

7.1. Geogebra 3D

Geogebra 3D

Sitio: Aula Virtual de Formación del Profesorado. Junta de Andalucía.

Curso: GEOGEBRA COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA EN EL AULA (19K9902AV061)

Libro: 7.1. Geogebra 3D

Imprimido por: Gil Crespo, Miguel Ángel

Día: viernes, 15 de febrero de 2019, 19:56

Tabla de contenidos

- 1. Objetivos
- 2. Vista Gráfica 3D
- 3. Barra de Estilos 3D.
- 4. Barra de Herramientas 3D
- 5. Desplazamientos en 3D.
- 6. Aplicaciones al aula.
 - 6.1. Poliedros.
 - 6.2. Cuerpos de Revolución.
 - 6.3. Rectas y planos en el espacio.

1. Objetivos

OBJETIVOS:

Esta unidad tiene como objetivo principal el uso y manejo de la vista gráfica de GeoGebra en 3 Dimensiones.

Uno de los trabajos más complicados en el aula de matemáticas es conseguir que los alumnos y alumnas entiendan los cuerpos y elementos en el espacio ya que plasmamos en 2 dimensiones lo que está en 3D. Gracias a esta vista de GeoGebra se pretende que el alumnado de ESO y bachillerato tengan una vista dinámica de lo que ocurre con los elementos en el espacio.

Los objetivos que se pretenden alcanzar a lo largo del módulo son:

- Utilizar la vista gráfica 3D de Geogebra.
- Trabajar con las herramientas específicas de la vista gráfica 3D.
- Presentar los datos paralelamente en distintas vista gráficas.
- Trabajar en el aula con poliedros y cuerpos de revolución.
- Usar Geogebra para la representación de problemas espaciales con planos, rectas y puntos.

2. Vista Gráfica 3D

Dentro del menú Vista, además de las vistas con las que hemos trabajado hasta ahora, podemos activar Gráficas 3D. Si cerramos el resto de vistas encontraremos la siguiente ventana:

-  Para anteojos 3D
-  Oblicua

En la versión *web* o para *Tablet* se puede incluso:

-  **añadir vistas adicionales** en la ventana de GeoGebra.
-  **abrir el Cuadro de Ajustes..**

4. Barra de Herramientas 3D

La *Barra de herramientas 3D* ofrece diversas *Herramientas* para, con el ratón, poder crear representaciones tridimensionales de objetos en la  *Vista 3D*.

Cada icono de la *Barra de Herramientas* representa una *Caja* que contiene una selección de las herramientas similares. Se *abre* cada *caja* pulsando en la flechita inferior izquierda (versión de *escritorio*) o en la que encabeza la *barra* (versión *web* o para *Tablet*).



Las herramientas de la  **Vista 3D** está organizadas según la naturaleza de los objetos resultantes o del tipo de función que efectúan.

Tenemos las siguientes herramientas que, pinchando sobre ellas, podemos acceder a su explicación detallada.

(Los links dan acceso al manual oficial de Geogebra)

 Elige y mueve	 Punto	 Recta	 Perpendicular	 Polígono	 Circunferencia eje-punto	 Intersección 2 superficies	 Plano por tres puntos	 Pirámide	 Esfera centro-punto	 Ángulo	 Simetría especular	ABC Texto	 Rota vista gráfica 3D
 Punto en objeto	 Segmento	 Paralela	 Circunferencia centro-radio- dirección			 Plano	 Prisma	 Esfera centro- radio	 Distancia o longitud	 Simetría axial		 Desplaza vista gráfica	
 Intersección	 Segmento longitud dada	 Bisectriz	 Circunferencia por tres puntos			 Plano perpendicular	 Pirámide o cono desde su base	 Área	 Simetría central		 Acercar		
 Medio o centro	 Semirrecta	 Tangentes	 Arco de circunferencia			 Plano paralelo	 Prisma o cilindro desde su base	 Volumen	 Rotación axial		 Alejar		
 Limita/libera punto	 Vector	 Recta polar	 Arco tres puntos				 Cono		 Traslación		 Mostrar/ocultar objeto		

									
	Vector equipolente	Lugar geométrico	Sector circular		Cilindro		Homotecia		Mostrar/ocultar etiqueta
									
			Sector tres puntos		Tetraedro				Copiar estilo visual
									
			Elipse		Cubo				Borra
									
			Hipérbola		Desarrollo				Vista frontal
									
			Parábola						
									
			Cónica por cinco puntos						

5. Desplazamientos en 3D.

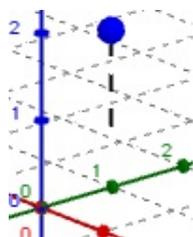
Quando creamos un punto con la herramienta , al desplazar el puntero del *ratón* sobre la zona del plano xOy , adopta una representación *en cruz* 

Un *clic* en el lugar deseado permite crear un nuevo punto en el plano xOy

Cada punto creado puede desplazarse con la herramienta  Elige y Mueve, en el plano horizontal o vertical, haciendo clic en el botón izquierdo del ratón cambiamos el tipo de movimiento.

- horizontal 
- vertical 

En el movimiento podrá verse su proyección vertical acorde a sus desplazamientos tridimensionales



En la *Vista 3D*, se puede usar el teclado para mover objetos, empleando las teclas de flecha Arriba para *elevantar* el objeto y Abajo para moverlo hacia abajo.

Entrada Directa vía Barra de Entrada

La *Vista 3D* admite puntos, vectores, rectas, segmentos, semirrectas, polígonos, circunferencias y cónicas en el sistema de coordenadas tridimensional.

Además de usar las Herramientas 3D de la Barra se puede, directamente, ingresar la expresión algebraica de estos objetos en la *Barra de Entrada*.

Para crear puntos se puede hacer desde la barra de entrada de dos formas:

- Con sus tres coordenadas cartesianas $A=(1,2,5)$
- Con sus tres coordenadas esféricas $A=(1 ; 45^\circ; 60^\circ)$ (estas coordenadas requieren los valores correspondientes a *recta-longitud-latitud*)

Además, se pueden crear superficies y planos, así como sólidos geométricos (pirámides, prismas, esferas, cilindros y conos).

Rotación del Sistema de Coordenadas

Se puede rotar el sistema de coordenadas usando la herramienta , *Rota la Vista Gráfica 3D*, y arrastrando el fondo de la  *Vista 3D*. Alternativamente, se puede arrastrar a la derecha el fondo para rotar el sistema de coordenadas de la *Vista 3D*.

Para que continúe la rotación del sistema de coordenadas al soltar el ratón o *mouse*, se puede recurrir a la opción , *Inicia Rotación de la Vista*, y a , *Detiene Rotación de la Vista*, en la *Barra de Estilo de la Vista 3D*.

Vista frente al Objeto

La herramienta , *Vista frontal*, permite ver el sistema de coordenadas desde el punto de vista frontal al objeto seleccionado.

6. Aplicaciones al aula.

Aquí veremos algunas de las aplicaciones de Geogebra en 3 Dimensiones que se pueden llevar al aula.

Se va a trabajar en los siguientes puntos:

- Uso de Geogebra 3D en construcción de poliedros.
- Figuras de revolución con Geogebra 3D.
- Uso de 3D para problemas de planos, rectas y puntos en el espacio.

6.1. Poliedros.

Varios de los problemas que encontramos desde 5º de primaria con los poliedros son sus desarrollos y el cálculo de sus áreas y volúmenes.

Ejemplo:

Vamos a crear un prisma regular de base triangular de 3 cm de lado y 5 cm de alto. Para ello tenemos varias opciones:

1. Abrimos la  *Vista Gráfica* y la  *Gráficas 3D* (para una mejor visión del poliedro se recomienda ocultar los ejes en la *Vista Gráfica* y los ejes y el plano en la *Gráficas 3D*). En la *Vista Gráfica* elegimos la herramienta , *Segmento de longitud dada*, pinchamos en la pantalla y en el cuadro de diálogo que aparece escribimos 3. Seleccionamos la herramienta  *Polígono regular* y pinchamos sobre A y B y elegimos el número de lados (en nuestro caso 3). Este triángulo aparece también en la *Vista 3D*. Ahora sobre la *Vista 3D* elegimos la herramienta , *Prisma o Cilindro desde su base*, luego seleccionamos el triángulo y escribimos la altura en la ventana emergente (en nuestro caso 5).

- Podemos crear los puntos en la barra de entrada, introducimos $A=(0,0,0)$, $B=(3,0,0)$, y $C=(0,0,5)$. Luego con la herramienta  *Polígono regular* creamos el triángulo equilátero sobre A y B, con la herramienta  *Prisma* en la vista 3D seleccionamos el polígono y el punto C.
- Podemos crearlo todo desde la barra de entrada, creamos los puntos A y B como en el apartado anterior y escribimos ***Polígono[A, B, 3]*** con lo que tenemos creado el triángulo equilátero e introducimos ***Prisma[polígono1, 5]*** (donde polígono1 es como se ha llamado nuestro triángulo y 5 es la altura).

Para ver su desarrollo es tan sencillo como elegir la herramienta , *Desarrollo*, y seleccionar el prisma creado. En la  Vista Gráfica se crea un deslizador que, al moverlo, muestra el desarrollo de la figura lentamente sobre la Vista Gráfica 3D.

Ahora vamos a crear dos casillas de control para mostrar el área y el volumen del prisma.

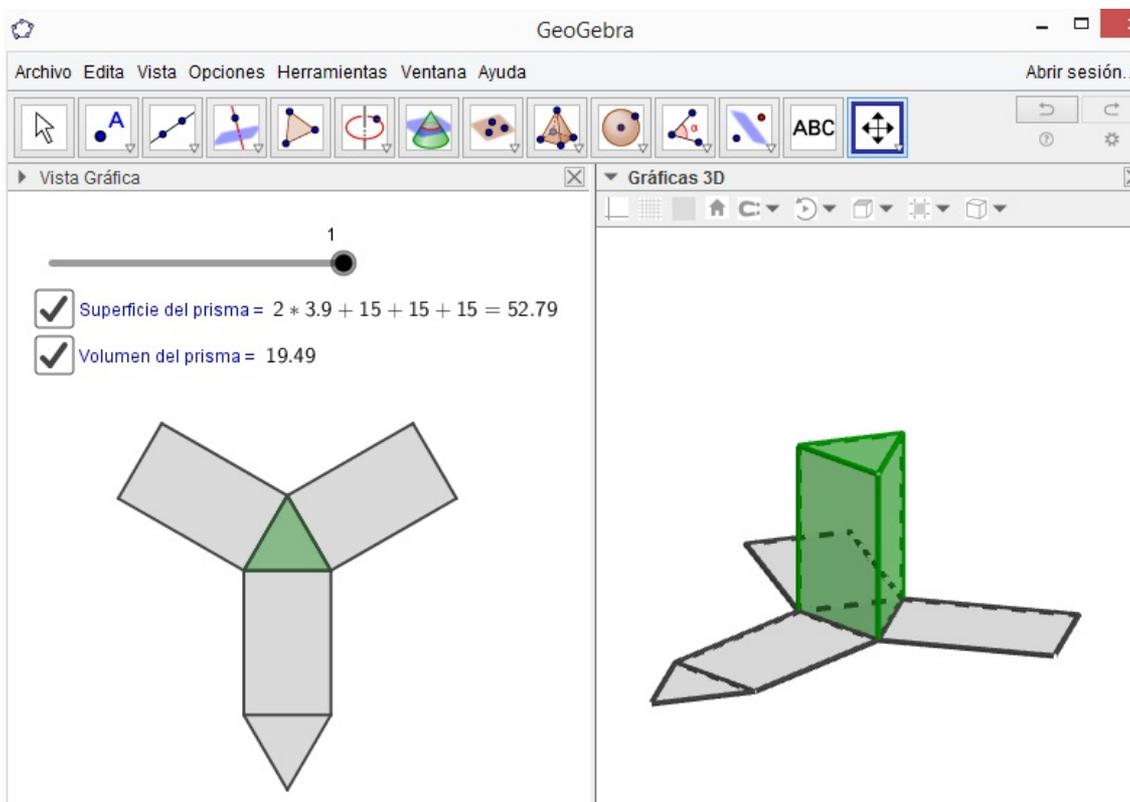
Calculamos el área total del prisma escribiendo en la barra de entrada (sumando los nombres de las caras que tiene el prisma creado y que podemos ver en la vista Algebraica. Comprueba los que has obtenido)

Entrada: $\text{sup}=2*\text{caraEFG}+\text{caraABFE}+\text{caraADGE}+\text{caraBDGF}$

Ahora elegimos la herramienta , *Texto*, y escribimos la fórmula seleccionando los objetos. Luego creamos una Casilla de Control (esta herramienta no está en la vista 3D) donde escribimos ***"Superficie del prisma ="*** y hacemos que muestre u oculte este texto.

Para calcular las superficies también podemos usar la herramienta , *Área*, y pinchamos sobre cada una de las caras del prisma (es más sencillo hacerlo sobre el desarrollo de la Vista Gráfica).

Hacemos lo mismo para el volumen utilizando la herramienta , *Volumen*, de la vista 3D y pinchando sobre el prisma.



Actividad:

Realiza una actividad similar con una pirámide de base cuadrada de lado 3 y altura 6 cm.

6.2. Cuerpos de Revolución.

Entre los cuerpos de revolución que se trabajan en el segundo ciclo de primaria, ESO y Bachillerato se encuentran los conos, cilindros y la esfera.

Vamos a trabajar el cálculo de áreas y volúmenes y la generación de estas figuras.

Ejemplo 1:

Vamos a crear un cono de radio 2 cm y altura 4 cm. Para ello podemos utilizar varias opciones al igual que en la creación del resto de sólidos:

1. Abrimos la vista  Gráficas 3D.

Creamos un punto que será el centro de nuestra circunferencia, elegimos la herramienta , *Circunferencia (centro-radio-dirección)* y seleccionamos, primero el punto y luego el eje Z, en el cuadro de diálogo que aparece escribimos el radio (2 en este caso). Ahora elegimos la herramienta , *Pirámide o Cono desde su base*, luego seleccionamos la circunferencia y escribimos la altura en la ventana emergente (en nuestro caso 4).

Ocultamos los ejes y el plano pinchando en  y  en la barra de estilos 3D.

2. Podemos crear dos puntos en la barra de entrada que serán el centro del cono y su vértice.

Introducimos el centro $A=(1,1,0)$ y el vértice $B=(1,1,4)$. Con la herramienta , *Cono*, pinchamos primero el centro, A, y luego en el vértice, B. En el cuadro de diálogo emergente escribimos el radio de la base del cono (en este caso 2).

3. Podemos crearlo todo desde la barra de entrada, donde tenemos dos opciones:

- Cono[<Punto>, <Punto>, <Radio>] creamos los puntos A y B como en el apartado anterior y escribimos Cono[A, B, 2].
- Cono[<Círculo>, <Altura>] creamos el punto A y una circunferencia con Circunferencia[A, 2] y escribimos Cono[C,4].

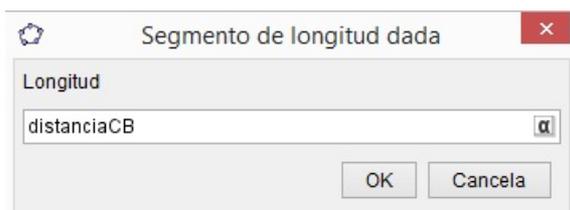
Para calcular el volumen simplemente pinchamos sobre la herramienta , *Volumen*, y sobre el cono.

DESARROLLO PLANO DEL CONO:

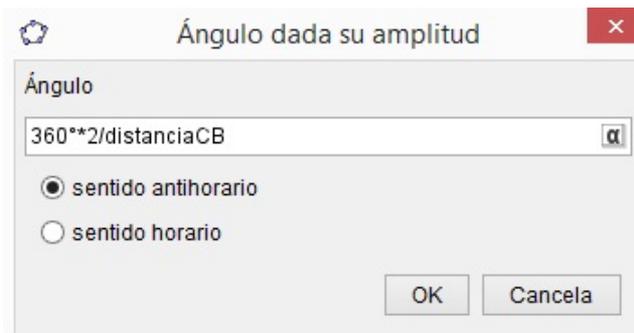
Geogebra no crea el desarrollo plano de los cuerpos de revolución, así que para mostrarlo en el aula podemos hacerlo manualmente:

Abrir la vista  Gráfica y la vista , Gráficas 3D. Creamos un cono con los datos anteriores. Con la herramienta , *Punto*, marcamos un punto de la circunferencia de la base, C y, con la herramienta , *Distancia o longitud*, en la vista Gráficas 3D, medimos la distancia entre ese punto y el vértice del cono. En la vista algebraica aparece un número llamado **distanciaCB** (distancia entre los puntos C y B), esa es la medida de la generatriz del cono.

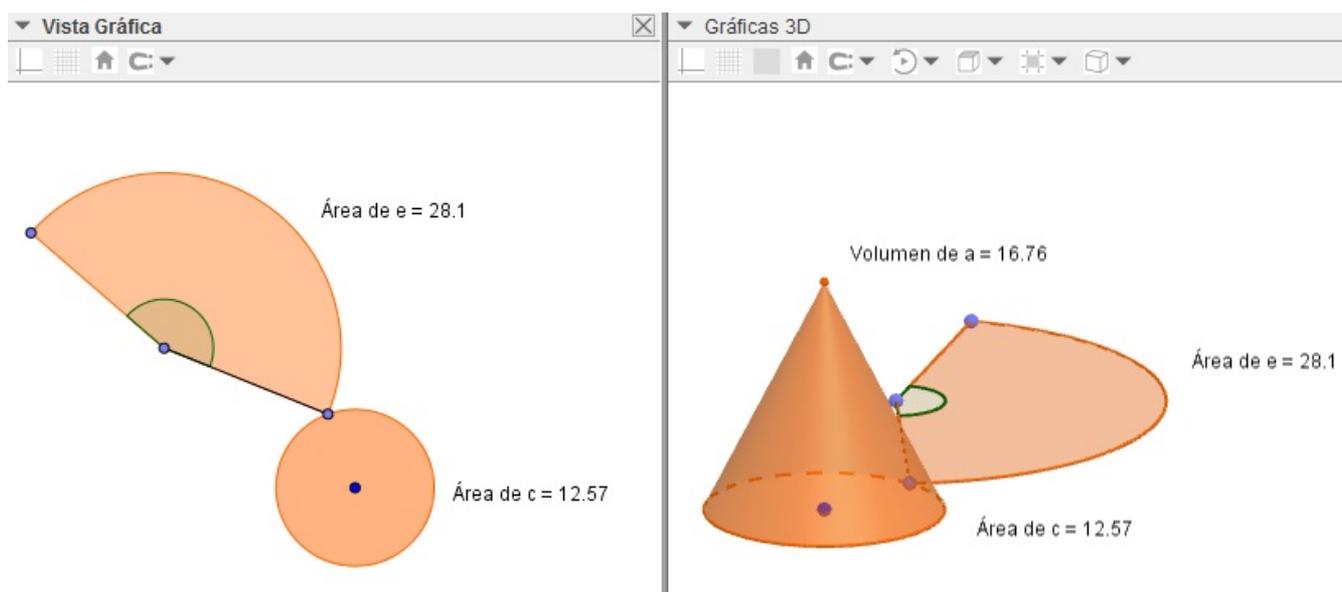
En la  Vista Gráfica, con , *Segmento de longitud dada*, pinchamos sobre el punto C de la circunferencia y en el cuadro de diálogo escribimos **distanciaCB**.



El extremo del segmento creado, D, será el centro del sector circular que representa el desarrollo plano del cono. Para dibujarlo elegimos la herramienta  *Ángulo dada su amplitud*, y seleccionamos el punto de la circunferencia, C, el centro del sector, D y como amplitud pondremos $360^\circ \cdot r/g$ (r es nuestro radio (**2**) y g lo que mide la generatriz (**distanciaCB**)). Aparece así un nuevo punto C'.



Con la herramienta  *Sector circular* creamos el lateral del cono pinchando en los tres puntos que lo forman (primero en el centro, D, luego el punto de la circunferencia, C y por último el punto que aparece del ángulo, C'). Ahora con la herramienta  *Área*, pinchamos sobre el círculo y el sector y sólo hay que sumarlas.



Ejemplo 2:

Vamos a construir la generación de la esfera.

Abrir la vista  *Gráfica* y la vista  *Gráficas 3D*.

En la barra de estilos 3D elegimos vista frontal del plano XY o con la herramienta  *Rota Vista Gráfica 3D*, giramos hasta tener el plano XY frontal.

Creamos un punto, por ejemplo $A=(1,0,0)$ en la barra de entrada, ahora creamos la recta paralela al eje Y que pasa por A con la herramienta  *Recta Paralela*.

Con  *Punto*, creamos un punto sobre la recta pinchando sobre ella, B.

Con la herramienta  *Simetría Central*, creamos el simétrico del punto creado B respecto a A, B'.

Ocultamos los ejes en ambas vistas.

Hacemos un semicírculo con la herramienta , *Sector Circular*, pinchando en un A, B y B'.
Cerramos la Vista Gráfica.

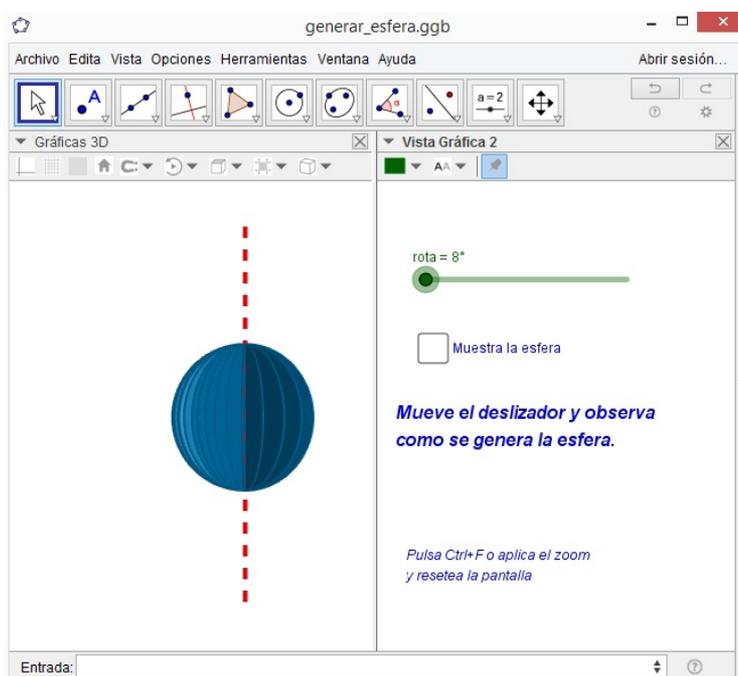
Abrimos la  **Vista Gráfica 2**, creamos un deslizador  $a=2$ que sea un ángulo y lo llamamos rota.

En la barra de entrada escribimos Rota[<Objeto>, <Ángulo>, <Eje de rotación>], donde el objeto es nuestro sector circular, el ángulo es el deslizador y el eje es la recta creada, en este caso: Rota[c, rota, f].

Aparece un sector c'. Entra en sus propiedades y selecciona *Rastro*  Rastro . Mueve el deslizador y se generará la esfera.

En , Gráficas 3D, creamos la esfera con la herramienta  *Esfera dado su centro y un punto*.

Ahora lo dejamos bonito, que no se muestren ni los ejes ni el plano en 3D, damos colores, podemos escribir algún texto en la Vista Gráfica 2, le añadimos una casilla de control para mostrar y ocultar la esfera.



Actividad:

1. Realiza una actividad similar con un cilindro de 4 cm de radio y altura 7 cm.
2. Construye la generación del cilindro.

6.3. Rectas y planos en el espacio.

En este apartado se verán algunas de las aplicaciones de la Vista 3D de Geogebra para el estudio de las posiciones de los puntos, rectas y planos en el espacio.

1. DISTANCIAS EN EL ESPACIO.

Podemos utilizar las siguientes construcciones para el estudio de distancias en el espacio.

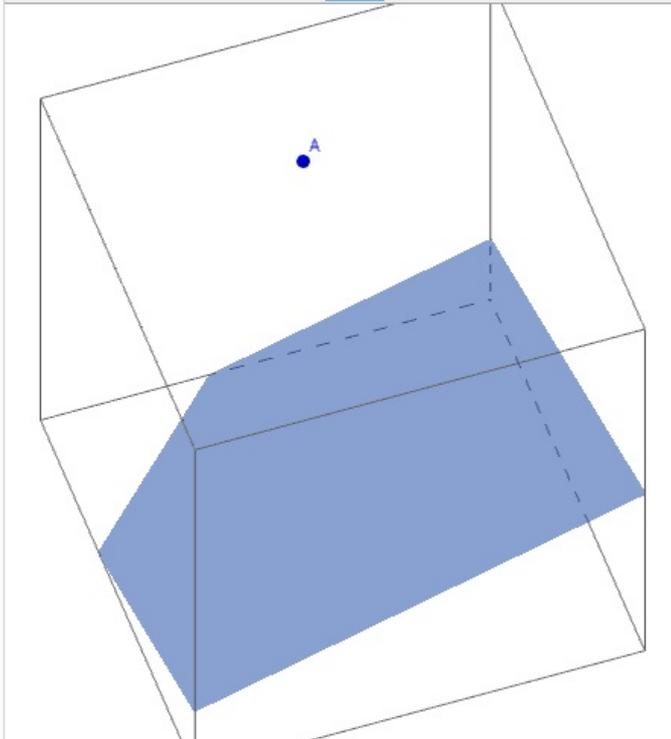
Pincha sobre las imágenes, descárgalas y abre para visualizar estos ficheros.

Distancia de un punto a un plano

distancia_de_un_punto_a_un_plano.ggb.zip

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda Abrir sesión...

Gráficas 3D Vista Gráfica 2



Distancia de un punto a un plano

Distancia de un punto a un plano

1. Tomamos el vector normal al plano
2. Construimos la recta que pasa por el punto A y cuyo vector de dirección es el normal del plano
3. Intersecamos el plano y la recta. El punto resultante es el de mínima distancia.
4. Hallamos la distancia de A a B

distanciaAB = 3.97

Dados $A(a_1, a_2, a_3)$

$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(A, \pi) = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

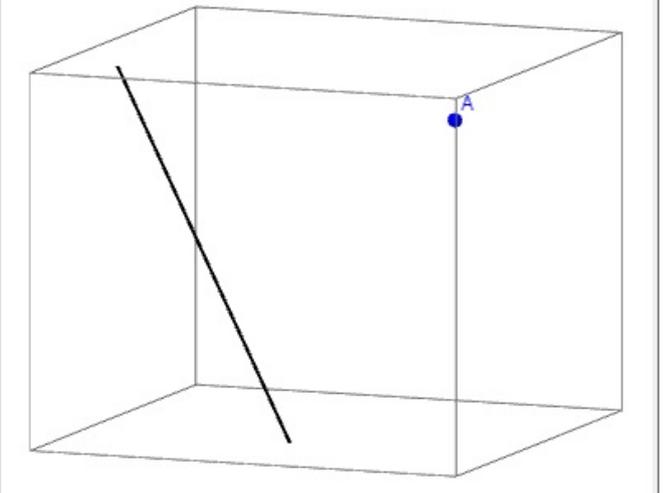
Entrada:

Distancia de un punto a una recta

distancia_de_un_punto_a_una_recta.ggb-1.zip

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda Abrir sesión...

Gráficas 3D Vista Gráfica 2



Distancia de un punto a una recta

Distancia de un punto a una recta

1. El vector director de la recta es el vector normal del plano perpendicular a ella por A
2. Construimos el plano con el vector y el punto
3. Intersecamos el plano y la recta. El punto resultante es el de mínima distancia
4. Calculamos la distancia de A a B

distanciaAB = 3.54

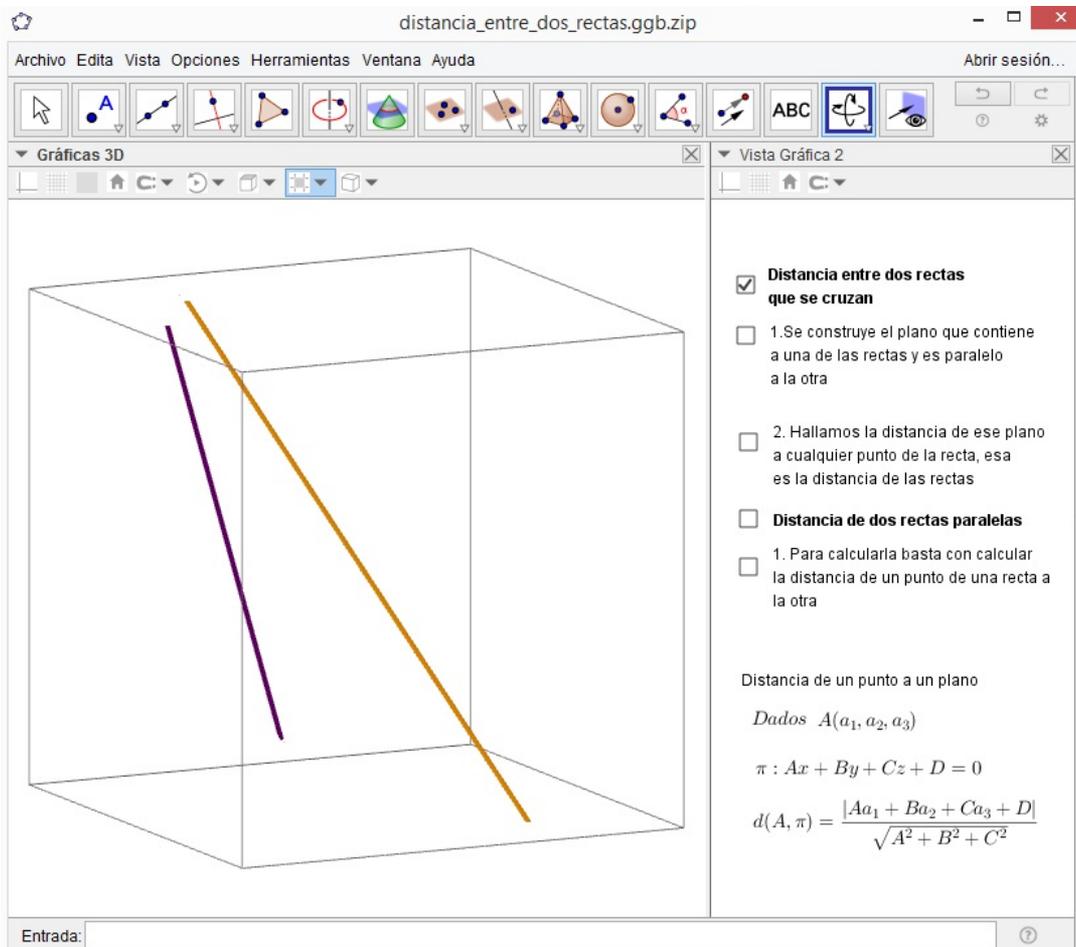
Entrada:

Distancia entre dos rectas

distancia_entre_dos_rectas.ggb.zip

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda Abrir sesión...

Gráficas 3D Vista Gráfica 2



Distancia entre dos rectas que se cruzan

1. Se construye el plano que contiene a una de las rectas y es paralelo a la otra

2. Hallamos la distancia de ese plano a cualquier punto de la recta, esa es la distancia de las rectas

Distancia de dos rectas paralelas

1. Para calcularla basta con calcular la distancia de un punto de una recta a la otra

Distancia de un punto a un plano

Dados $A(a_1, a_2, a_3)$

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$d(A, \pi) = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Entrada:

2. PROYECCIONES ORTOGONALES.

Las siguientes construcciones tratan sobre las proyecciones ortogonales de puntos.

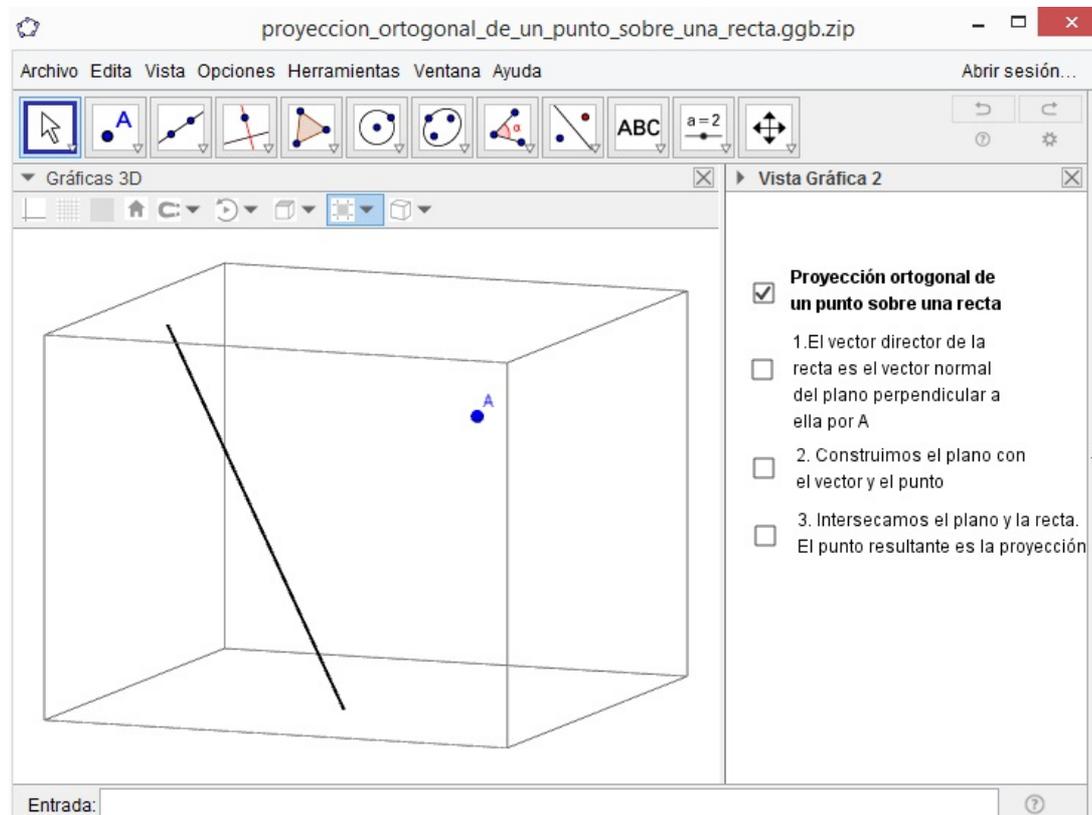
Pincha sobre las imágenes, descárgalas y abre para visualizar estos ficheros.

Proyección Ortogonal de un Punto Sobre una Recta

proyeccion_ortogonal_de_un_punto_sobre_una_recta.ggb.zip

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda Abrir sesión...

Gráficas 3D Vista Gráfica 2



Proyección ortogonal de un punto sobre una recta

1. El vector director de la recta es el vector normal del plano perpendicular a ella por A

2. Construimos el plano con el vector y el punto

3. Intersecamos el plano y la recta. El punto resultante es la proyección

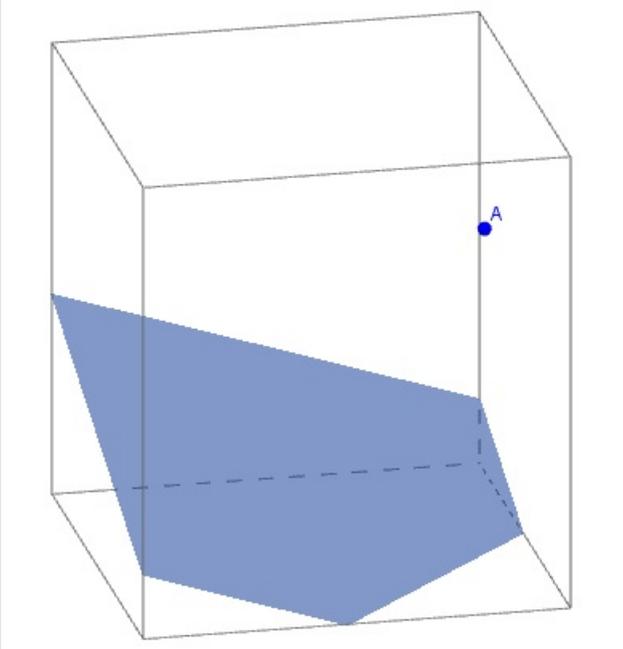
Entrada:

Proyección Ortogonal de un Punto Sobre un Plano

proyeccion_punto_sobre_plano.ggb.zip

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda Abrir sesión...

Gráficas 3D Vista Gráfica 2



Proyección ortogonal de un punto sobre un plano

- 1. Tomamos el vector normal al plano
- 2. Construimos la recta que pasa por el punto A y cuyo vector de dirección es el normal del plano
- 3. Intersecamos el plano y la recta. El punto resultante es la proyección.

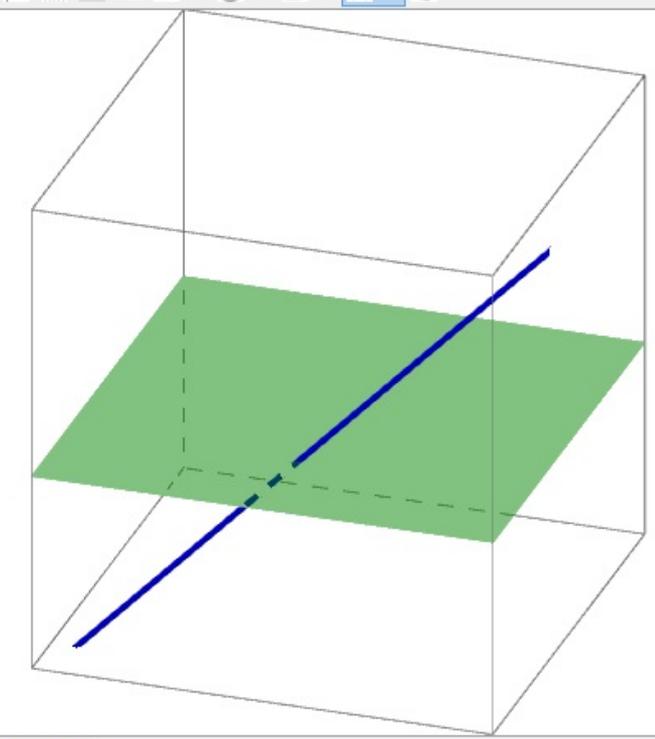
Entrada: ?

Proyección Ortogonal de una Recta sobre un Plano

proyeccion_ortogonal_de_una_recta_sobre_un_plano.ggb.zip

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda Abrir sesión...

Gráficas 3D Vista Gráfica 2



Proyección de una recta sobre un plano

- 1. Tomamos el vector director de la recta y el normal del plano
- 2. Con un punto de la recta y los dos vectores hallados anteriormente construimos un segundo plano
- 3. La intersección de los dos planos es la recta proyección

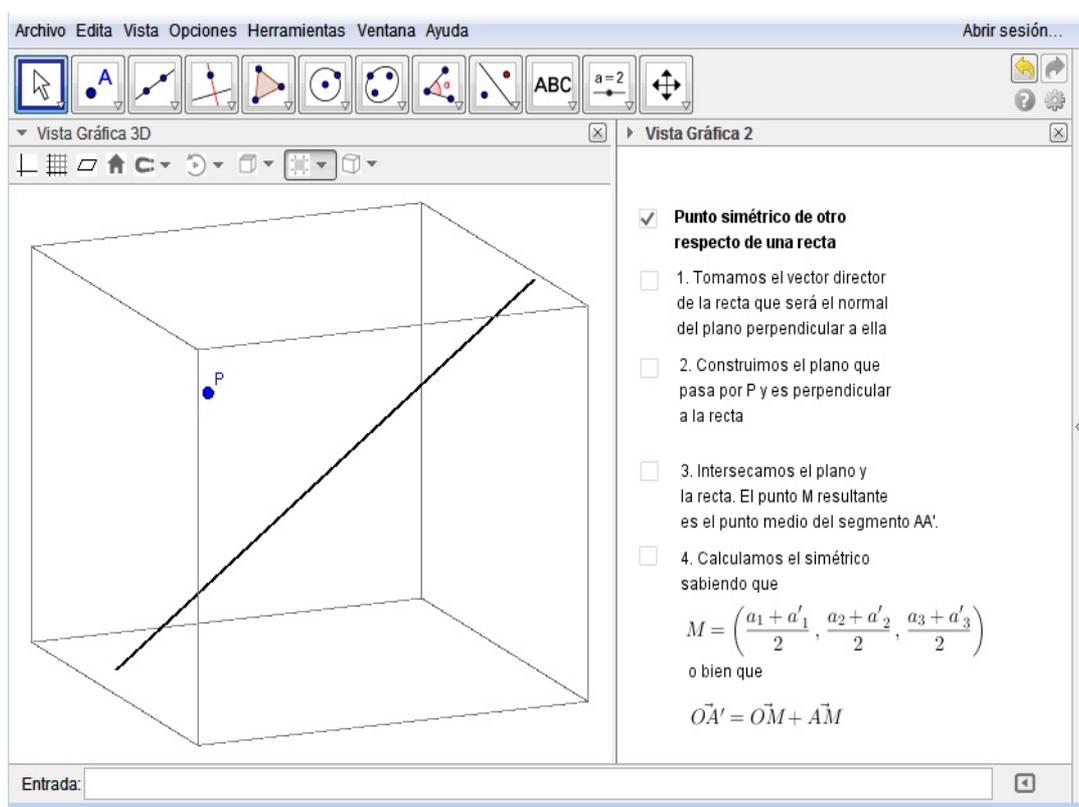
Entrada: ?

3. PUNTOS SIMÉTRICOS.

En las siguientes construcciones encontramos la obtención de los simétricos de un punto en el espacio.

Pincha sobre las imágenes, descárgalas y abre para visualizar estos ficheros.

Simétrico de un Punto Respecto una Recta



Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda Abrir sesión...

Vista Gráfica 3D Vista Gráfica 2

Punto simétrico de otro respecto de una recta

1. Tomamos el vector director de la recta que será el normal del plano perpendicular a ella

2. Construimos el plano que pasa por P y es perpendicular a la recta

3. Intersecamos el plano y la recta. El punto M resultante es el punto medio del segmento AA'.

4. Calculamos el simétrico sabiendo que

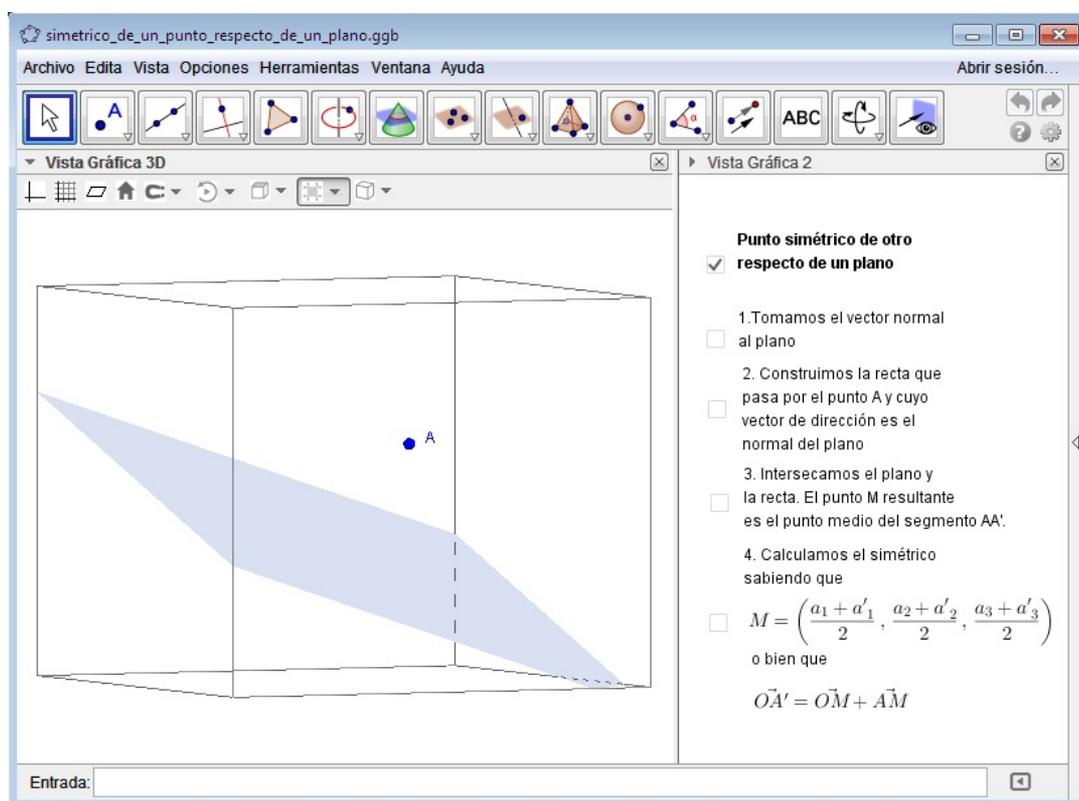
$$M = \left(\frac{a_1 + a'_1}{2}, \frac{a_2 + a'_2}{2}, \frac{a_3 + a'_3}{2} \right)$$

o bien que

$$\vec{OA'} = \vec{OM} + \vec{AM}$$

Entrada:

Simétrico de un Punto Respecto un Plano



simetrico_de_un_punto_respecto_de_un_plano.ggb Abrir sesión...

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda

Vista Gráfica 3D Vista Gráfica 2

Punto simétrico de otro respecto de un plano

1. Tomamos el vector normal al plano

2. Construimos la recta que pasa por el punto A y cuyo vector de dirección es el normal del plano

3. Intersecamos el plano y la recta. El punto M resultante es el punto medio del segmento AA'.

4. Calculamos el simétrico sabiendo que

$$M = \left(\frac{a_1 + a'_1}{2}, \frac{a_2 + a'_2}{2}, \frac{a_3 + a'_3}{2} \right)$$

o bien que

$$\vec{OA'} = \vec{OM} + \vec{AM}$$

Entrada:

Las actividades de este apartado han sido realizadas por Miguel Pino Mejías