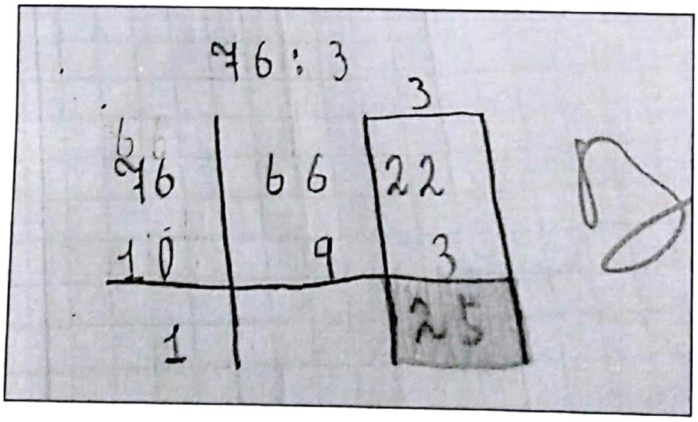


Foto 4.14

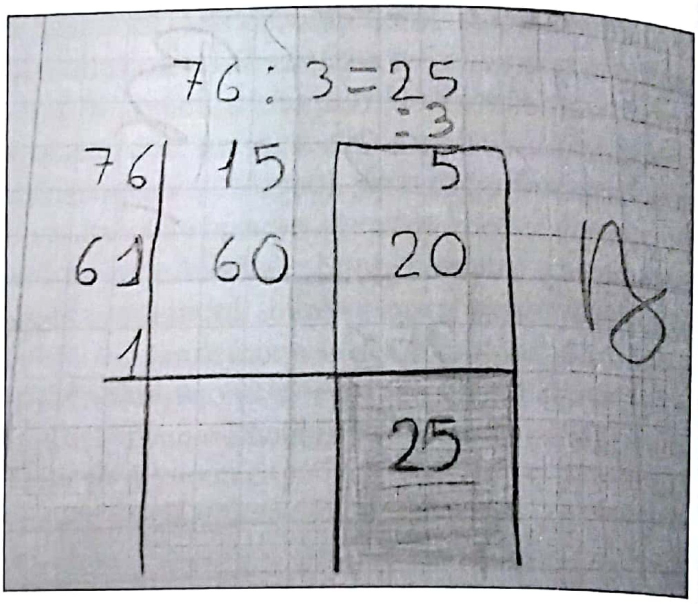


Foto 4.15

Todas ellas son divisiones efectuadas por alumnos de siete u ocho años. No es que nos parezca bien que el niño o la niña realice muchos más cálculos de los precisos. Pero en los momentos iniciales deben tener la libertad de hacerlo. Ello les ayuda a conceptualizar, a entender lo que hacen. Más adelante tendrán técnicas para que la aproximación al dividendo y la realización de los cálculos se hagan con eficacia y economía.

7. TODAS LAS TAREAS DE CÁLCULO REQUIEREN QUE SE EFECTÚEN CÁLCULOS

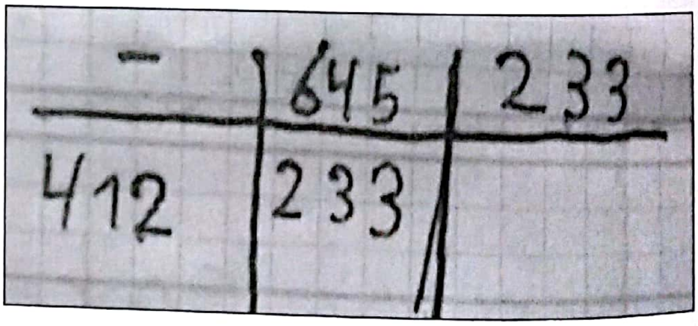
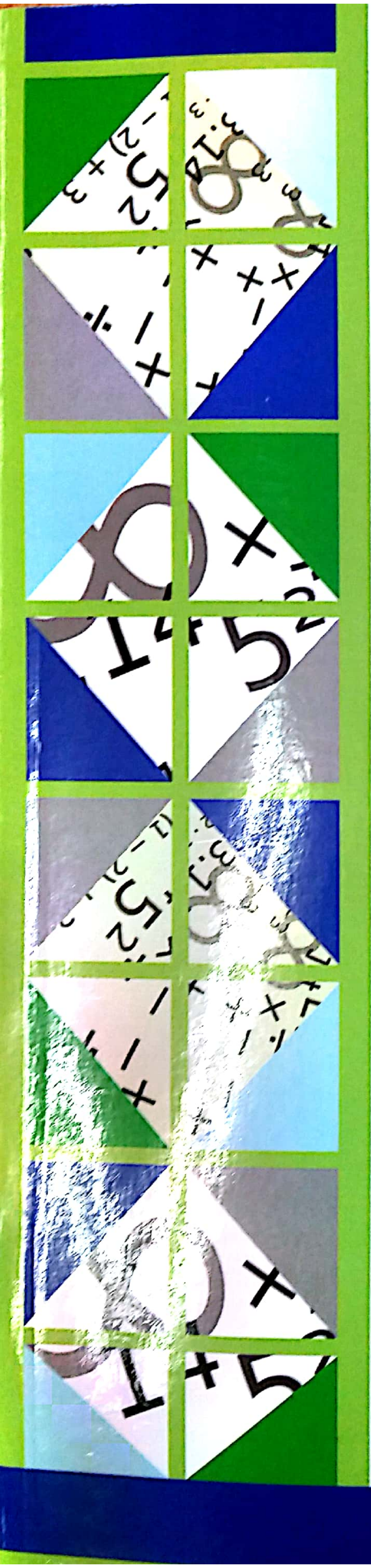


Foto 4.16

Puede sonar a redundante y a absurdo el título de este apartado. Pero es lo cierto que la realización de tareas de cálculo con el modelo tradicional no promueve la habilidad de calcular... porque no se calcula. *En ningún momento.* Cuando un niño resuelve una multiplicación tradicional solo aplica instrucciones previamente memorizadas, y recupera de su memoria a largo plazo las combinaciones básicas o tablas que previamente ha interiorizado. Así, en 278 × 3 dice: cojo el ocho y lo emparejo con el tres; ahora busco en mi memoria el resultado de multiplicarlos; de los 24 que me da escribo el 4 en línea con el 8, y me guardo en la memoria el 2; cojo el 7 y lo multiplico por 3; busco el resultado... etc. Aquí no se calcula nada. Las operaciones se harán mejor o peor en función de la buena memoria del sujeto o de la fidelidad que tenga en la aplicación de las instrucciones. Pero, se insiste: no se calcula.

Con ABN sí: la realización de los algoritmos está basada en el cálculo personal, y ello explica la enorme variedad de modos y procedimientos que emplean los niños. Esas enormes diferencias entre unos y otros se erigen en la prueba definitiva: no pueden haber sido memorizadas previamente.

PEDAGOGÍA
Y DIDÁCTICA



Enriquecimiento de los aprendizajes matemáticos en Infantil y Primaria con el Método ABN

Jaime Martínez Montero
Concepción Sánchez Cortés

PIRÁMIDE