EL MÉTODO DE CÁLCULO ABIERTO BASADO EN NÚMEROS (ABN) COMO ALTERNATIVA DE FUTURO RESPECTO A LOS MÉTODOS TRADICIONALES CERRADOS BASADOS EN CIFRAS (CBC)

The method of open calculation based on numbers (ABN) as a future alternative with respect to the closed traditional methods based on figures (CBC)

JAIME MARTÍNEZ MONTERO
Inspector de Educación

INTRODUCCIÓN. Se hace un recorrido por las dificultades que siempre ha planteado el cálculo tradicional y las alternativas que se han puesto en marcha, así como el origen del cálculo ABN. MÉTODO. La investigación se ha llevado a cabo dentro del enfoque de la matemática realista, siguiendo fundamentalmente una metodología cualitativa. RESULTADOS. Los resultados obtenidos han confirmado que los alumnos que emplean el método de cálculo ABN alcanzan mejor rendimiento en cálculo mental, operaciones y resolución de problemas que los que siguen el método tradicional o CBC. DISCUSIÓN. Las limitaciones en los contenidos de la evaluación, los tiempos empleados por los disintos alumnos en la realización de la misma, así como la diferente extracción social de los alumnos, hacen suponer que las distancias alcanzadas en cuanto a las competencias matemáticas de uno y otro grupo podrían ser mayores.

Palabras clave: *Adición, Cálculo, Destrezas básicas, División, Multiplicación, Operaciones numéricas, Problemas verbales, Sustracción.*

Introducción

Hace cuarenta años Ablewhite (Ablewhite, 1971) advertía de los muchos problemas que se originaban en el aprendizaje de las operaciones, y cómo los alumnos con dificultades sufrían en mayor medida la irracionalidad del método que se utilizaba. Era impresionante su grito de guerra: «¡Cientos de años contra ellos!». Desde entonces han sido múltiples los autores (Alcalá, 1986; Baroody, 1988; Castro, Rico y Castro, 1987; Chamorro, M. C. (coord.), 2005; Dickson, Brown y Gibson, 1991; Ferrero, 1984; Gómez Alfonso, 1999; Jaulin-Mannoni, 1980; Kamii, 1986; Maza, 1989; Mialaret, 1977; N. C. T. M., 2000; Pereda, 1987; Resnick y Ford, 1990; VV. AA., 2007; Vergnaud, 1991) que han señalado disfunciones y complicaciones

Fecha de recepción: 30-09-10 • Fecha de aceptación: 05-07-11

derivadas del empleo de unos algoritmos muy poco adecuados para los sujetos a los que se destinaban. Han tenido poco éxito, y las cuatro operaciones se siguen enseñando, muy mayoritariamente, como hace decenas de años, sin que por ello haya disminuido la preocupación por los bajos rendimientos que se obtienen (Gil Flores, 2008)

No hemos encontrado antecedentes en la aplicación de los modelos de algoritmos que aquí se propugnan. Tan sólo hay una recomendación, respecto a uno de los modelos de sustracción, recogido en un artículo (Ramírez Martínez y Usón Villalba, 1996). En la actualidad, lo que abunda es la recomendación de un mayor protagonismo del cálculo mental, una adecuada ubicación de la calculadora y un mayor énfasis en las destrezas de estimación, incluyendo los problemas de iniciación al cálculo desde edades muy tempranas (Fernández Escalona, 2007). También se observa una transición o graduación que va desde los cálculos espontáneos de los alumnos a la sistematización de los algoritmos clásicos. Como ejemplo podemos citar el documento «Guidance paper-calculation», de 2008, incluido por el Ministerio de Educación británico en su página web y que sirve de guía a la importante renovación de la metodología matemática que se está llevando a cabo en ese país.

La experiencia que estamos desarrollando tiene como precedentes más claros las actuaciones puestas en marcha en Holanda con el fin de renovar la enseñanza-aprendizaje del cálculo. En concreto nos referimos a:

- El «Proeve» (Treffers, A., de Moor, E., y Feijs, E., 1989) o «Diseño de un programa nacional para la educación matemática en escuelas primarias». Pese a que el título habla de un «programa nacional», no hay tal cosa, sino unas propuestas de actuación dirigidas a todo el país. Las diversas publicaciones que componen el «Proeve» recogen descripciones de los diversos dominios dentro de las matemáticas. Este trabajo no tiene como fin ni está pensado para su utilización directa por parte de los docentes, sino como un apoyo para los autores de libros de texto, formadores de maestros, asesores e inspectores, pese a su estilo fácil y a la abundancia de dibujos y ejemplos. Siguen apareciendo publicaciones dentro de este marco y están recogidos casi todos los contenidos propios de la materia: destrezas numéricas básicas, algoritmos escritos, razones y porcentajes, fracciones y números decimales, medición y geometría.
- Los «Bosquejos de trayectorias longitudinales de enseñanza-aprendizaje», puestos en marcha en 1997 y sobre los que se sigue trabajando. Los «Bosquejos» recogen los pasos que se tienen que recorrer para que los estudiantes alcancen los objetivos establecidos para su proceso de enseñanza y facilita a los profesores un bosquejo narrativo de cómo puede realizarse el proceso de aprendizaje, incluyendo materiales de trabajo, ejemplos, grabaciones, vídeos, etc.

También nos movemos en la órbita de los modelos constructivistas, con origen, siquiera sea remoto, en el psicólogo ginebrino Jean Piaget, que representa y difunde su discípula C. K. Kamii (Kamii y Dominick, 1998). Respecto a los fallos y dificultades de los algoritmos tradicionales de cálculo, se han tenido en cuenta las aportaciones de Ashlock (Ashlock, 2010).

En lo que se refiere al director de la presente investigación, hace más de una década (Martínez Montero, 2000) que aparece su primera propuesta sobre la alternativa al formato de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división. Más recientemente, un segundo libro se ocupa de explicar pormenorizadamente el nuevo sistema de cálculo (ibíd., 2008). Finalmente, un último libro incorpora el nuevo método a la enseñanza correctiva de las Matemáticas (ibíd., 2010), en el que ya se explicita para su traslado al aula el nuevo modo de calcular: paso del algoritmo antiguo al nuevo, técnicas, secuencia de aprendizaje, aprendizaje de tablas y conexión con problemas.

La actual postura del autor se debe a dos trabajos importantes. Uno, la realización de la tesis doctoral (Martínez Montero, 1995), que permite una aproximación complementaria al aprendizaje de las operaciones, y que apunta muchas de las dificultades que tiene el alumnado a la hora de resolver problemas, y dónde se originan las mismas. El otro, la investigación que concluyó en el artículo, de título bastante esclarecedor, «Los efectos no deseados (y devastadores) de los métodos tradicionales de aprendizaje de la numeración y de los cuatro algoritmos de las operaciones básicas» (Martínez Montero, 2001). En él se muestra claramente cómo el aprendizaje de las operaciones con los modelos de algoritmos utilizados impiden un desarrollo adecuado del cálculo pensado y estimativo.

Objetivos

Como objetivo general nos marcábamos erradicar los viejos formatos de las operaciones básicas y sustituirlos por los formatos abiertos basados en números, como paso para conseguir la renovación total del proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo y los problemas en los cinco primeros cursos de la educación primaria, adoptando la metodología que se deriva de los mismos y utilizando como soporte formal para el aprendizaje de los problemas los modelos basados en las categorías semánticas. Ello implica otros objetivos que se desprendían del mismo:

1. La mejora del cálculo mental y la capacidad de estimación.
2. La mejora significativa de la capacidad de resolución de problemas.
3. Por último, pero no lo último, la creación de una actitud favorable al aprendizaje matemático.

En definitiva, se perseguía conseguir que los alumnos en Primaria, conforme a su edad y a su grado de madurez, alcanzaran competencia matemática.

Metodología y modelos

Muestra

La investigación de la que damos cuenta se ha desarrollado durante el curso 2009-2010 en cuatro colegios públicos de la Bahía de Cádiz, participando en el mismo, además del autor y director, ocho docentes, nueve grupos y un total de 210 alumnos.

Sin embargo, aquí nos ocuparemos exclusivamente de los logros de los dos grupos de 2º de Primaria de los colegios públicos Andalucía y Carlos III, por las razones que se explican más adelante.

Enfoque metodológico general

Nos situamos dentro del enfoque de la EMR (enseñanza matemática realista), que se viene a

			Alumnos					
Centro.	**Ciudad**	**Nº Docentes**	**1º**	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**	**Total**
"Andalucía"	Cádiz	2	24	24	20			68
"Carlos III"	Cádiz	1		25				25
"Reyes CC."	Puerto Real	3		50			25	75
"Reggio"	Puerto Real	2	22			20		42
Total		8	46	99	20	20	25	210

definir como que la matemática en la escuela es una actividad humana, que se tiene que nutrir de la propia experiencia, que debe adaptarse a las características de los alumnos y que debe estar conectada con la vida y con las necesidades reales de los sujetos (Van den Heuvel-Panhuizen, M., 1998). No se trata de preguntar, como decía Freudenthal, cuánta matemática debe aprender un niño, sino más bien cuánta matemática, en la educación primaria, puede contribuir a la dignidad humana del niño. Es Freudenthal, en el antiguo IOWO (predecesor del actual Instituto Freudenthal) allá por los años setenta, el que inicia este enfoque. Su fruto más temprano es el llamado *Proyecto Wiskobas* (De Jong, 1986), que fue un referente en toda Europa. En su formulación actual, la EMR fue determinada por este relevante autor (Freudenthal, 1977; 1979). En esencia, se trata de que las matemáticas tengan contacto con la realidad, estén asociadas a las experiencias de los niños y deban tener un valor social y humano. Las matemáticas no deben ser una asignatura a transmitir, sino una oportunidad guiada que deben tener los alumnos para reinventarlas. Más tarde, es Treffers el que, describiendo las bases teóricas del *Proyecto de Wiskobas* (Treffers, 1987) establece los dos tipos o vías de matematización en la escuela: la horizontal, en la que los estudiantes crean herramientas y aplican sus conocimientos para resolver tareas y problemas, y la vertical, que es el proceso de reorganización de la propia experiencia matemática conforme se aprenden nuevos conceptos y estrategias. Como hemos señalado con anterioridad, también nos movemos en la órbita de los modelos constructivistas, que arrancan hace décadas con las teorías del psicólogo y epistemólogo ginebrino Jean Piaget. Entre sus trabajos más destacados se cuentan los de su discípula C. K. Kamii (Kamii y Dominick, 1998).

Los principios en los que se basa nuestro método parten de las evidencias del enfoque EMR sobre cómo aprende el niño los conceptos matemáticos y cuál es su experiencia matemática. También sobre los hallazgos efectuados por la investigación en didáctica de las matemáticas. Y naturalmente en las buenas prácticas escolares. Son los que siguen:

Principio de igualdad. No existe un «gen» matemático que sea poseído por algunos alumnos y no por otros, y que dicho gen predisponga al aprendizaje. No hay personas «negadas» para la matemática, y ante las cuales cualquier esfuerzo es inútil. Lo que señalan las investigaciones es lo contrario. El ser humano viene, de nacimiento, muy bien dotado para el aprendizaje matemático. Es capaz de desarrollar notables destrezas incluso en ausencia de instrucción. Es cierto que, como en todos los demás campos, hay sujetos que aprenden con más facilidad que otros. Pero con las ayudas necesarias todos los alumnos pueden alcanzar una competencia matemática aceptable.

Principio de la experiencia. La matemática es una materia muy abstracta, y los niños y niñas de la escuela primaria deben abstraer un conjunto de conceptos cuando su pensamiento se encuentra en la fase de las operaciones concretas. Por tanto, no se puede suprimir la experiencia directa del manejo de los objetos o de las acciones que se realizan con ellos por aprendizajes verbales o sustitutivos. Por ello, el niño debe ser constructor activo de su propio aprendizaje. No vale siquiera que lo vea hacer a otro, de la misma manera que no aprende a nadar por el hecho de ver a un compañero o a un profesor nadando estupendamente.

Principio del empleo de números completos. Es un principio irrenunciable y que marca el punto de ruptura con la metodología tradicional. El alumno manipula, opera, calcula y estima con números completos, sin divisiones artificiales que le lleven a trabajar exclusivamente con cifras sueltas. Cuando el tamaño o estructura del número hagan que sea muy compleja su utilización, el sujeto lo divide en números completos más pequeños, pero nunca en unidades sin sentido.

Principio de la transparencia. El principio de la transparencia se puede considerar desde más de un punto de vista. Por un lado, hace referencia a que en el aprendizaje de los contenidos matemáticos no se oculten los pasos y procesos con que se construyen los mismos. Por otro lado, que los materiales y recursos simbólicos que se empleen reflejen de la forma más fiel posible la realidad que toman como referencia. En el primer caso, todos los algoritmos ABN reflejan con absoluta fidelidad los pasos intermedios que se realizan en la construcción del resultado. En el segundo, los materiales utilizados cumplen con este requisito.

Principio de la adaptación al ritmo individual de cada sujeto. Es estéril que todo el alumnado realice las tareas de cálculo de la misma forma y en los mismos tiempos. Por ello, la estructura de los algoritmos ABN es muy flexible, y hace posible la adaptación al ritmo individual de cada uno, permitiendo los desdobles y facilitaciones de cálculos que en los formatos tradicionales son, sencillamente, imposibles.

Principio del autoaprendizaje y del autocontrol. Que se consigue gracias a la peculiar estructura de los nuevos algoritmos. El poder desdoblar o agrupar los diversos cálculos, el manejo simultáneo de la totalidad de la estructura aditiva o multiplicativa de que se trate, el control de todos los pasos intermedios, abre las posibilidades de integrar y acortar los procesos intermedios, así como el que sea el propio sujeto el que verifique la exactitud de lo que hace.

Orientación metodológica general del proyecto de innovación

El proyecto realizado ha exigido fundamentalmente la realización de trabajos de campo, con presencia permanente en el aula, desarrollando el director directamente con los alumnos procesos de enseñanza-aprendizaje y proporcionando a los docentes materiales de desarrollo, orientación en su aplicación y evaluación de resultados, y guía en la planificación de la puesta en marcha de nuevos pasos. Hablamos entonces de una metodología aplicada, activa, descriptiva, de estudios de campo. Por ello, el modelo elegido para adaptarnos a esta situación es el de Investigación-Acción (Corey, 1949; Ebbut, 1983; Elliot y otros, 1986). Su propósito es hacer más eficaz la práctica educativa y el perfeccionamiento del profesor, mediante la participación en programas de trabajo diseñados por un experto, en los que aparecen preestablecidos los propósitos y el desarrollo metodológico que hay que seguir. La mayor parte del trabajo se ha llevado a cabo en las aulas, con diversos tipos de metodologías en función de las actividades desarrolladas. Se han integrado las metodologías cuantitativas y las cualitativas, pero predominando estas últimas en lo que se refiere a las actuaciones ante los niños, en las que no sólo ha habido observación, sino interacción directa con el grupo-clase, con grupos pequeños de alumnos o con alumnos individuales.

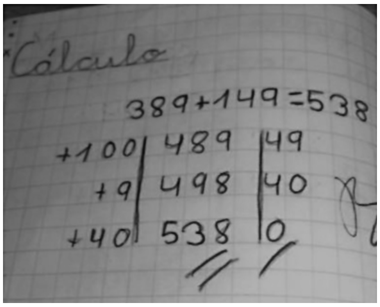
Contenido

Suma o adición

La esencia de la suma o adición es que hay que acumular un sumando en el otro. Una vez que esté totalmente acumulado, el nuevo sumando nos dará el resultado. En el algoritmo tradicional el formato sólo permite que se haga de una manera: descomponiendo los sumandos en unidades, decenas, centenas, etc.; colocándolos adecuadamente y, a partir de ahí, realizando una combinación unidad a unidad y siguiendo el orden de menor a mayor (sin excepciones y sin posibilidad de saltar esta regla).

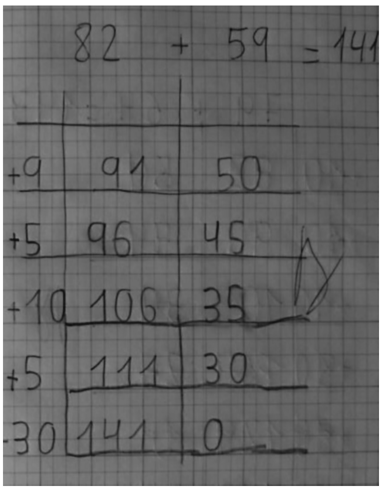
¿Cómo ha realizado una niña de Segundo la suma de 389 más 149 (figura 1)? En primer lugar, no ha respetado el orden de acometida. Primero se ocupa con las centenas, luego con las unidades, para terminar finalmente con las decenas. Podría haber cambiado el orden, o haber desglosado un cálculo en dos.

Figura 1



La figura 2 corresponde a una alumna de Primero que se inicia en la operación. Tantea prudentemente y sólo da el paso cuando lo ve muy claro. Se puede pensar que no es deseable dar tantos rodeos para realizar los cálculos. Pero a ello se le puede contraponer un argumento muy poderoso: lo que no se puede es exigir los mismos niveles de dificultad a todos los niños y niñas, sean cuales sean las cualidades de los alumnos para realizarlos (memoria a corto plazo, velocidad de procesamiento, capacidad de recuperación de la información).

Figura 2



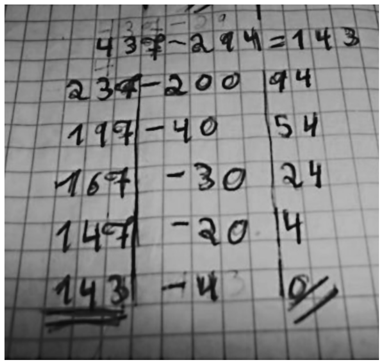
Resta o sustracción

En la resta o sustracción se emplean tres modelos básicos diferentes, que se adaptan a los diversos tipos de problemas. El primero de ellos sirve para los problemas de detracción y de comparación. Son los que siguen (Martínez Montero, 2008):

Formato por detracción y comparación

La operación de la figura 3 ejemplifica la sustracción 437-294, y fue realizada por una alumna de 2º curso de Primaria. Su fundamento es muy sencillo: va quitando de ambos términos la misma cantidad, hasta que desaparece la más pequeña. Lo que queda de la mayor es el resultado.

Figura 3



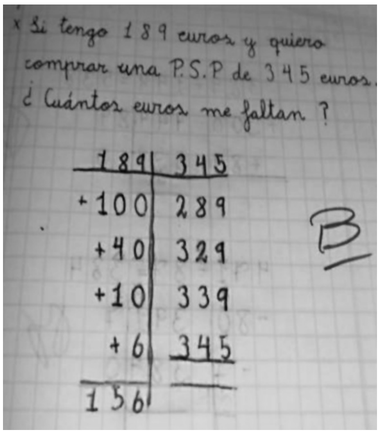
En el caso de los problemas de detracción (p.e., CA2: «Tenía 12 € y me he gastado 4. ¿Cuántos me quedan»?), la primera columna expresa la cantidad inicial, la segunda la cantidad que se va gastando, y la tercera lo que queda por gastar. En otros colegios las cantidades parciales que se detraen no se colocan en el centro, sino a la izquierda o la derecha del todo. Tal aspecto es irrelevante. En el caso de los problemas de comparación las columnas son, siguiendo el orden de la figura, la cantidad comparada, la que se retira y la que sirve de referente.

Formato en escalera ascendente

Es el proceso de sustracción más natural y el que más tienden a emplear los niños. Es el sistema que se emplea en las «vueltas» de las tiendas, y sigue la progresión de abajo a arriba. Al igual que en los ejercicios de numeración, el alumnado procesa mejor los datos y de manera más eficiente cuando se presentan de manera ascendente, que cuando lo hacen en sentido descendente. El modelo sólo requiere dos columnas. En la primera se irán colocando las cantidades parciales que se van añadiendo. En la segunda, el progreso hasta llegar a la cantidad deseada.

El proceso es fácil de explicar. Se parte del sustraendo, y hay que ir añadiéndole cantidades hasta que se llega al minuendo. La figura 4 muestra cómo un alumno de 2º resuelve un problema de igualación 1. Va añadiendo al sustraendo (primera columna) las cantidades que considere necesarias, y en la segunda columna escribe a las que ha llegado. Cuando llega al número solicitado, suma todo lo añadido para hallar el resultado. En realidad, por el sentido y por la mecánica de la operación, se trabaja más la suma que la resta.

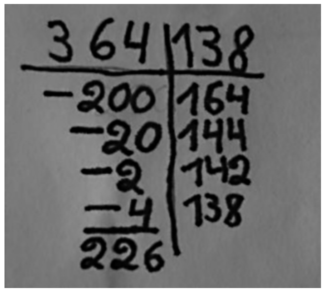
Figura 4



Formato en escalera descendente

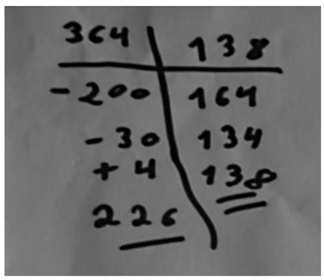
Soporta el mismo fundamento que el algoritmo anterior, pero cambiando el sentido. Se trata de partir de una cantidad para, haciéndola más pequeña, llegar a otra. Esta niña ha hecho los cálculos de modo muy directo. La operación respondía al problema de averiguar los pisos que se tenían que descender (en una torre gigantesca) desde el 364 hasta el 138. Bajó primero las dos centenas, luego las dos decenas, y tomó sus precauciones cuando llegó a las unidades.

Figura 5



La figura 6 representa la solución al mismo problema, pero de una forma más creativa. La alumna baja 200 pisos, y luego 30. Como se ha quedado 4 pisos más abajo, los sube en el último cálculo. Nótese que esta alumna ha sumado las cantidades que tiene el mismo sentido (bajar) y ha restado la que lo tiene distinto (subir), con independencia de los signos.

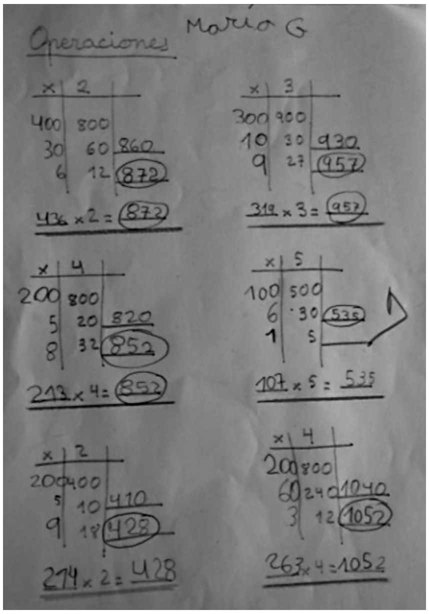
Figura 6



Multiplicación o producto

La figura 7 es la foto del cuaderno de una niña que ha comenzado sus multiplicaciones. El algoritmo es el clásico desarrollado, con la única variante de que se acumulan inmediatamente los productos parciales que se van consiguiendo.

Figura 7



Los alumnos de 2º comenzaron a multiplicar en el tercer trimestre, por lo que no han alcanzado aún la soltura y la rapidez de manejo que se espera. Suponemos que, al avanzar en su dominio, serán capaces de subsumir varios cálculos en uno solo.

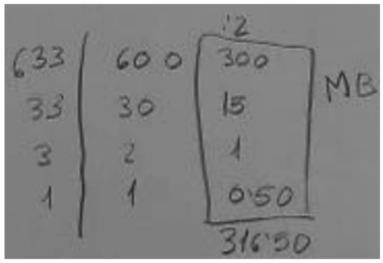
Pero ya apuntan maneras y a dejar su sello en cada operación. María, por ejemplo, multiplica 213x4 realizando primero las centenas, y luego descompone el 13 en 8 y 5 (en lugar de multiplicar por 10 y por 3). Cuando multiplica 107, descompone el siete en seis y uno. Tampoco multiplica el 14 de 214, sino que lo hace por 200, por 9 y por 5.

La división o cociente

Si el niño domina la tabla de multiplicar, entendiendo por ello que no sólo sabe multiplicar unidades, sino también decenas, centenas y millares, entonces sabrá resolver todas las divisiones por una cifra de una forma rápida y con un gran componente mental. Por lo visto hasta la fecha, tal vez sea esta la operación que más le gusta realizar.

La figura 8 muestra el formato de la división. Ha sido resuelta por un niño de 2º. Consta de tres columnas. La primera de la izquierda recoge las cantidades totales a repartir. La del centro, las que escoge el niño para hacer la distribución exacta. La última, debajo del divisor, recoge los cocientes parciales. La suma de ellos dará el cociente total. La cantidad que quede en la primera columna será el resto. En el caso presente, el niño ha repartido 633 € entre dos personas, y ha repartido también, sin que nadie se lo indique, el euro restante.

Figura 8



Las tres fotos que siguen (figuras 9, 10 y 11), muestran las posibilidades de adaptación del algoritmo a la individualidad de cada uno de los alumnos.

Figura 9

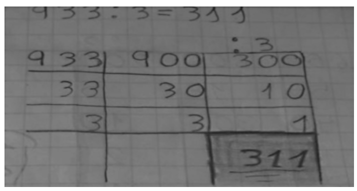


Figura 10

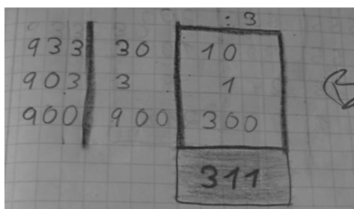
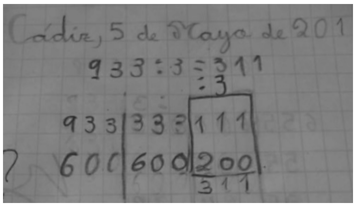


Figura 11



Evaluación

Los grupos de alumnos evaluados han sido los pertenecientes a los cursos segundos de los CEIPs Andalucía y Carlos III, de Cádiz. Ha habido tres razones para ello. En orden de importancia son:

- Han sido los únicos grupos que sólo han trabajado el cálculo siguiendo el método ABN desde el comienzo de su escolaridad.
- Se trata del curso final de un ciclo que tiene claramente establecidos en el currículum oficial los objetivos a alcanzar.
- Las exigencias de tiempo y las limitaciones del personal evaluador desaconsejaban afrontar las tareas de evaluación de otros grupos, al no garantizar las necesarias condiciones de objetividad y rigor.

En la primera semana de junio de 2010 se aplicaron unas pruebas que contenían reactivos sobre cálculo mental, resolución de operaciones y resolución explicada de problemas. Esas partes preguntaban por el nivel de logro de los tres primeros objetivos que señalamos en el lugar correspondiente. Respecto al cuarto objetivo, tenemos muchas constancias y testimonios de que ha cambiado sustancialmente la actitud de los alumnos y sus familias hacia el trabajo matemático, pero no expresadas de manera que se puedan traer aquí.

El equipo evaluador estuvo dirigido por el director de la investigación, y formado además por un inspector de educación, un profesor titular de la Facultad de CC.EE. de la Universidad de Cádiz y una psicóloga becaria en un máster de esta universidad.

Sirvieron de contraste cuatro grupos de alumnos de 2º curso de Primaria, pertenecientes a dos colegios privados concertados de mucho prestigio en la provincia, y que accedieron voluntariamente a someterse a esta comparación. Los mencionados grupos tenían en total 94 alumnos. Cada colegio aportó dos grupos. Como cada uno tenía más de dos grupos de 2º, fueron los propios centros los que eligieron a los grupos que iban a ser sometidos a la evaluación. Suponemos, aunque no tenemos ningún dato de ello, que elegirían a las clases más preparadas.

Las entrevistas individuales fueron llevadas a cabo por el equipo evaluador (muy mayoritariamente por el director de la investigación), sin otra presencia que el alumno y el evaluador. La prueba colectiva fue aplicada también por el equipo evaluador, si bien con la presencia de los correspondientes maestros tutores. Todas las preguntas que hicieron los alumnos respecto a lo que se les pedía exactamente fueron contestadas por un miembro del equipo evaluador. Ni en las entrevistas individuales ni en la aplicación colectiva hubo limitación de tiempo.

Los resultados obtenidos se ofrecen a continuación. En cada bloque se expresa la forma concreta de aplicación.

Resultados en 2º curso de Primaria

(*) Diferencia significativa a favor a un nivel de probabilidad del 95%. Cuando existe la misma, se sitúa en la casilla de arriba el coeficiente alcanzado.

Alumnos CBC: alumnos que siguen el método tradicional (cerrado, basado en cifras).

Alumnos ABN: alumnos que siguen el método de cálculo abierto, basado en números.

Todos los resultados se expresan en porcentajes.

Cálculo mental

A los alumnos se les presenta un cartel con las operaciones indicadas. Han de dar el resultado de viva voz, sin poder utilizar ningún utensilio. Fue una prueba de aplicación individual.

Calcula, sin hacer operaciones:

a) 428 + 351 = 779

.00	Muy Bien	Bien	Regular	Mal
Alumnos CBC	85	7	1	7
Alumnos ABN*	100	0	0	0

Sig. (2-tailed): .014

b) 628 + 239 = 867

	Muy Bien	Bien	Regular	Mal
Alumnos CBC	49	20	10	21
Alumnos ABN*	80	13	0	8

Sig. (2-tailed): .002

c) 586 + 352 = 938

	Muy Bien	Bien	Regular	Mal
Alumnos CBC	43	13	11	33
Alumnos ABN*	67	13	13	7

Sig. (2-tailed): .001

d) 934 – 213 = 721

	Muy Bien	Bien	Regular	Mal
Alumnos CBC	78	13	2	7
Alumnos ABN*	100	0	0	0

Sig. (2-tailed): .003

e) 448 – 229 = 219

	Muy Bien	Bien	Regular	Mal
Alumnos CBC	23	22	11	44
Alumnos ABN*	73	9	5	13

Sig. (2-tailed): .000

f) 727 – 355 = 372

	Muy Bien	Bien	Regular	Mal
Alumnos CBC	11	11	23	55
Alumnos ABN*	51	11	9	29

Sig. (2-tailed): .000

g) 234 X 2 = 468

	Muy Bien	Bien	Regular	Mal
Alumnos CBC	86	2	0	12
Alumnos ABN*	96	4	0	0

Sig. (2-tailed): .027

h) 313 X 3 = 939

	Muy Bien	Bien	Regular	Mal
Alumnos CBC	80	5	2	13
Alumnos ABN	80	9	0	11

i) 628 : 2 = 314

	Muy Bien	Bien	Regular	Mal
Alumnos CBC	29	3	1	67
Alumnos ABN*	87	7	0	6

Sig. (2-tailed): .000

Resolución de operaciones

Es una prueba de aplicación colectiva. Los alumnos debían resolver las operaciones con la técnica que conocieran utilizando exclusivamente lápiz y papel.

a) 499 + 289 = 788

	Redondeo	Bien	Regular	Mal
Alumnos CBC	0	88	3	9
Alumnos ABN*	24	69	5	2

Sig. (2-tailed): .001

b) 800 – 395 = 405

	Redondeo	Bien	Regular	Mal
Alumnos CBC	0	48	11	41
Alumnos ABN*	13	76	0	11

Sig. (2-tailed): .000

c) 497 x 2 = 994

	Redondeo	Bien	Regular	Mal
Alumnos CBC	0	91	2	7
Alumnos ABN*	9	89	2	0

Sig. (2-tailed): .008

d) 814 : 2 = 407

	Redondeo	Bien	Regular	Mal
Alumnos CBC	0	2	6	92
Alumnos ABN*	5	82	4	9

Sig. (2-tailed): .000

Resolución de problemas y explicación de los procesos intermedios

Es una prueba de aplicación individual. Se le pregunta al alumno, una vez realizada la operación que resuelve el problema, por la parte del mismo que está resuelto en función del avance de la operación.

a) Dos hermanos gemelos son tan iguales que hasta tienen el mismo dinero en la hucha. Entre los dos reúnen 378 €. ¿Cuántos euros hay en cada hucha?

	Bien. Explica los procesos	Bien. No sabe explicar los procesos	Mal resuelto
Alumnos CBC	0	0	100
Alumnos ABN*	78	0	22

Sig. (2-tailed): .000

b) En el patio estábamos 128 niños y niñas. Han venido otros 176. ¿Cuántos nos hemos juntado?

	Bien. Explica los procesos	Bien. No sabe explicar los procesos	Mal resuelto
Alumnos CBC	29	54	17
Alumnos ABN*	91	7	2

Sig. (2-tailed): .000

c) Mi Colegio tiene 423 niños y niñas. El Instituto tiene 177 más. ¿Cuántos alumnos y alumnas tiene el Instituto?

	Bien. Explica los procesos	Bien. No sabe explicar los procesos	Mal resuelto
Alumnos CBC	18	40	42
Alumnos ABN*	91	0	9

Sig. (2-tailed): .000

d) El sábado fueron al parque de atracciones 234 niños y niñas, y al cine 127. ¿Cuántos más deberían haber ido al cine para que a los dos sitios hubiera ido el mismo número de niños y niñas?

	Bien. Explica los procesos	Bien. No sabe explicar los procesos	Mal resuelto
Alumnos CBC	8	47	45
Alumnos ABN*	69	4	27

Sig. (2-tailed): .000

e) Una bicicleta cuesta 158 €. Una videoconsola cuesta 2 veces más. ¿Cuánto cuesta la videoconsola?

	Bien. Explica los procesos	Bien. No sabe explicar los procesos	Mal resuelto
Alumnos CBC	23	45	32
Alumnos ABN*	96	2	2

Sig. (2-tailed): .000

Gráfico 1. Cálculo mental. Valores medios

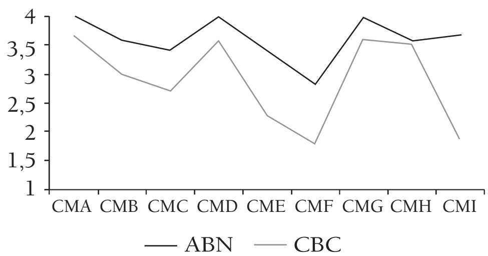


Gráfico 2. Operaciones. Valores medios

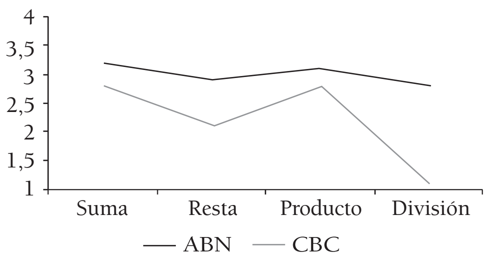
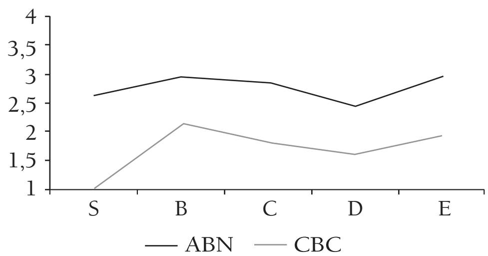


Gráfico 3. Resolución de problemas. Valores medios



Discusión

Salvo en una de las preguntas (la correspondiente a la letra «h» del cálculo mental), las diferencias a favor de los niños que han trabajado en exclusiva con el cálculo ABN son muy claras. Todavía lo son más si se toman en cuenta algunas circunstancias.

La primera de ellas es la autolimitación de los contenidos que se deberían incluir en la evaluación. No se pudieron incluir actividades avanzadas de numeración, ni nada referido a sumas y restas con decimales. Tampoco se pudieron incluir multiplicaciones en las que uno de los factores fuera superior a tres, ni divisiones que tuvieran como divisor un número que no fuera el dos. La razón era que los alumnos CBC no se habían ocupado de tales aspectos y los dejaban para ocuparse de ellos en el curso siguiente.

La segunda se refiere al cálculo mental, en el que las diferencias que se expresan no han tenido en cuenta un factor muy importante: el tiempo que empleaban los alumnos en la contestación. Los niños ABN han contestado la mayoría en un lapso no superior a los veinte segundos; los niños CBC han tardado mucho más. Si nos hubiéramos tenido que atener a los tiempos estimados que se recogían en el protocolo, apenas si hubieran respondido algunos de los niños que siguen el cálculo tradicional.

La tercera señala la desaparición de un factor que siempre está presente en los diferentes resultados de evaluaciones externas que se llevan a cabo: la muy diferente extracción social de unos niños y otros. Los alumnos del método ABN pertenecen a colegios de barriadas suburbiales, de familias muy humildes, con enormes dificultades de todo tipo. El alumnado de los colegios que sirvieron de contraste lo son de centros que, a nivel provincial, se consideran de élite, al que asisten niños de clase media y de clase media alta. La constatación de esta circunstancia es fácil de establecer. El primer criterio de acceso a los centros, cuando los alumnos entraron en sus respectivos colegios, es la proximidad domiciliaria. Por ello, la ubicación de los centros públicos en barriadas periféricas determina la población que recibe. En el caso de los dos centros de contraste, uno de ellos es totalmente privado, con lo que las familias han de subvenir al coste total de la enseñanza. El otro es concertado, pero está situado en la zona más noble de la ciudad, donde las viviendas alcanzan el precio más elevado y es mayor el nivel de servicios.

No se considera determinante la presencia del investigador en las aulas y en la dirección de la experiencia. En primer lugar, porque tal presencia eras muy restringida en el tiempo: alrededor de una hora cada quince días, y en segundo lugar porque la ejecución material de las acciones necesarias para el desarrollo del mismo era siempre llevada a la práctica por las maestras. En cualquier caso no se puede pasar de la suposición, puesto que no han existido grupos de alumnos que paralelamente hayan aplicado el método sin que en ello interviniera el director del mismo.

Conclusiones

Los resultados obtenidos no dejan lugar a ninguna duda. Los alumnos ABN alcanzan un nivel de logro muy superior a los que siguen el método tradicional. Hay que descartar que la causa fuera una mala práctica profesional por parte de los grupos de contraste. Al contrario, dentro de las limitaciones impuestas por la metodología, pudimos comprobar el alto nivel de los alumnos CBC. El asunto está en las limitaciones del método que se emplea con ellos.

Los resultados alcanzados por los alumnos ABN en el apartado de las operaciones han sido superiores a lo esperado. A priori, se podría pensar que, dado el exhaustivo tratamiento y el casi completo adiestramiento que los niños CBC tienen con las tablas y las cuentas, estos alumnos podrían estar por encima de los sujetos de la investigación. No ha sido así, y aunque no haya habido un contraste objetivo respecto a los tiempos, no han sido más rápidos los primeros alumnos que los segundos. Este aspecto es muy importante: ni siquiera un adiestramiento muy mecánico y repetitivo supera a la velocidad que se alcanza cuando los cálculos se hacen con sentido y de manera reflexiva.

Respecto al cálculo mental, el alumnado ABN ha sobresalido por su técnica. Los alumnos CBC tienen muchas dificultades: cada ejercicio que se les sometía lo representaban mentalmente como una cuenta, que también resolvían mentalmente, y en las que las cifras del resultado también tenían que ser guardadas en la memoria para luego ser apiladas en el orden previsto para formar el resultado. De ahí el tiempo que tardaron y los errores que cometieron. En cambio los alumnos ABN operan directamente con los números siempre de izquierda a derecha, y hacen valer su destreza gracias al entrenamiento con material manipulativo y al manejo de tablas.

En cuanto a la resolución explicada de problemas, las diferencias tan acusadas también se deben a los diferentes métodos empleados. Los formatos del cálculo CBC impiden gobernar los procesos que ellos mismos desencadenan. Resuelven los problemas casi por acertijo, y la operación que emplean para hallar el resultado no tiene que ver con la naturaleza de los mismos. En definitiva, y para no extendernos, reproducen las conductas erróneas que tantas veces se han recogido en la literatura científica.

El método basado en algoritmos ABN consigue un mejor rendimiento de los sujetos menos dotados, que el que se obtiene con la aplicación de la metodología tradicional. En el primer caso, las diferencias intergrupos, entre el alumno que obtiene mejores resultados y el que los obtiene peores, son de 20 puntos, con una desviación típica de 5.87. En el segundo, esa diferencia es de 30 puntos, y la desviación típica alcanza los 6.82 puntos.

Es muy reconfortante incluir como conclusión que las grandes diferencias entre la extracción social de los alumnos de ambas metodologías no ha tenido, en los resultados finales, el peso que normalmente se le otorga en otros estudios de evaluación externa. Creemos que es una magnífica noticia para la escuela, que reafirma su espíritu y propósitos. Una actuación docente adecuada con un método idóneo puede salvar muchos de los inconvenientes y obstáculos que pueda presentar la población.

Finalmente, y con gran esperanza, los resultados de la investigación muestran que las matemáticas pueden dejar de ser la vara de medir inteligencias o el estrecho paso que se utiliza para seleccionar a unos alumnos y discriminar a los demás, y que se pueden convertir en lo que siempre han debido ser: una poderosa herramienta de desarrollo intelectual de los niños y niñas, una pieza fundamental en la construcción de su pensamiento lógico y crítico.

Referencias bibliográficas

ABLEWHITE (1971). *Las matemáticas y los menos dotados*. Madrid: Morata.

ALCALÁ, M. (1986). *Otra matemática, otra escuela*. Granada: Escuela Popular.

ASHLOCK, R. B. (2010). *Error patterns in computation*. 10ª edición. Boston.

BAROODY, A. J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: MEC-Visor.

CASTRO, E., RICO, L., y CASTRO, E. (1987). *Números y operaciones*. Madrid: Síntesis.

CHAMORRO, M. C. (coord.) (2005). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Prentice Hall.

COREY, S. (1949). Curriculum Development through Action Research. *Educational Leadership*, 7, 148.

DE JONG, R. (1986). *Wiskobas in methoden [Wiskobas en libros de texto*]. Utrecht. OW & OC, Universidad de Utrecht.

DICKSON, L., BROWN, M., y GIBSON, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC-Labor.

EBBUTT, D (1983). *Educational Action Research: some general concerns and specifics quibbles*. Cambridge: CIE.

ELLIOT, J. y otros. (1986). *Investigación/acción en el aula*. Valencia: Generalitat Valenciana.

FERNÁNDEZ ESCALONA, C. (2007). ¿Cómo y cuándo abordar la didáctica de las operaciones de suma y resta? *Bordón,* 59 (1).

FERRERO, L. (1984). *Operaciones con números naturales*. Madrid. Papeles de Acción Educativa.

FREUDENTHAL, H. (1977). Discurso al serle otorgado un doctorado honorario. *Euclides*, 52, 336-338.

FREUDENTHAL, H. (1979). Structuur der wiskunde en wiskundige structuren; een onderwijskundige analyse. [Estructura de las matemáticas y estructuras matemáticas; un análisis educativo]. *Pedagogische Studiën*, 56 (2), 51-60.

GIL FLORES, J. (2008). Respuestas a los problemas de bajo rendimiento desde la perspectiva de diferentes actores educativos. *Bordón*, 60 (2).

GÓMEZ ALFONSO, B. (1988). *Numeración y operaciones*. Madrid: Síntesis, 106.

GÓMEZ ALFONSO, B. (1999). El futuro del cálculo. *Uno*, 22, 20-27.

JAULIN-MANNONI, F. (1980). *Las cuatro operaciones básicas de la matemática*. Madrid: Pablo del Río.

KAMII, C. K. (1986). *El niño reinventa la aritmética*. Madrid: Visor.

KAMII, C. K., y DOMINICK, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. MORROW & Margaret J. KENNEY (eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (1998 NCTM Yearbook). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

MARTÍNEZ MONTERO, J. (1995). *Los problemas aritméticos elementales verbales de una etapa, desde el punto de vista de las categorías semánticas, en los cursos 3º, 4º y 5º de EGB/Primaria*. Tesis Doctoral.

MARTÍNEZ MONTERO, J. (2000). *Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI*. Barcelona: CISS-Praxis.

MARTÍNEZ MONTERO, J. (2001). Los efectos no deseados (y devastadores) de los métodos tradicionales de aprendizaje de la numeración y de los cuatro algoritmos de las operaciones básicas. *Epsilon,* 49, 13-26.

MARTÍNEZ MONTERO, J. (2008). *Competencias básicas en matemáticas. Una nueva práctica*. Madrid: Wolters Kluwer.

MARTÍNEZ MONTERO, J. (2010). *Enseñar matemáticas a alumnos con necesidades educativas especiales*. 2ª Edición. Barcelona: CISS-Praxis.

MAZA, C. (1989). *Sumar y restar*. Madrid: Visor.

MIALARET, G. (1977). *Las matemáticas. Cómo se aprenden. Cómo se enseñan*. Madrid: Pablo del Río.

N. C. T. M. (2000). *Principios y estándares para la educación matemáticas*. Granada: SAEM Thales.

PEREDA, L. (1987). *Didáctica de las cuatro operaciones*. Bilbao: D. De Brouwer.

RAMÍREZ MARTÍNEZ, A., y USÓN VILLALBA, C. (1996). Por los trillados caminos de la aritmética escolar de las cuatro operaciones. *Suma*, 21, 63-72.

RESNICK, L. B., y FORD, W. W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Madrid: MEC Paidos.

TREFFERS, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – the Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

TREFFERS, A., DE MOOR, E., y FEIJS, E. (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel I. Overzicht einddoelen [Diseño de un programa nacional para la educación matemática en las escuelas primarias. Parte I. Perspectiva general de las metas*]. Tilburg. Zwijsen.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (1998). Realistic Mathematics Education: Work in progress. En T. BREITEIG y G. BREKKE (eds.), *Theory into practice in Mathematics Education*. Kristiansand (Noruega): Facultad de Matemáticas y Ciencias.

VV. AA. (2007). *Aprender matemáticas. Metodología y modelos europeos*. Madrid: S.P. del MECD.

VERGNAUD, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad.* México DF: Trillas.

Fuentes electrónicas

http://algoritmosabn.blogspot.com [Fecha de consulta: 18/Septiembre 2010]

Abstract

The method of open calculation based on numbers (ABN) as a future alternative with respect to the closed traditional methods based on figures (CBC)

INTRODUCTION. This paper considers the difficulties that have derived from traditional mathematics and the alternatives that have been developed, as well as the origin of ABN (the Open Number Method). METHOD. The research was undertaken from a mathematical realist approach, principally using a qualitative methodology. RESULTS. The results obtained have confirmed that students using the ABN method achieve better performances in mental arithmetic, operations and problem-solving than those using a traditional method. DISCUSSION. The limitations in the contents of the evaluation, the time taken by the different students to complete it, as well as the varied social backgrounds of the students suggest that the differences in mathematical competence shown between groups could be greater.

Keywords: *Addition, Computation, Basic skills , Division, Mu ltiplication, Number operations, Word's problems, Subtraction.*

Résumé

La méthode de calcul ouvert basée en nombres (OBN) en tant qu'alternative d'avenir par rapport aux méthodes traditionnelles fermées basées en chiffres (FBC)

INTRODUCTION : Il s'agit d'un parcoure à travers les difficultés que le calcul traditionnel a toujours posé et les alternatives qui ont été mises en marche, aussi bien que l'origine du calcul OBN.

MÉTHODE : La recherche a été menée dans le cadre du réalisme mathématique, en suivant une méthode fondamentalement qualitative. RÉSULTATS : Les résultats ont confirmés que les élèves qui emploient la méthode de calcul OBN obtiennent des meilleures performances en calcul mental, opérations et résolution de problèmes, que ceux qui suivent la méthode traditionnelle ou FBC. DISCUSSION : Les limitations dans les contenus d'évaluation et les temps employés par les différents élèves pour sa réalisation, nous font supposer que les distances en termes de compétences mathématiques entre les deux groupes pourraient être encore plus grandes.

Mots clés: *Addition, Calcul, Habilités basiques, Division, Multiplication, Opérations numériques, Problèmes verbales, Soustraction.*

Perfil profesional del autor

Jaime Martínez Montero

Inspector en la Delegación Provincial de Cádiz. Doctor en Filosofía y Ciencias de la Educación. Ha sido también profesor asociado de la Universidad de Cádiz, en el Departamento de Didáctica, y miembro del Comité Científico de la Agencia Andaluza de Evaluación. Autor de numerosos trabajos sobre evaluación, y sobre didáctica de las matemáticas, sobre los que ha publicado diversos artículos y libros.
Correo electrónico de contacto: Jaime.martinez@uca.es.