

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN PRIMARIA

JOSÉ RAMÓN GREGORIO GUIRLES (*)

1. CONSIDERACIONES GENERALES

Resolver problemas es el objetivo central de las matemáticas. En esto, hace tiempo que todos estamos de acuerdo. Pero la resolución de problemas no es una actividad sencilla, y requiere paciencia y sistematización en su tratamiento didáctico. Algunos indicadores de complejidad con implicaciones didácticas son los siguientes:

- Número de frases empleadas.
- Longitud y complejidad de las frases.
- Complejidad de las palabras.
- Verbos que utilizamos.
- Orden de las situaciones y acciones que tienen lugar. *Lenguaje consistente y lenguaje congruente.*
- Operaciones a realizar.
- Nivel de exigencia en la estructura matemática del problema.
- Relación con la experiencia de los alumnos/as.
- Tamaño de los números.
- Decodificación matemática.

La cuestión crítica es, ¿cómo poder conseguir que nuestros alumnos resuelvan de manera satisfactoria problemas sencillos de la vida cotidiana y otros no tan cotidianos? Para responder a esta pregunta antes debemos plantearnos de manera analítica que, en la práctica, resolver un problema supone cuatro tipos de cuestiones diferentes.

1.1. Comprensión lingüística

Resolver un problema supone, en primer, lugar entender el mensaje y las palabras con las que está enunciado. Es por tanto un problema de "comprensión lingüística", tanto si es un enunciado oral como si lo es escrito.

Los niños de primer ciclo están todavía aprendiendo a leer y escribir, lo que supone una falta de dominio claro sobre la comprensión lectora. A ello debemos añadir que su capacidad de comprensión oral es también limitada, y que está muy condicionada por el grado de sencillez de las estructuras lingüísticas utilizadas: longitud de las frases, número de frases empleadas, complejidad de las palabras y orden de las situaciones y acciones que tienen lugar.

Ello implica que en primer ciclo de Primaria (y con alumnos/as con dificultades para la comprensión escrita), es muy importante trabajar la comprensión y resolución a través de enunciados orales de problemas, a través de dibujos, gráficos, escaparates... Además, deberemos cuidar que los textos sean cortos, que las palabras sean conocidas por los alumnos/as y que, al principio, la redacción sea sencilla y lineal.

(*) Asesor de la Etapa Infantil-Primaria del Berritzegune de Sestao.

En este sentido, parece importante hacer un trabajo específico de comprensión oral y escrita referida a los “textos pequeños” habituales que aparecen en los problemas matemáticos. Hablamos de comprensión intensiva y atenta.

1.2. COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

Resolver un problema supone, además, asociar una determinada acción lingüística con una operación matemática a realizar (*comprensión matemática*).

Este proceso de codificación matemática está condicionado por los verbos que utilizamos, las operaciones a realizar y el nivel de exigencia en la estructura matemática del problema (si está al alcance de la capacidad mental de los alumnos).

1.2.1. Consejos para proponer problemas

Teniendo en cuenta que la resolución de problemas no es una actividad sencilla, que requiere paciencia y sistematización en su tratamiento didáctico, procuraremos:

- Preocuparnos, en primer lugar, de que los problemas planteados estén relacionados con la experiencia de los alumnos/as y de que comprendan las situaciones y conceptos utilizados en ellos. De no ser así, estas dificultades cognitivas y experienciales harán muy difícil que sean capaces de comprender y resolver el problema.
- Trabajar al principio con problemas de una sola operación. Los de dos operaciones se pueden empezar a trabajar a partir del 2º ciclo (empezando con problemas encadenados).
- Utilizar al principio una gama muy limitada de verbos a los que asociar una operación matemática: añadir (+), quitar (-), repetir ... (x), repartir (:).
- Utilizar una estructura temporal y conceptual simple (congruente con la del alumno): tres frases, una para describir la situación inicial, otra para decir la acción (que esconde la operación matemática a realizar), y otra para la pregunta (situación final).
- Tener en cuenta si el lenguaje del problema es congruente con su resolución. Estos son los primeros a trabajar. Los de lenguaje no congruente son más difíciles y exigen una conceptualización matemática previa.

Los problemas que utilizan un lenguaje congruente son aquellos en lo que *lo que parece que hay que hacer y la operación a realizar* coinciden.

Jokin tiene 9 euros. Le dan 6 euros. ¿Cuánto dinero tiene ahora?

Elena tiene 9 euros. Pierde 4. ¿cuánto dinero tiene ahora?

Alaitz tiene 9 euros. Pierde dinero y ahora tiene 5 euros. ¿Cuánto ha perdido?

Las situaciones problemáticas que utilizan un lenguaje no congruente son aquellos en lo que *lo que parece que hay que hacer y la operación a realizar* no coinciden (parece que las palabras indican que hay que sumar, pero hay que restar). Estos problemas resultan muy difíciles de resolver para los alumnos/as del primer ciclo.

Sara tiene 9 euros. Su tío le da dinero. Si ahora tiene 15, ¿cuánto dinero le ha dado su tío?

A Kepa su padre le ha dado 6 euros. Si ahora tiene 15, ¿cuánto dinero tenía antes?

María ha perdido 4 euros. Si todavía le quedan 8, ¿cuánto tenía antes de perderlos?

- Tener en cuenta el tamaño de los números que utilizamos en los problemas y las diferentes ayudas para resolverlo. Los problemas con números pequeños tienen una menor dificultad de resolución, porque se pueden resolver mediante manipulación con fichas, dedos, representación en la recta numérica y/o cálculo mental. En el proceso de matematización y de creación de modelos de resolución, es conveniente trabajar estos problemas en primer lugar.

Los problemas con números grandes exigen una conceptualización de la situación problemática y las ayudas para la resolución son menores: los alumnos/as deben decidir el tipo de operación a realizar, sin que en la mayoría de las ocasiones la manipulación con fichas, dedos o cálculos mentales sirvan de ayuda. En el primer ciclo de primaria el número de problemas de este tipo que los alumnos/as pueden resolver es más limitado.

Es importante que al comenzar a resolver cada uno de los tipos de problemas lo hagamos con números pequeños, utilizando fichas, dibujos, dedos ... para representar el problema, hablar y decidir que operación matemática lleva asociada. Hay que ser muy cuidadoso con estos primeros pasos que están relacionados con la comprensión. Más adelante podremos pedirles que decidan directamente la operación a realizar y la resolución mediante cálculo mental. Así mismo, poco a poco podremos ir utilizando números más grandes pero manejables mentalmente (10, 20, 50, 200, 500, 3.000, ...), y números grandes.

1.2.2. Avanzar en la comprensión

La preocupación inicial de los profesores/as debe ser el garantizar que este proceso de comprensión tenga unos resultados satisfactorios. Si los alumnos/as no comprenden el texto escuchado o leído, si no interpretan correctamente la relación entre los datos y la pregunta, si no hay una buena codificación matemática, es imposible que lo puedan "explicar a su manera", ni que entiendan lo que se les pide, ni por supuesto que lo puedan resolver con posibilidades de éxito (salvo las del azar).

Poco a poco podremos ir evolucionando en el planteamiento de los problemas⁽¹⁾:

- Ampliando el campo semántico y el vocabulario de verbos que puedan asociar a determinadas operaciones matemáticas (comprar, unir, gastar, ...).
- Empezando a cambiar el orden temporal de las frases: colocar la pregunta en medio, colocarla al principio, ...

Cuando la pregunta hace referencia a la situación inicial estamos hablando de problemas de razonamiento para los que se necesita tener capacidad de pensar hacia atrás y ver el problema en las dos direcciones (pensamiento reversible). Este tipo de problemas se pueden trabajar a partir del 2º ciclo.

- Introduciendo una redacción del problema más libre, y reconociendo que determinados verbos y expresiones (más, menos,...), en función del contexto, pueden implicar una operación o la contraria. Problemas de lenguaje no congruente.

El trabajo de codificación matemática se ve francamente favorecido cuando ellos tienen también que hacer el proceso contrario (decodificar): contar historias y crear problemas. Por ello, otra alternativa que tenemos desde el principio, es la de que ellos "con sus palabras" discutan e inventen problemas, bien libremente o bien a partir de situaciones problemáticas incompletas que nosotros les planteemos (a partir de datos numéricos, operaciones, soluciones ...).

Si como decía Piaget el conocimiento lógico-matemático es establecer relaciones y esto es un acto mental de cada individuo, el objetivo de estas situaciones es discutir entre todos esas relaciones que tienen lugar dentro del problema (el enunciado, los datos, los que se pregunta, la solución del problema, los datos que faltan, o los datos que sobran...), para que cada uno pueda construir personal y socialmente los elementos del problema, sus conexiones, ...

Nuestra preocupación como profesores deber ser ofrecer una amplia gama de este tipo situaciones problemáticas incompletas o de invención, que permitan su discusión en grupo, la formulación de hipótesis de resolución y la construcción del conocimiento matemático.

Esta manera de trabajar la resolución de problemas, nos acerca a otra visión complementaria, e igualmente importante: *La Resolución de Problemas como método de trabajo*. Esto implica, en el quehacer matemático diario, animar a los alumnos a explorar, especular, comprobar, buscar sentido y desarrollar estrategias personales para resolver todo tipo de cuestiones matemáticas y, evidentemente, plantear las actividades adecuadas (investigaciones y proyectos matemáticos) para que así lo puedan hacer, fomentando el diálogo, la especulación y el llegar a acuerdos y conclusiones en grupo.

1.3. Resolución

Resolver un problema supone, disponer de las habilidades matemáticas necesarias para buscar una solución, a través de algún determinado cálculo (*Resolución*). Lo que implica la toma de decisión sobre la manera en que haremos el cálculo: cálculo mental, cálculo con lápiz y papel (algoritmos), o calculadora. La decisión no es sólo una cuestión de números pequeños o grandes, sino también de variable didáctica (¿qué queremos trabajar en cada caso?). La primera implicación didáctica de esto, es que podemos trabajar la resolución de problemas desde el principio, sin necesidad de que los alumnos/as tengan que dominar los algoritmos de las operaciones para hacerlo. También podemos plantear y trabajar la creación de problemas por parte de los alumnos/as, resolviendo a través del cálculo mental y/o la calculadora.

1.4. INTERPRETACIÓN

Resolver un problema supone interpretar la solución, puesto que no siempre el resultado numérico de aplicar una operación es la solución del problema.

Es más, y a su debido tiempo, deberemos buscar intencionadamente situaciones en las que el resultado de la operación no resuelva el problema, para poder discutir sobre el significado y sentido de la operación y sobre la contextualización del problema. Es pues importante tener una amplia variedad de problemas en diversos formatos.

Conclusiones iniciales. Lo importante debe ser:

- Centrarse en la *Comprensión* de un determinado problema desde múltiples puntos de vista (mejor que abarcar el mayor número de problemas que sea posible).
- Priorizar siempre la comprensión de significados matemáticos antes de proceder algorítmicamente con lápiz y papel.
- Plantear desde el principio la modificación, corrección y creación de problemas por parte de los alumnos/as.
- Alternar problemas de diferentes tipos y formatos, de forma que no se hagan mecánicamente (como cuando se hacen todos de suma, de datos completos...).
- Trabajar primero los problemas orales y con cálculo mental y calculadora.

2. PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE DIFERENTES TIPOS

Podemos reunir diferentes criterios para crear colecciones de problemas⁽²⁾ que nos valgan a nosotros y a nuestros alumnos y alumnas. Criterios a tener en cuenta:

- La dificultad conceptual de los problemas y operaciones a realizar: deberemos definir los diferentes tipos de problemas y empezar por los más sencillos.
- Que se pueden plantear oralmente o por escrito.
- El tamaño de los números y su forma de resolución. Según los números que empleamos, distinguimos 3 niveles de problemas:

- problemas con números pequeños (los de las tablas de sumas, multiplicaciones...). Resolución a través de cálculo mental (o manipulación, dedos, ...).
- problemas con números medianos: decenas, centenas y millares exactos. Cálculo mental reflexivo: para resolver bien con calculadora (al principio), bien (luego) mediante cálculo mental.
- problemas con números grandes. Resolver con calculadora o mediante lápiz y papel.
- Que los problemas los plantee el profesor o que los inventen los alumnos.
- Variaciones de todo tipo de problemas:
 - variaciones en la redacción del texto y en la utilización de verbos y estructuras semánticas.
 - actividades de creación de preguntas, enunciados, problemas ...
 - problema con datos incompletos y con los datos completos, con datos necesarios y otros con datos innecesarios, problemas con una solución, con variadas soluciones, o sin solución.
 - problemas gráficos, de escaparates, ...
- Que los problemas sean proyectos matemáticos.

3. PROBLEMAS SEGÚN SU DIFICULTAD CONCEPTUAL

Es importante tener en cuenta la tipología y dificultad de los problemas⁽³⁾, para poder trabajarlos y adecuarlos a un ciclo u otro de Primaria. El ciclo donde trabajarlo es orientativo, y hace referencia a problemas planteados con números grandes, para cuya resolución es necesario un alto grado de comprensión y matematización de la resolución (con ellos no sirve el conteo ni la representación con fichas).

3.1. PROBLEMAS DE SUMAS Y RESTAS

PROBLEMAS DE CAMBIO

	Problemas	Lenguaje	Ciclo
1	Sara tiene 9 euros. Le dan 6 más. ¿Cuánto dinero tiene ahora?	Congruente	1º
2	Kepa tiene 9 euros. Pierde 4. ¿cuánto dinero tiene ahora?	Congruente	1º
3	Ane tiene 9 euros. Su tío le da dinero. Si ahora tiene 15, ¿cuánto dinero le ha dado su tío?	No congruente	2º
4	Pedro tiene 9 euros. Pierde dinero y ahora tiene 5 euros. ¿Cuánto ha perdido?	Congruente	1º
5	A Lola su padre le ha dado 6 euros. Si ahora tiene 15, ¿cuánto dinero tenía antes?	No congruente	2º
6	Txema ha perdido 4 euros. Si todavía le quedan 8, ¿cuánto tenía antes de perderlos?	No congruente	2º

PROBLEMAS DE COMBINACIÓN

	Problemas	Lenguaje	Ciclo
1	En la granja hay 9 gallinas y 6 gallos. ¿Cuántas aves hay?	Congruente	1º
2	En el estuche de clase tenemos 15 bolis entre azules y rojos. Si 6 son rojos, ¿cuántas son azules?	Congruente	1º

PROBLEMAS DE COMPARACIÓN

	Problemas	Lenguaje	Ciclo
1	Bea tiene 9 euros. Jokin tiene 4. ¿Cuántos euros más tiene Bea?	No congruente	1º - 2º
2	Sara tiene 9 euros. Pilar tiene 4. ¿Cuántos euros menos tiene Pilar?	Congruente	1º
3	Jon tiene 9 euros. Alaitz tiene 6 euros más que Jon. ¿Cuántos euros tiene Alaitz?	Congruente	1º
4	Albert tiene 9 euros. Toni tiene 4 euros menos que Albert. ¿Cuántos euros tiene Toni?	Congruente	1º
5	Ana tiene 9 euros. Tiene 5 euros más que Javier. ¿Cuántos euros tiene Javier?	No congruente	2º - 3º
6	Xavi tiene 9 euros. Tiene 5 euros menos que Iraia. ¿Cuántos euros tiene Iraia?	No congruente	2º - 3º

Son los problemas más difíciles por la comprensión lingüística. Las propias palabras “más” y “menos” son de difícil comprensión (la primera más utilizada que la segunda). En los primeros cursos no se entiende bien la reversibilidad de las expresiones: “Yo tengo 5 euros más que tú. Tú tienes 5 euros menos que yo”.

PROBLEMAS DE IGUALACIÓN

	Problemas	Lenguaje	Ciclo
1	Miguel tiene 9 euros. Conchi tiene 4. ¿Cuántos euros tiene perder Miguel para que le queden los mismos que a Conchi?	Congruente	1º
2	Sara tiene 9 euros. Jokin tiene 4. ¿Cuántos euros le tienen que dar a Jokin para tener los mismos que a Sara?	No congruente	2º

3	Fernan tiene 9 euros. Si a Leire le dan 5 euros más, tiene el mismo dinero que Fernan. ¿Cuánto dinero tiene Leire?	No congruente	2º
4	Montse tiene 9 euros. Si Juan perdiera 5 euros le quedaría el mismo dinero que a Montse. ¿Cuánto dinero tiene Juan?	No congruente	3º
5	Marije tiene 9 euros. Si le dieran 5 euros tendría el mismo dinero que Xabi. ¿Cuánto dinero tiene Xabi?	Congruente	1º
6	Ascen tiene 9 euros. Si perdiera 5 euros tendría el mismo dinero que Maite. ¿Cuánto dinero tiene Maite?	Congruente	1º

3.2. PROBLEMAS DE MULTIPLICAR Y DIVIDIR

PROBLEMAS DE ISOMORFISMO DE MEDIDAS

	Problemas	Lenguaje	Ciclo
1	En cada hoja del álbum puedo pegar 4 fotos. Si el álbum tiene 10 hojas, ¿cuántas fotos se pueden pegar en él?	Congruente	2º
2	Un álbum de fotos tiene 60 fotos. El álbum tiene 10 páginas. Si en cada página hay el mismo número de fotos, ¿cuántas fotos hay en cada página?	Congruente	2º
3	Un álbum tiene 60 fotos. Si en cada página del álbum hay 4 fotos, ¿cuántas páginas tiene el álbum?	Congruente	2º

PROBLEMAS DE ESCALARES

Grandes (... más veces que ...)

Son difíciles, poco trabajados en las escuelas (salvo los referidos a dobles y triples); no reflejan situaciones habituales de la vida de los alumnos/as.

	Problemas	Lenguaje	Ciclo
1	Imanol tiene 9 euros. Amaia tiene 3 veces más dinero que él. ¿Cuánto dinero tiene Amaia?	Congruente	2º
2	Miren tiene 30 euros, y tiene 5 veces más dinero que Nagore. ¿Cuánto dinero tiene Nagore?	No congruente	3º
3	Asier tiene 36 euros. Josu tiene 9 euros. ¿Cuántas veces más dinero tiene Asier que Josu?	No congruente	3º

Pequeños (... menos veces que ...)

Son más difíciles, más raros y menos trabajados en las escuelas (salvo los referidos a mitades y tercios); tampoco reflejan situaciones habituales de la vida de los alumnos/as.

	Problemas	Lenguaje	Ciclo
4	Patricia tiene 9 euros, y tiene 3 veces menos dinero que Hassan. ¿Cuánto dinero tiene Hassan?	No congruente	2º
5	Nashtia tiene 30 euros. Diego tiene 5 veces menos dinero que Nashtia ¿Cuánto dinero tiene Diego?	Congruente	3º
6	Esteban tiene 36 euros. Carolina tiene 9 euros. ¿Cuántas veces menos dinero tiene Esteban que Carolina?	Congruente	3º

Consideraciones:

- Los problemas de escalares grandes son más sencillos que los de escalares pequeños. Expresiones como “3 veces más” y “3 veces menos” generan confusiones lingüísticas (sobre todo la última).
- Crear situaciones didácticas para diferenciar “ 5 veces más euros” y “5 veces menos euros” de las expresiones de los problemas aditivos “5 euros más que ...”, “5 euros menos que ...”.
- Tener en cuenta que las expresiones “veces más” y “veces menos” no siempre indican la operación que parece (lenguaje congruente o incongruente). Los alumnos tienden a multiplicar si aparece “veces más”, y a dividir si aparece “veces menos”.
- Otro elemento que influye en la dificultad de estos problemas es que no tienen una acción temporal (son problemas de texto estático).

PROBLEMAS DE PRODUCTO CARTESIANO

Son problemas difíciles y raramente aparecen en los libros de texto. Sin embargo reflejan situaciones cotidianas en la vida de los alumnos/as.

	Problemas	Lenguaje	Ciclo
1	En el menú de un restaurante hay 3 primeros platos y 3 segundos platos. ¿Cuántas comidas distintas se pueden comer?	-	3º
2	¿De cuántas formas distintas se pueden combinar 4 pantalones y 3 nikis?	-	3º
3	Un rectángulo tiene 5 m de largo y 4 m de ancho. ¿Cuál es su área?	-	3º
4	En un restaurante se puede comer de 15 formas distintas. Si hay 3 primeros platos, ¿cuántos segundos platos hay en el menú?	-	3º

5	Con pantalones y jerséis me puedo vestir de 20 formas diferentes. Si tengo 5 pantalones, ¿cuántos jerséis tengo?	-	3°
6	Un rectángulo tiene 24 m ² de área. Si un lado mide 6 m, ¿cuánto mide el otro?	-	3°

4. PROBLEMAS SEGÚN SEAN PLANTEADOS ORALMENTE O POR ESCRITO, SU FORMA DE RESOLUCIÓN Y EL TAMAÑO DE LOS NÚMEROS (TODOS ELLOS PLANTEADOS POR EL PROFESOR/A)

PROBLEMAS INVENTADOS POR EL PROFESOR/A: definición del trabajo matemático que se realiza en función de quién lee el problema, el tamaño de los números que aparecen y la forma en que lo resolvemos.

¿Quién lee?	¿Tamaño de los números?	¿Cómo los resolvemos?		
		Cálculo mental	Calculadora	Lápiz y papel
Leídos por el profesor/a	Con nº pequeños	Comprensión matemática Conteo	Comprensión matemática	-
	Con nº medianos	Comprensión matemática	Comprensión matemática	-
	Con nº grandes	-	Comprensión matemática	Comprensión matemática Resolución algorítmica
Leídos por el alumno/a	Con nº pequeños	Comprensión lingüística y C.M. / Conteo	Comprensión lingüística y C.M.	-
	Con nº medianos	Comprensión lingüística y C.M.	Comprensión lingüística y C.M.	
	Con nº grandes	-	Comprensión lingüística y C.M.	C.L., C.M. R.A.

CM: codificación matemática (comprensión) CL: comprensión lingüística R.A.: resolución algorítmica

Los problemas que son leídos en voz alta por el profesor/a tienen en común que obvian la lectura por parte de los alumnos/as, y permiten trabajar la comprensión o codificación matemática en estado puro, independientemente del nivel de comprensión lingüística escrita que tengan los alumnos/as. Estos problemas serían los primeros a trabajar, y los más numerosos con los alumnos/as de los cursos bajos y/o de necesidades educativas especiales o con retraso escolar.

Los problemas leídos por los propios alumnos/as, además de trabajar la comprensión matemática, tienen la dificultad añadida de la comprensión lingüística de los textos de los problemas. Es importante hacer un trabajo paciente en torno a la comprensión escrita de los problemas, con “comentarios de texto” incluidos (¿qué dice?, ¿qué significa? ...), cerciorándonos de que todos entendemos lo mismo.

Resolver problemas utilizando el cálculo mental⁽⁴⁾, y la calculadora permite centrarse en la comprensión matemática y resolver muchos problemas con agilidad. Además, permite al profesor conocer con rapidez los alumnos que tienen dificultades de comprensión (si saben llegar a la solución significa que han comprendido el problema), y a poner en común esas dificultades, hablarlas y avanzar.

Con frecuencia muchos niños/as que utilizan el conteo directo con dedos para llegar a la solución, no entienden el problema, de manera que cuando se tienen que enfrentar a uno similar pero con números grandes se pierden y no llegan a la solución. En estos casos, la utilización de la calculadora les “obliga” a explicitar una operación matemática y les facilita la comprensión y conceptualización del problema (si es de sumar, de restar, de multiplicar, ...).

En la práctica diaria podemos utilizar colecciones de problemas para leer en clase, y para ser resueltos bien mentalmente o con calculadora. La manera de hacerlo es muy sencilla:

- Se leen de 3 a 5 problemas por sesión.
- A cada alumno/a se le da una hoja/ficha en la que anotar las respuestas.
- Se lee en voz alta el primer problema una vez, y se repite otra vez más (si fuera necesario una tercera vez también se puede hacer).
- Entonces cada alumno/a busca mentalmente la solución (o hace la operación con la calculadora), y escribe la solución al problema número 1.
- El profesor pasa a leer el segundo problema ...
- ...
- Cuando se acaba se recogen las respuestas de cada alumno/a.

Cuando se corrigen las respuestas es fácil darse cuenta de quién tiene problemas de comprensión, de problemas fáciles para todos/as, de problemas que casi nadie ha entendido, ... A partir de ahí, podemos intervenir hablando individualmente con algunos alumnos/as o con toda la clase (qué se ha entendido, por qué se ha puesto esa respuesta, ...), compartir interpretaciones y negociar significados. Se puede, además, llevar un registro de las respuestas de cada alumno/a.

Las series de problemas que se resuelven mentalmente o con calculadora son una poderosa herramienta para favorecer la comprensión matemática y que los alumnos/as aprendan a resolver problemas. David Barba y Lluís Segarra (*El Quinzet*), y *Mare Nostrum* tienen buenas colecciones de problemas de este tipo.

La resolución de problemas con lápiz y papel, utilizando los algoritmos de las operaciones, tienen menos importancia (y sólo con números que no se pueden resolver con cálculo mental). En realidad, la única variable didáctica que se añade es la de practicar los algoritmos de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Y debemos recordar que cuando queramos trabajar la resolución de problemas lo importante no es hacer algoritmos⁽⁵⁾ (“cuentas”), sino crecer en la comprensión matemática.

5. PROBLEMAS MODIFICADOS, CORREGIDOS Y/O INVENTADOS POR LOS ALUMNOS/AS

Son situaciones problemáticas que deberemos trabajar desde el principio, y que pretenden atajar desde el origen los errores más comunes de comprensión y de resolución que se dan entre los alumnos/as a la hora de resolver problemas⁽⁶⁾.

También podemos trabajarlos oralmente y por escrito: los problemas se crean por parejas o grupo y se comunican a los demás (los orales se pueden grabar en un casete, y los escritos se pueden fotocopiar). Trabajar la modificación, corrección e invención de problemas por parte de los alumnos resulta una estrategia muy potente para avanzar en la comprensión lingüística y matemática, base de la resolución matemática⁽⁷⁾.

Algunos ejemplos de modelos⁽⁸⁾ y tipos de problemas para trabajar en el primer ciclo de Educación Primaria, son los siguientes.

5.1. SITUACIONES ABIERTAS Y VARIADAS

Situaciones problemáticas abiertas, con datos insuficientes, con varias soluciones, de lógica..., creadas para discutir y generar ideas (los números no son lo importante):

Problemas con los datos insuficientes

- Un tabernero tenía 100 botellas de vino y en un solo día vendió 60. ¿Cuánto dinero habrá ganado?
- Para pagar 12 caramelos entrego una moneda de 2 euros. ¿Cuánto me devolverán?
- Si 5 amigos van al cine y uno paga las entradas de todos con un billete de 20 euros. ¿Cuánto le devolverán?
- Tenemos que ir a Bilbao y el viaje nos cuesta a cada uno 1,10 euros. ¿Cuánto pagaremos entre todos?
- "Ayer leí las 5 primeras páginas de un cuento y hoy lo he acabado. ¿Cuántas páginas tenía el cuento?"
- "Jon tiene monedas de 2 euros y Nadia billetes de cinco euros. ¿Quién tiene más dinero?"

La siguiente actividad, que viene a continuación de que se den cuenta que falta algún dato que hace imposible su resolución, es la de buscar una solución al problema (inventar el dato que falta y resolver). Pueden ser problemas que precedan al planteamiento de otros problemas inventados por ellos/as (los alumnos/as).

Problemas con variadas soluciones

- Si la multiplicación de dos números es 12 ¿cuáles son los números?
- ¿Cómo podemos pagar un juguete que vale 6 euros?
- Tenemos tres billetes de 5 euros, tres de 10 y tres de 20. Si sólo podemos coger tres billetes cada vez ¿qué cantidad de dinero se puede coger?
- ¿La suma de dos números es 20? ¿Cuáles son?

Problemas con datos que no son necesarios para su resolución

- Conchi, que tiene 23 años, ha comprado en una tienda un vestido que le ha costado 44 euros y unos pantalones de 60. ¿Cuánto se ha gastado en total?
- Gontzal tiene 16 coches y Ramón la mitad de coches que Gontzal. Si cada coche cuesta 5 euros, ¿cuánto le han costado los coches a Gontzal?

- Ayer era mi cumpleaños. Mi padre me regaló 2 cuentos y 1 coche. Y mi madre 3 cuentos ¿Cuántos cuentos me regalaron?

De nuevo, resulta muy interesante hablar sobre los datos que sobran, por qué sobran, ... Este tipo de problemas es habitual en la vida cotidiana; lo importante extraer del contexto los que en cada caso particular nos interesan.

Problemas de lógica

- Ayer fue lunes. ¿Qué será pasado mañana?
- Una cinta tiene 10 metros de largo. Cada día se corta un trozo de 1 metro. ¿En cuántos días quedará cortada la cinta en diez trozos?
- Si tiramos diez veces una moneda de 1 euro, ¿cuántas veces sale cara?
- Tenemos un cajón lleno de calcetines blancos y negros. Si lo hacemos sin mirar, ¿cuántos calcetines tendremos que coger para salir a la calle con la seguridad de que iremos con dos calcetines del mismo color?

Situaciones problemáticas abiertas

- Estamos midiendo objetos de clase con la regla. Inventa un problema sobre este tema.
- Dos equipos de fútbol están jugando un partido. Inventa un problema.
- Inventar problemas a partir de fotos o dibujos.

5.2. SITUACIONES PROBLEMÁTICAS QUE AYUDAN A ESTRUCTURAR MENTALMENTE LAS PARTES DEL PROBLEMA Y A RELACIONAR LÓGICAMENTE EL ENUNCIADO, LA PREGUNTA Y LA SOLUCIÓN

Inventar un problema a partir de una solución dada; o de una expresión matemática; o de una operación y con una solución dada; o de unos datos numéricos y una solución

- Inventa un problema cuya solución sea 10 euros.
- Inventa un problema que se resuelva con la operación $8 + 15 =$.
- Inventa un problema que se resuelva con una resta y dé 25.
- Inventa un problema con los datos 100 y 5. La solución es 20.

Inventar una pregunta a partir de un enunciado dado; o de un enunciado y una operación; o de un enunciado y una expresión matemática; o de un enunciado y una solución

- Tengo una pelota de fútbol que me ha costado 18 euros, y un balón de baloncesto que me ha costado 11 euros. ¿...?
- Juan tiene 10 años y Alberto tiene 16 años. ¿...?
- Tengo 15 caramelos. Hay que restar. ¿...?
- Alicia tiene 3 billetes de 5 euros. ¿...? Operación: $5 + 5 + 5$.
- Mikel va al cine con 3 amigos. Si cada entrada cuesta 5 euros. ¿...? Solución: 20 euros.

Inventar un enunciado a partir de una pregunta dada; o de una pregunta y una solución; o de una pregunta y una operación; o de una pregunta dada y el proceso de resolución; o de una pregunta, la solución del problema y datos a elegir

- ¿Cuántas páginas del cuento me quedan todavía por leer?
- ¿Cuánto dinero tendré ahora? Solución: 28 euros.
- ¿Cuántas canicas tengo ahora en la caja? Operación: sumar.
- ¿Cuántos pollos hay en la granja? Proceso: $150 \times 3 = 450$ pollos.

- Cuántos goles metieron los de 2º curso más que los de 1er curso? Solución: 5 goles más. Datos entre los que elegir: 8, 3, 4, 7, 9, 10.

5.3. SITUACIONES PROBLEMÁTICAS QUE AYUDAN A LA AUTOCORRECCIÓN Y A ESTABLECER RELACIONES ENTRE LAS ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, POR MEDIO DE LA TRANSFORMACIÓN DE PROBLEMAS

A partir de un problema ya resuelto, cambiar los datos para que dé otra solución; o cambiar los datos pero que dé la misma solución; o cambiar la información del problema (añadir o eliminar) sin que la solución cambie; o cambiar lo que sea necesario para que el proceso de resolución que se da sea correcto; o cambiar el dato falso que hay (averiguarlo primero), sin cambiar la solución; o cambiar la pregunta del problema, pero sin que cambie la solución; o cambiar el orden de las frases del enunciado, resolver de nuevo y comparar.

- Salgo de casa con 100 euros, y me gasto 40.¿Cuánto dinero me queda?
Solución: $100-40 = 60$ euros.
¿Qué podemos cambiar del problema para que la solución sea 10 euros? ¿Y para que sea 200 euros? Cambia los datos del problema anterior (¿se puede cambiar uno solo?), sin que varía la solución.
- Conchi, que tiene 42 años, se ha gastado 150 euros en un DVD y 250 euros en una televisión.¿Cuánto se ha gastado en total? Solución: 400 euros.
¿Qué podemos cambiar del problema para que la solución sea 1.000 euros? Cambia los datos del problema anterior (¿se puede cambiar uno solo?), sin que varía la solución.

5.4. SITUACIONES DE COMPLETAR PROBLEMAS, QUE AYUDAN A VER LOS PROBLEMAS COMO UN TODO Y DESARROLLAN LA MEMORIA, LA OBSERVACIÓN Y LA CAPACIDAD DE DEMOSTRACIÓN (IR HACIA ATRÁS Y PENSAMIENTO REVERSIBLE)

Componer el enunciado de un problema a partir de todos/algunos de los datos que se ofrecen (y resolver); o completar los datos del enunciado de un problema a partir del proceso de resolución; o completar los datos del enunciado de un problema a partir de la solución de éste.

- Datos: 8, 15, 60, 1500. En botes de caramelos iguales, hay un total de caramelos. ¿Cuántos caramelos hay en cada bote?
- "He comprado bolsas de regalices. En cada bolsa vienen regalices" ¿Cuántos regalices tengo? Proceso: $5 \times 15 = 75$ regalices.
- Ayer hicimos 5 problemas de matemáticas y hoy hemos hecho ¿Cuántos problemas hemos hecho entre ayer y hoy? Solución: 12 problemas.

5.5. SITUACIONES PROBLEMÁTICAS QUE AYUDAN A DESARROLLAR LA ORIGINALIDAD, IMAGINACIÓN Y CREATIVIDAD, Y A REFLEXIONAR SOBRE LA LÓGICA EN EL PROCESO DE LA RESOLUCIÓN

Inventar y resolver un problema con un vocabulario específico dado; con un vocabulario específico y las operaciones a realizar; con un vocabulario específico y la solución dada.

- Enunciado: Tere, euros, Conchi. Pregunta: los dos.
- Enunciado: Txomin, euros, Alberto. Pregunta: más. Operación: resta.
- Enunciado: Txerra, euros, Conchi. Pregunta: veces. Solución: 5 veces más.

5.6. INVENCIÓN DE PROBLEMAS DE MANERA LIBRE (SIN CONDICIONES). LOS PROBLEMAS PUEDEN CORRESPONDER A CUALQUIERA DE LOS TIPOS ANTERIORES QUE HEMOS VISTO, Y PODEMOS ESTABLECER TAMBIÉN DIFERENTES ORIENTACIONES DE TRABAJO

- Primero inventad un problema que sea “muuy” fácil.
- Luego inventad un problema que sea más difícil, pero que lo sepáis resolver.
- Ahora inventad un problema muy difícil. ¿Lo sabéis resolver? ¿Ni con calculadora?

6. PROBLEMAS DE TEXTOS NUMÉRICOS (DE DIVERSOS TIPOS Y FORMATOS), Y RELACIONADOS CON LA VIDA COTIDIANA

Aún podemos ampliar la gama de problemas propuestos para que sean resueltos (e inventados) por los alumnos/as:

- Problemas gráficos de escaparates.
- Problemas de cuadros de doble entrada.
- Problemas de gráficos.

Las dificultades de comprensión y resolución aumentan en la medida que utilizamos más datos y números más grandes. La secuencia orientativa debiera ser similar a la utilizada en los problemas anteriores: primero con números pequeños, luego con unidades exactas y al final con números grandes. He aquí algunos ejemplos.

6.1. PROBLEMAS GRÁFICOS DE ESCAPARATES

Lo interesante es que utilizamos un lenguaje gráfico (fotos, dibujos..) y números (los precios de los productos); no hay texto del problema. Los escaparates son muy fáciles de crear, y a partir de ellos se pueden plantear preguntas y actividades muy variadas.

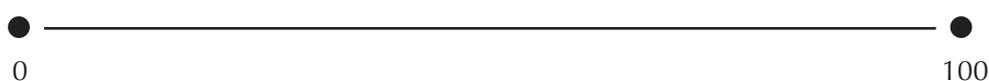


- ¿Cuál es el objeto más caro?
- ¿Cuál es el más barato?
- Ordenar los productos del más caro al más barato.
- Si te compras el balón y el bolígrafo, ¿cuánto te gastarás?
- ¿Con qué billetes y monedas pagarías el libro?

- Te quieres comprar todos los objetos del escaparate. ¿Cuánto dinero necesitas?
- Si tengo 10 euros y compro el balón, ¿cuánto dinero me devolverán?
- ¿Qué es más caro, el libro o el bolígrafo? ¿Cuánto más?
- Con 15 euros, ¿qué te podrías comprar?
- Escribe 3 formas de pagar el libro.
- Si compras 5 balones, ¿cuánto dinero te gastarás?
- Si he pagado una cosa del escaparate con un billete de 50 euros y me han devuelto 12. ¿Cuál era? ¿Cómo lo has hecho?

Otras actividades:

- Comparar cantidades de dos en dos.
- Representar en la recta numérica el número que indica el precio de los objetos.



- Descomponer los números de los precios: $89 = 80 + 9$
- Crear tablas de doble entrada para recoger toda la información:

Nombre del objeto	Precio con números	Precio con letras
1. Reloj	38	Treinta y ocho
2.		
3.		
4.		
5.		

En función de los niveles de competencia numérica, podemos proponerles diferentes tipos de escaparates.



6.2. PROBLEMAS DE INTERPRETACION, UTILIZACION Y CREACION DE CUADROS DE DOBLE ENTRADA

En este caso podemos plantear diferentes tipos de problemas⁽⁹⁾:

1. Interpretación de cuadros de doble entrada. Fíjate bien cómo han subido de precio las cosas del 2002 al 2003 (en euros):

Productos	Precios en 2002	Precios en 2003
Zapatos	21	28
Libro de cuentos	12	15
Ordenador	760	560
Piso	125.000	150.000

A partir de este cuadro de doble entrada podemos plantear diversas preguntas: de lectura e interpretación de los datos que aparecen, otras similares a las de los problemas de escaparates, en relación a la magnitud de los números, en relación a los incrementos que se han producido, preguntas de estimación de otros productos....

2. Siguiendo con un ejemplo similar al anterior podemos tener un problema de rebajas (también se puede hacer a través de escaparates).

Productos	Precios antes de las rebajas	Precios después de las rebajas
Chamarra	35	29
Película de vídeo	19	15
Libro de texto	14	10
Moto vespa	980	900

Las preguntas deber ir dirigidas a la interpretación de la tabla: cuánto antes, cuánto después, que descuento total ha habido en cada producto, cuál se ha rebajado más...

3. El frutero de un pueblo va a Mercabilbao a comprar productos para su tienda. Esta es la factura que le hacen⁽¹⁰⁾:

MERCABILBAO		NºFACTURA: 153.005	
Nombre: Bixente Gartzia Mendiluce			
Empresa: Fruteria GOXO S.L. NIF: 14.654.959-F			
FRUTAS	CANTIDAD	PRECIO/KG	IMPORTE TOTAL
Naranjas	30 kg	2 euros	
Plátanos	15 kg	1 euro	

Manzanas	20 kg	1,50 euros	
Patatas	125	0,50 euros	
TOTAL			

Aquí, de nuevo, las posibilidades de trabajo numérico son muy variadas e interesantes. Es bueno darles tiempo para estudiar la factura (texto numérico), y preguntar por todas las relaciones numéricas:

- ¿Cuál es el producto más caro? ¿Y el más barato?
- ¿Cuánto paga por cada producto en total?
- ¿Cuál será el importe de la factura?
- ¿Cuáles son los dos productos más caros?
- ¿En qué producto se gasta más dinero? ¿Por qué?
- Si tienes 10 euros para comprar fruta, ¿qué comprarías?
- Si compras 2 kg de manzanas y 3 de naranjas, ¿cuánto pagarás?
- Si compro 3 kg de plátanos y pago con un billete de 10 euros, ¿cuánto dinero me devolverán?
- ¿Qué es más caro, el plátano o la naranja. ¿Cuánto más?
- Con 15 euros, ¿qué te podrías comprar?
- He pagado 2 kg de una fruta con un billete de 5 euros y me han devuelto 60 céntimos. ¿Qué fruta era?
- Quieres comprar 1 kg de todas las frutas. ¿Cuánto dinero necesitas? Di varias formas de pagar.

Otras actividades:

- Ordena las frutas de la más cara a la más barata.
- Escribir con número y letra el precio de los productos (cuadro de doble entrada).
- Comparar cantidades de dos en dos.
- Descomponer los kilogramos que compra de cada fruta: $12 = 10 + 2$.

4. En una lavandería han puesto la siguiente lista de precios:

CONCEPTO	LAVAR	PLANCHAR
Pantalón	1,50 euros (250 pts)	2 euros (333 pts)
Falda	1,50 euros (250 pts)	2, 50 euros (416 pts)
Chaqueta	2 euros (333 pts)	3 euros (500 pts)
Abrigo	3 euros (500 pts)	3,50 euros (582 pts)

Podemos trabajar las mismas preguntas y actividades que en el problema anterior del frutero, pero además podemos hacerlo en pesetas trabajando con números más grandes.

5. Problemas de completar cuadros con dinero

Pago con ...	Me devuelven...	PRECIO del objeto
1 billete de 20 euros	2 monedas de 2 euros 1 billete de 5 euros	
1 billete de 10 euros	1 billete de 5 euros 1 moneda de 1 euro	
1 billete de 5 euros 1 moneda de 2 euros	1 moneda de 1 euro	
1 billete de 20 euros 1 billete de 10 euros	1 moneda de 2 euros 1 moneda de 50 céntimos	

6. En el año 1996 Alaitz tiene 16 años, Marta 14 años y Amaia 6 años.

- Completa la tabla.

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Alaitz							16						
Marta							14						
Amaia							6						

- ¿En qué año nació Amaia? ...
- ¿Cuántos años tiene Marta más que Amaia? ...
- ¿Cuántos años tiene Amaia menos que Alaitz? ...
- ¿Cuántos años tendrá Amaia cuando Marta tenga 20 años? ...
- ¿En qué año cumplirá Alaitz 20 años? ...
- ¿Cuántos años tenía Marta cuando nació Amaia? ...
- ¿Cuántos años tendrá Amaia en el año 2010? ... ¿Y tú?
- ¿Cuántos años tenía Marta en 1990? ...

7. Recogida de datos sobre el tiempo atmosférico a lo largo del mes de febrero: si el día es con sol, con nubes o si llueve, la temperatura, si hace viento o no. Esta situación problemática es, en realidad, un proyecto de trabajo.

- Plantearles el problema de la recogida de datos (plantilla). Un Ejemplo de plantilla puede ser este:

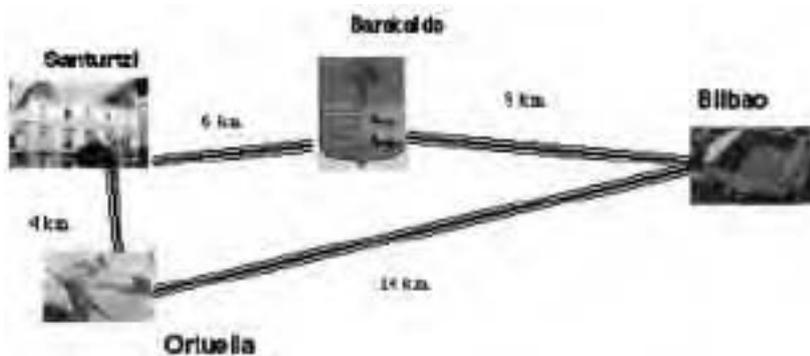
FEBRERO						
DÍA	TIEMPO			TEMPERATURA	VIENTO	
	SOL	NUBES	LLUVIA		SI	NO
Sábado 1		nubes		14 °C		no
Domingo 2						
Lunes 3						
Martes 4						
Miércoles 5						
Jueves 6						
Viernes 7						
Sábado 8						
Domingo 9						
Lunes 10						
Martes 11						
Miércoles 12						
Jueves 13						
Viernes 14						
Sábado 15						
Domingo 16						
Lunes 17						
Martes 18						
.../...						

- Nombrar a distintos responsables para la recogida de datos y hacer grupos para que cada uno recoja sus datos y haga su tabla.
- Acabada la recogida de datos, pasado el mes de febrero, podremos empezar con el trabajo matemático en tratamiento de la información recogida:

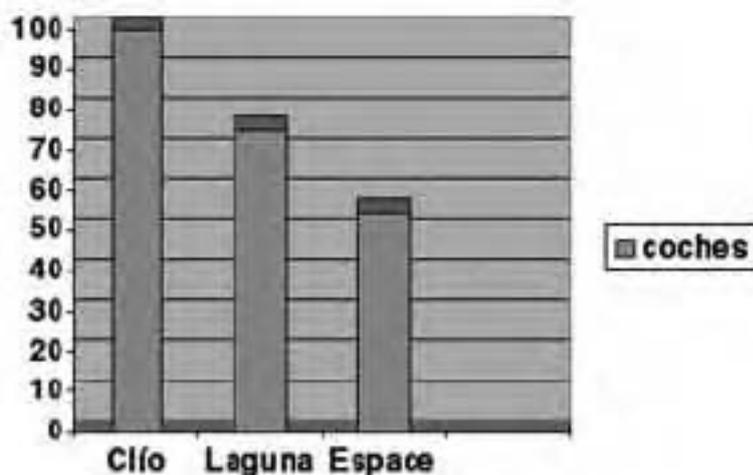
- ¿Qué hizo el día 5? ...
- ¿Cuántos días ha habido sol en todo el mes? ...
- ¿Cuántos días ha habido sol y ha hecho viento? ...
- ¿Cuántos días la temperatura se ha aproximado a 15 ° C.? ...
- ¿En cuántos días la temperatura ha subido de 14 °C? ...
- ¿Cuántos días ha llovido, no ha hecho viento y la temperatura ha sido baja (todo a la vez)? ...
- ¿Crees que, por término medio, ha hecho frío?
- ...

6.3. PROBLEMAS DE INTERPRETACIÓN, UTILIZACIÓN Y CREACIÓN DE GRÁFICOS

1. Observa el “mapa” de estos pueblos



- Interpretación del mapa y datos.
 - ¿Cuántos km hay de Bilbao a Barakaldo?
 - ¿Y de Bilbao a Santurtzi, pasando por Barakaldo?
 - ¿Cuál será el camino más corto para ir de Ortuella a Barakaldo?
 - Inventa alguna pregunta para hacer a tus compañeros/as.
2. Observa este gráfico que representa los coches que ha vendido la marca Renault en el último año en Santurtzi⁽¹¹⁾:

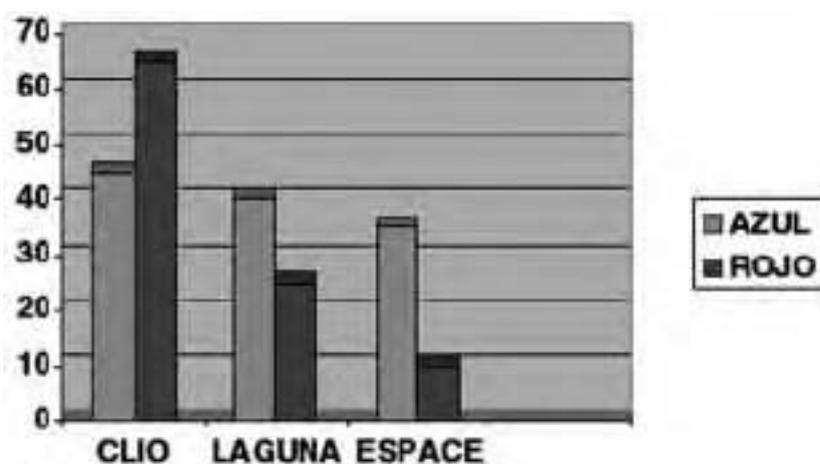


- ¿Entendéis lo que significa?
 - ¿Cuántos Clíos han vendido? ...
 - ¿Cuántos Clíos más que Lagunas han vendido? ...
 - ¿Cuál es el coche menos vendido? ...
 - ¿Cuántos coches han vendido en total? ...
 - ¿Cuántos han vendido entre Lagunas y Espaces? ...
 - ¿Eres capaz de representar estos datos en un cuadro de doble entrada?
 - Ordena los coches del menos vendido al más vendido.
 - Escribir con número y letra el número de ventas de cada coche.
 - Comparar cantidades de dos en dos.
 - Representar en la recta numérica el número que indica el número de coches vendidos.
 - Aproximar el precio que puede tener cada coche.
 - ¿Cuál te gusta más? ¿Cuál te comprarías?
3. Un problema similar a este sería plantear el cuadro de doble entrada con la información de los coches vendidos, hacer todas las actividades arriba mencionadas y luego acabar la actividad construyendo el gráfico de barras de las ventas de los coches.

	R-19	LAGUNA	ESPACE
NÚMERO DE COCHES VENDIDOS	30	75	55

4. Un problema más exigente sería partir de una tabla (o de un cuadro de datos), pero añadiendo una variable más: el color del coche.

Observa esta tabla de barras, en la que aparecen los coches vendidos por Renault en el último año en Portugalete.



En este caso, además de poder realizar todas las actividades anteriores, podremos establecer otro tipos de actividades numéricas, relativas a modelos y colores.

7. PEQUEÑOS PROYECTOS MATEMÁTICOS

Lo básico del trabajo de proyectos es el trabajo en grupo, la decisión de hacer algo, la investigación, su elaboración y la comunicación a los demás. Es un método de trabajo que sirve para dotar de significado y utilidad a los conocimientos matemáticos. No están concebidos como meras actividades de aplicación, sino como herramientas de aprendizajes matemáticos, a través del diálogo, la decisión, la elaboración y la comunicación matemáticas. Debemos tener presente que cuanto más variables de decisión y de actuación dejemos en manos de los alumnos/as más rico será el proyecto (el proyecto se empobrece en la medida que lo convertimos en actividades cerradas que hacen los alumnos/as dirigidos por el profesor/a).

Las situaciones a plantear pueden ser de lo más variadas, y es conveniente que sean ellos los que sugieran la realización de otros proyectos.

7.1. ACTIVIDADES y PROYECTOS

Algunas situaciones que hemos visto anteriormente nos pueden servir para plantearlas. Algunos ejemplos:

- Los escaparates. Podemos poner una lista de precios de comidas en un restaurante y decirles que lo que tienen que hacer es un presupuesto de gasto semanal: menú de cada día, precios por desayuno, comida y cena, presupuesto semanal. Trabajo en grupos, elaboración del presupuesto y comunicación a los demás.
- Las facturas. Con la carta de precios de un restaurante, tienen que ir tres amigos a comer y elegir una comida. Al final tienen que hacer una factura con lo que deben de pagar entre los tres. Comunicación a los demás.
- Los problemas de tratamiento de datos. Podemos proponerles la elaboración de una encuesta sencilla (recogida de datos), sobre la música que nos gusta o sobre cualquier otro tema. Con hacerla entre los de la clase es suficiente.... Cada grupo deberá elaborar su propia encuesta, la organización de los datos y la comunicación a los demás grupos.
- Hacer un presupuesto del valor de las cosas que llevo en la cartera. Trabajo en grupo, organización de la información y presentación del presupuesto a los demás.
- Organizar un campeonato "virtual" de fútbol, baloncesto, balonmano o cualquier otro deporte. Se elige un número de equipos, se organizan las jornadas, partidos y resultados, clasificaciones, organización de la información, cuadros de doble entrada, premios... y comunicación de la información.
- Organizar itinerarios y recorridos por el centro educativo, por el barrio, por el pueblo.

Hablamos de pequeños proyectos y actividades que están relacionados con las matemáticas y la vida cotidiana. El objetivo es permitir relacionar los diferentes campos de las matemáticas y, a la vez, poner en juego todas las habilidades matemáticas orientadas a la resolución de problemas en un contexto que tiene sentido propio en la vida cotidiana, y en donde las matemáticas ocupan un lugar importante. Es difícil, si miramos la realidad con esta clave, no encontrar situaciones globales y de la vida cotidiana en las que no aparezcan las matemáticas. No obstante, es un problema de educación, porque muchos adultos siguen sin ver las matemáticas. Como dice Fernando Corbalán, uno de nuestros trabajos educativos básicos creo que debe ser este, "ayudar a nuestros alumnos/as a ver las matemáticas que hay en la vida cotidiana".

7.2. PROYECTOS MATEMÁTICOS y DIVERSOS

Otro grupo de proyectos que podemos trabajar están relacionados con los números, las medidas y la construcción de determinados objetos (casas, rascacielos, maquetas, objetos, ...):

- “¿Cuánto medimos? ¿Cuánto miden las cosas?, ¿Cuánto pesamos? ¿Cuánto pesan las cosas?”
- “Hacemos una tienda”.
- “Vamos a comprarnos un coche”.
- “Necesitamos un piso”.
- “Voy a comprar un ordenador”.
- “Vamos a hacer un viaje”.
- “Construimos la maqueta de ...
- ...

ANEXO: COLECCIONES DE PROBLEMAS

Las colecciones de problemas están basadas en la combinación de diferentes criterios vistos en el artículo. El primer problema que aparece de cada colección siempre es el más fácil a nivel conceptual. A partir de él se van introduciendo cambios en la redacción, planteando problemas con varias soluciones, con datos que sobran, que faltan..., problemas de inventar enunciados, preguntas... Además, según el tamaño de los números y las formas de resolución, los problemas pueden ser de números pequeños (con resolución mental y/o con calculadora), de números medianos (resolución con calculadora y/o mental), y de números grandes (resolución con calculadora o con lápiz y papel).

Así pues, las diferentes colecciones de problemas tendrían un esquema similar:

PROBLEMAS DE SUMAS Y RESTAS																				
Que pueden ser de																				
CAMBIO						COMBINACIÓN			COMPARACIÓN						IGUALACIÓN					
1	2	3	4	5	6	1	2	3	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6

Con números

PEQUEÑOS						MEDIANOS						GRANDES								
Y con resolución																				
Mental			Calculadora			Calculadora			Mental			Calculadora			Lapiz y papel					

Por poner un ejemplo, si tomamos el problema de CAMBIO de tipo 1, con números pequeños: “Sara tiene 4 euros. Le dan 3 euros. ¿Cuántos tiene?”

Esta sería una posible colección de problemas⁽¹²⁾ en torno a él:

<p>Cambios en la redacción, que es cada vez más compleja.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Jon tiene 4 tebeos y su tío regala 3 más. ¿cuántos tebeos tiene ahora? • Tenía 4 canicas. ¿Cuántas tendré ahora si mi hermano me ha dado otras 3? • ¿Cuánto dinero tengo, si esta mañana tenía 4 y me han regalado 3 más?
<p>Problemas abiertos, con datos insuficientes, con variadas soluciones, con datos innecesarios, ...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Miren tenía por la mañana 6 euros. Por la tarde su ama le da algunos más. ¿Cuántos tiene ahora? • Entre tú y yo tenemos 10 euros. ¿Cuánto tiene cada uno? • ¿Cómo podemos pagar un juguete que vale 6 euros? • Tengo 12 años y 5 euros. Si me dan 3 euros más, ¿cuántos años tengo? • Tengo 12 años y 5 euros. Si me dan 3 euros más, ¿cuánto dinero tengo? • Ayer era mi cumpleaños. Mi padre me regaló 2 cuentos y 1 coche. Y mi madre 3 cuentos ¿Cuántos cuentos me regalaron? • Cada día me dan 2 euros. Si ayer tenía 4, ¿cuántos tendré mañana?
<p>Inventar problemas</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Inventa un problema cuya solución sea 10 euros. • Inventa un problema que se resuelva con la operación $5 + 4 =$. • Inventa un problema que se resuelva con una suma y dé 8. • Inventa un problema con los datos 10 y 5. La solución es 15.
<p>Inventar preguntas</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Tengo una pelota de fútbol que me ha costado 8 euros, y un balón de baloncesto que me ha costado 6 euros. Inventa una pregunta. • Jon tiene 4 años y Alberto tiene 6 años. ¿...? • Tengo 5 caramelos. Hay que sumar. Inventa la pregunta. • Alicia tiene 3 billetes de 5 euros. ¿...? Operación: $5 + 5 + 5$. • Mikel va al cine con 3 amigos. Si cada entrada cuesta 5 euros. ¿...? Solución: 20 euros.
<p>Inventar enunciados</p>	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuántas páginas del cuento me quedan todavía por leer? Inventa enunciado. • ¿Cuánto dinero tendré ahora? Solución: 8 euros." Inventa enunciado. • ¿Cuántas canicas tengo ahora en la caja? Operación: sumar. • ¿Cuántos pollos hay en la granja? Proceso: $15 + 5 = 20$ pollos. • Salgo a la calle con 10 euros, y me dan 4. ¿Cuánto dinero tengo? Solución: $10 + 4 = 14$ euros. ¿Qué podemos cambiar del problema para que la solución sea 6 euros? • Inventa un enunciado con Tere, euros y Conchi. • Inventa un enunciado con globos y que haya que sumar. • Inventa un problema.

Variaciones sobre esta colección:

- Que lea el profesor/a los problemas o que los lean ellos/as.
- Utilizar números medianos y grandes.
- Utilizando diferentes resoluciones.

BIBLIOGRAFÍA

Alcalá, Manuel, 2002: *La construcción del lenguaje matemático*. Grao. Biblioteca de Uno.

Alsina, Claudi; Burgués, Carme; Fortuny, Josep M^a; Jiménez, Joaquim; Torra, Montserrat, 1998: *Enseñar matemáticas*. Grao.

Alsina, Claudi; J. M^a Fortuny, 1995: *La matemática del consumidor*. Gobierno Vasco.

Barba, David; Segarra, Luis, 2003: *Problemas graduados para el tratamiento del cálculo global*. El Quinzet (elquinzet.com).

Dickson, Linda; Brown, Margaret; Gibson, Olwen, 1991: *El aprendizaje de las matemáticas*. Labor /MEC.

Fernández, Santiago; Colera, José, 1994: *Calculadoras I*. Proyecto Sur.

Gallego, Carlos; y varios, 2001: Contextos culturales para la actividad matemática I. Incluir el saber, y otros. *Revista Aula 103-104*.

Gallego, Carlos; y varios, 2001: Contextos culturales para la actividad matemática II. Los contextos culturales para la enseñanza de las matemáticas, y otros. *Revista Aula 107*.

Martínez Montero, Jaime, 2000: *Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI*. Cisspraxis.

Fernández Bravo, José Antonio, 2000: *Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos*. Monografías Escuela Española. CISS Praxis.

Kamii, Constance Kazuko, 1985: *El niño reinventa la aritmética*. Aprendizaje Visor.

Kamii, Constance Kazuko, 1995: *Reinventando la aritmética III*. Aprendizaje Visor.

Kamii, Constance Kazuko, 1992: *Reinventando la aritmética II*. Aprendizaje Visor.

Mora, José Antonio, 1994: *Calculadoras II*. Proyecto Sur.

Muñoz, Lourdes; Lasalle, Pilar, 2002: Problemas matemáticos en el aula. Problemas y más problemas. *Revista SIGMA* nº 21.

Torra Bitlloch, Monserrat; Batlle Agell, Isabel; Serra Santasusana, Teresa, 1994: *Proyecto curricular "Mare Nostrum"*. MEC.

NOTAS

- (1) Ver *Plantear y resolver problemas*, Papeles de acción educativa.
- (2) Al final del artículo hay un ejemplo de problemas, combinando diferentes criterios y dificultades.
- (3) Para saber más, ver *Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI*, de Jaime Martínez Montero (CISSPRAXIS, 2000), al que yo he seguido en esta clasificación.
- (4) Trabajar con problemas de cálculo mental supone también trabajar el cálculo mental con contexto.
- (5) De la misma manera que lo importante no puede ser “copiar los problemas en el cuaderno”. Los alumnos/as que tienen dificultades para escribir, para cuando han copiado el problema están aburridos ya de él. Si además tiene dificultades para operar, el proceso de resolver el problema se convierte en una “historia interminable”, que nada tiene que ver con la comprensión y el pensamiento matemáticos.
- (6) “Los alumnos que cometen errores suelen:
1. Pasar por alto las unidades o los elementos de la magnitud que se expresan en el enunciado, respecto a la que se expresa en la pregunta.
 2. Intuir lo que se les pregunta, sin reflexionar sobre el contenido real de la pregunta del problema.
 3. Aplicar operaciones mediante asociación lingüística. Si en la pregunta leen “quedan”, restan; si leen, por ejemplo, “en total”, suman...
 4. Operar con los datos numéricos en el mismo orden en el que aparecen en el enunciado, y utilizando todos los que aparecen.
 5. Buscar, constantemente, la operación o conjunto de operaciones en la resolución del problema, sin pararse a pensar si son o no necesarias.
 6. Buscar una solución por absurda que sea.
 7. Aplicar el último concepto aprendido o la última operación que se ha visto en clase.
 8. Utilizar estrategias incorrectas cuando los datos numéricos se representan mediante números elevados, aunque comprendan la relación expresada con números inferiores.”
- Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos*. Pag (55-56). José Antonio Fernández Bravo (2000). Monografías Escuela Española. CISS Praxis.
- (7) Ver artículo de “Problemas matemáticos en el aula. Más y más problemas”, de Lourdes Muñoz y Pili Lasalle. *SIGMA* n° 21.
- (8) Adaptados de la exhaustiva clasificación de situaciones problemáticas de José Antonio Fernández Bravo en *Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos*. (2000). Monografías Escuela Española. CISS Praxis.
- (9) También podemos utilizar textos numéricos en forma de fotos de cuadros de doble entrada que aparecen en los periódicos, revistas... sobre este y otros temas (precios, deportes, nacimientos, edades, mapas, ...).
- (10) Podemos utilizar algunas facturas hechas por nosotros, pero también facturas reales de la vida cotidiana.
- (11) Datos de ventas inventados por el autor.
- (12) Seminario de Matemáticas de 1er ciclo. Curso 03/04. B03 Sestao.