EL CONSTRUCTIVISMO Y LAS MATEMÁTICAS

JOSÉ RAMÓN GREGORIO GUIRLES (*)

INDICE

INTRODUCCIÓN

1. PLANTEAMIENTO CONSTRUCTIVISTA DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

2. CLAVES DEL TRABAJO CONSTRUCTIVISTA EN EL AULA
   2.1. Racionalización, ajuste y renovación
   2.2. Alfabetización matemática y sentido numérico
   2.3. Resolver todo tipo de situaciones problemáticas
   2.4. La globalización y las matemáticas de y para la vida cotidiana
   2.5. Los juegos

3. A MODO DE CONCLUSIONES

(*) Asesor de Etapa Infantil / Primaria del Berritzegune de Sestao

INTRODUCCIÓN

Han pasado 10 años desde que la administración educativa del País Vasco pusiera en marcha el Plan Intensivo de Formación (PIF), con el que pretendía introducir a los centros de Infantil y Primaria en la reforma educativa. No tenemos valoración oficial de los resultados del plan, aunque si sabemos que sirvió para poner en común lenguajes pedagógicos, para charlar sobre educación (algo que solía ser raro en los centros), e incluso para elaborar proyectos curriculares teóricos. Lo que también sabemos es que apenas se pasó de este segundo nivel de concreción curricular, y lo que era el verdadero trabajo de asesoramiento en centros, el de ser agentes de cambio educativo, quedó cercenado por la incapacidad que demostramos desde los servicios de asesoramiento y desde los propios centros de descender al nivel diario de aula.

Ello supuso que, en la práctica, todo el constructivismo y los principios metodológicos que aparecen en los diseños curriculares de Matemáticas[1] se quedaran en plasmaciones teóricas y formulaciones de principios, y que una vez pasados los primeros momentos de "excitación pedagógica", los profesores/as se sintieran huérfanos de la reforma matemática y sin poder ver lo que representaban en la práctica de aula las matemáticas de las que hablamos. El último pequeño paso fue dejar "archivado" el proyecto matemático de centro para mejor ocasión.

Sin embargo, como siempre pasa en toda buena película que se precie de serlo, la historia no acaba aquí. Respondiendo a esta situación tan frustrante aparece hace ya unos años una nueva corriente que pretende responder a las carencias de la implementación de la reforma educativa en lo que se refiere a matemáticas. Esta corriente de trabajo, además, es conocida por diferentes expresiones: matemáticas y constructivismo, seminario de constructivismo, constructivistas...

Pero exactamente, ¿quiénes somos?, ¿qué nos une?, ¿a qué viene tanto lío con el término? ¿por qué a veces tenemos la sensación de ser o parecer bichos raros? ¿por qué nos miran así?, ¿por qué tenemos que estar continuamente respondiendo a la pregunta que de qué vamos? ... Bueno, pues ahí va un intento de explicación.

1. PLANTEAMIENTO CONSTRUCTIVISTA DE LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

En primer lugar hemos de reconocer que "nuestra" referencia teórica más clara (la de algunos al menos), es la que aparece reflejada en el propio DCB, es decir la que tiene que ver con un planteamiento constructivista de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Por resumir, LO MAS SIGNIFICATIVO DE ESTE PLANTEAMIENTO PASA POR:

- Entender el aprendizaje de las matemáticas como un proceso de CONSTRUCCIÓN INDIVIDUAL[2] que se produce a través de las interacciones individuales y grupales que se realizan en el aula. El grupo-clase y la escuela se convierten así en referentes y agentes básicos de aprendizaje.
- Respetar los diversos ritmos y maneras de construir los diferentes tipos de contenidos matemáticos (conceptos, procedimientos y actitudes) y las diferencias en las maneras de construir y aprender de los propios alumnos/as (unos más analíticos, otros más globales...).
- Tener presente que el aprendizaje que uno puede interiorizar y construir está condicionado por lo que ya sabe y por la calidad del proceso de aprendizaje. De tal manera que es imprescindible la comprensión y la actividad mental (idea de conflicto cognitivo y de resolución de problemas) en el proceso matemático.

- Ser conscientes, además, de que las actitudes hacia las matemáticas, tanto por parte del profesor/a como del alumno/a, son un elemento básico para el aprendizaje. Estamos hablando de valorar la importancia de las matemáticas en la vida, de tener una actitud de reflexión, de discusión y de valoración de las opiniones y de los saberes de los demás (verdaderos elementos motivadores hacia las matemáticas).
- Considerar, por tanto, el aprendizaje cooperativo como el centro de la actividad y contexto de aprendizaje matemáticos.
- Promover acción matemática con el horizonte de la autonomía como referencia.

Unido a todo lo anterior, debemos ser conscientes de que este modelo conlleva NE-CE-SA-RIA-MEN-TE, y éste es el elemento nuclear de todo el planteamiento constructivista, un cambio radical en la concepción del propio papel que el profesor/a debe desempeñar en el aula. Papel más de mediador en la cooperación, de persona que dialoga para aprender, que de simple y tradicional instructor que trata a los alumnos/as como ignorantes a los que debe transmitir sus conocimientos.

Sabemos que esto no es fácil. Los profesores, de manera secular estamos convencidos de que explicar es sinónimo de enseñar y que enseñar lo es de aprender. Ni lo uno ni lo otro; es más, suele ser bastante común en matemáticas, explicar con la intención de enseñar, y que muchos no aprendan nada con sentido. ¿Por qué nuestros alumnos/as no aprenden todo lo que les enseñamos? Es una pregunta muy interesante; igual es que así es muy difícil aprender y construir nada. Debemos intentar olvidar esa vieja creencia de que todo hay que explicarlo[3], debemos tener la suficiente paciencia pedagógica para dejar que sean nuestros alumnos/as lo que construyan y reconstruyan (las cosas nunca se aprenden de una vez) su conocimiento matemático, incluidos por supuesto los omnipresentes y maltratados algoritmos (suma, resta, multiplicación, división....), y lo conviertan en un conocimiento útil y funcional, pleno de sentido y significado y que nos sirve para resolver distintos tipos de problemas en diferentes contextos educativos.

2. CLAVES DEL TRABAJO CONSTRUCTIVISTA DE AULA

Este planteamiento "teórico" de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es el que aparece, con mejores o peores palabras, en la mayoría de los proyectos curriculares de los centros de Infantil y Primaria de nuestra comunidad. Creo además que buena parte del profesorado que imparte matemáticas comparte estas reflexiones teóricas. Por tanto, podemos deducir que por este camino "no hay nada que rascar" o que aunque rasquemos no es este el lugar que pica.

El problema de las matemáticas y el constructivismo no es, por tanto, de definición y concreción curricular, sino un problema más real, el de dar clase todos los días y, en definitiva, el de definir cuáles son las claves del trabajo constructivista en la actividad diaria de aula. ¿Cuáles serían estos elementos identificativos del constructivismo aplicado a las matemáticas?, ¿de qué claves estamos hablando?.

Sin duda podemos decir muchas y, en ocasiones según el momento, diferentes. Pero yo voy a tratar de enunciar y desarrollar las siguientes:

- la racionalización, ajuste y renovación de contenidos matemáticos.
- la alfabetización matemática y el sentido numérico.
- resolver problemas.
- la globalización y las matemáticas para la vida cotidiana.
- los juegos.

2.1. Racionalización, Ajuste y Renovación

Cuando decimos que es necesaria una racionalización, ajuste y renovación de los contenidos matemáticos[4] estamos hablando de:

- Disminuir la carga de algoritmos en el aula, tanto en intensidad como en tiempo dedicado a ellos. Parece obvio decirlo, pero se dedica un tiempo excesivo a un tipo de trabajo matemático de importancia menor, estando como estamos además en la sociedad de la revolución informática.
- Potenciar el cálculo mental, la aproximación y el tanteo y previsión/estimación de resultados de todo tipo de operaciones y problemas matemáticos, como elementos básicos para "amueblar la cabeza" de nuestros alumnos/as.
- Favorecer la introducción y el uso continuado de la calculadora desde educación Infantil y a lo largo de educación Primaria. La identificación de números, la asociación tecla, número y voz (en las calculadoras parlantes), su utilización para el cálculo mental, para trabajar el sentido numérico, para resolver problemas a los que no llegamos algorítmicamente o que suponen una pérdida innecesaria de tiempo son sólo algunas de las posibles aplicaciones de aula que tienen las calculadoras.
- Llegar a acuerdos en cada ciclo y etapa de cuándo y con qué operaciones utilizar (según el número de cifras y la dificultad) el cálculo mental, cuándo el lápiz y papel y cuándo la calculadora.
- Dominar funcionalmente (no es imprescindible el dominio conceptual[5]) las estrategias básicas de cómputo, utilizándolas en diferentes contextos y decidiendo en cada caso el tipo de cálculo a emplear: cálculo mental, de lápiz y papel o de calculadora.
- Trabajar los números y las operaciones elementales en relación con la resolución de problemas aritméticos y con contextos propios, y no en fichas descontextualizadas de operaciones y más operaciones. Las operaciones o algoritmos si no sirven para resolver problemas carecen del más mínimo sentido.
- Priorizar el trabajo práctico y oral y la comprensión; primando la competencia frente a la acumulación.
- Basar el trabajo de medida en experiencias de medición de longitudes, áreas, capacidades y volúmenes, pesos, ángulos y tiempos, utilizando instrumentos de medida, que pueden ser construidos en la propia aula. Paso imprescindible para que, de un lado, el alumnado pueda construir los conceptos de magnitud y unidad, y, de otro, tener puntos de referencia claros que les sirvan de base para una buena estimación.
- Unir en la práctica el trabajo de números y el de medida, procurando disminuir la carga de trabajo en todo lo que se refiere a transformaciones de unidades, fórmulas y ejercicios de cálculo con fórmulas.
- Trabajar la matemática del espacio frente a la geometría formal y analítica. Hay que dedicar más tiempo al desarrollo de la visión espacial y de la intuición geométrica, la orientación y representación espacial, localización y descripción de objetos en el espacio.
- Estudiar los objetos de la vida cotidiana, manipular materiales para dibujar medir, descubrir... , construir, jugar, plantear problemas e investigaciones constituyen la base del trabajo geométrico.

- Considerar seriamente la disminución de la carga de trabajo mecanicista y sin conexión con la realidad en lo referente a la parte más analítica, abstracta y de cálculo de perímetros, áreas y volúmenes de figuras.
- Utilizar informaciones de la vida cotidiana (periódicos, ...) para comentar e interpretar la información que contienen y representarla en tablas y gráficas.

Debemos tener en cuenta que la primera cuestión en torno a las matemáticas, es precisamente ponerse de acuerdo en los contenidos que debemos dar, el tiempo que les vamos a dedicar, qué vamos a priorizar, qué es lo accesorio y qué lo imprescindible...(distinguir lo ocasional o puntual de lo sistemático).

2.2. Alfabetización Matemática y Sentido Numérico

Es un elemento central el trabajo de alfabetización matemática y sentido numérico, entendidos como procesos de construcción y reconstrucción personal y de grupo-aula de los contenidos, partiendo de los conocimientos matemáticos que tienen y priorizando la comprensión de todos los procesos. Estoy hablando de:

- **investigaciones matemáticas**. El proceso de enseñanza-aprendizaje ha de ser significativo y eso exige que el alumno observe, experimente, se haga preguntas, conjeture (proceso inductivo y construcción del conocimiento). Debemos tener presente que la capacidad de aplicar conocimientos matemáticos depende sobre todo, de cómo han sido construidos y utilizados en la escuela.
- **ambiente de especulación matemática** constante como elemento clave en el aprendizaje. Frente al ambiente de repetición mecánica de algoritmos, equivalencias decimales y métricas y fórmulas En este contexto,es un elemento clave la admisión y tratamiento del error : el error como una fuente de información excepcional y como instrumento de aprendizaje.
- **los propios alumnos/as deben ser protagonistas de su aprendizaje, deben construirlo** y no ser meros receptores de los conocimientos que les transmite su profesor/a[6].

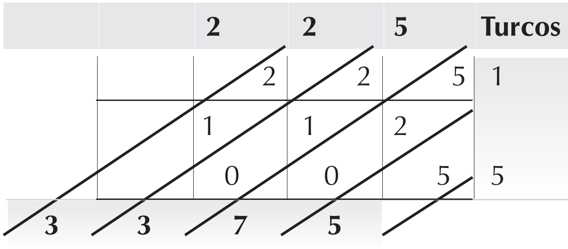
Esto del descubrimiento, la experimentación, la inducción, la construcción del conocimiento aplicado a los números, el SND y el cálculo ¿CÓMO SE HACE?. ¿ QUÉ EXPERIENCIAS HAY?.

A lo largo de la historia cada cultura ha utilizado las Matemáticas de manera diferente para entender y operar en su medio, lo cual ha queda reflejado en las diferentes maneras de multiplicar y dividir a lo largo de la historia[7].

225 x 15		**Egipcios**
1	225	Utilizaban la idea de factor, y en realidad en cada multiplicación hacían la tabla del número a multiplicar. De esta manera solucionaron muchos problemas matemáticos.
2	450	
4	900	
8	1.800	
16		
	3.375	

	10	5		**Griegos**
200	2.000	1.000	3.000	
20	200	100	300	
5	50	25	75	
	2.250	**1.125**	**3.375**	

Utilizaban la descomposición de números y la propiedad distributiva, y les sirvió para resolver todo tipo de problemas.



Aplican las propiedades de los números y del sistema de numeración decimal.

Incluso hoy en día, no todos tenemos los mismos algoritmos para las operaciones de cálculo. Por ejemplo, los holandeses dividen así[8] (por descomposición /construcción, sustracción y estimación):

3.561: 9 =	
2.770	**300**x9
861	
810	**90**x9
51	
45	**5**x9
6	
3.561:9 = 395 (resto = 6	

316: 12 =	
240	**20**x12
76	
60	**5**x12
16	
12	**1**x12
4	
316: 12 = 26 (resto = 4)	

Lo cual representa un soplo de aire fresco para el algoritmo de la división, con una potencialidad del cálculo mental y del sentido numérico impresionantes.

Vemos pues que el cálculo también tiene un proceso histórico que está unido a las culturas y su evolución. La forma de calcular depende de los conocimientos que se poseen, de manera que se controla tanto el proceso del cálculo como resultado. Y los algoritmos cambian en la medida que cambian los conocimientos culturales y matemáticos.

PUES BIEN, ESTO NO ES LO QUE HACEMOS CON LOS NIÑOS Y NIÑAS CUANDO LES ENSEÑAMOS DE MANERA ACADÉMICA LOS NÚMEROS, EL S.N.D. Y EL CÁLCULO. Les enseñamos maneras de calcular que no se corresponden con sus conocimientos, y en donde sólo controlan el resultado, pero no el proceso, el cual no entienden. La **forma académica** que les enseñamos, que es el resultado de siglos de evolución matemática, NO TIENE NINGÚN SIGNIFICADO para la gente que no tenga esos conocimientos.

La cuestión es enseñar a los niños formas de cálculo que partiendo de sus conocimientos matemáticos les permitan controlar el proceso y el resultado del cálculo que están haciendo, y SEGUIR APRENDIENDO: imaginación y sentido numérico, agilidad y cálculo mental, ... Porque los niños "saben" y tienen conocimientos matemáticos con los que intentan resolver (cómo cada cultura a lo largo de la historia) problemas complejos. Tan sólo tenemos que darles la oportunidad de respirar matemáticamente, de especular y de descubrir, de reconstruir conocimientos, dialogando en el aula, conversando y poniéndose de acuerdo (socializando los saberes matemáticos). Esto es **ALFABETIZACIÓN MATEMÁTICA**, porque los contenidos matemáticos y su lugar en el mundo sólo tienen sentido y valor para los niños cuando los pueden reconstruir como una comunidad de niños/grupo-aula de aprendizaje.

EXPERIENCIAS DE AULA en esta línea de trabajo hay muchas. Quizás las más importantes son las desarrolladas por Constance K. Kamii en su libros *Reinventando la aritmética I, II y III*. Pero también a lo largo de estos últimos años, los profesores de distintos lugares de Cataluña, Euskadi y otras comunidades han desarrollado un sinfín de experiencias en esta misma línea de trabajo.

- ¿Qué pasa cuando una grupo de alumnos/as tiene que identificar, interpretar, comentar... precios y números, pero no conoce y/o no domina el sistema de numeración?
- ¿Qué pasa cuando un grupo de alumnos se tiene que enfrentar a la tarea de resolver un problema que se resolvería fácilmente mediante una multiplicación, pero no saben multiplicar?
- ¿O, en general, cuándo el problema a resolver implica realizar una operación que no conocen algorítmicamente: suma, resta, multiplicación, división...?

En todos los casos, estamos iniciando acciones de investigación-acción[9] que suponen un problema matemático de primer orden para nuestros alumnos/as, a los que sólamente mediante la cooperación y la conversación serán capaces de dar respuesta, la cual supone en la práctica la reconstrucción del saber matemático.

En todos los casos, hay una constante que se repite: las formas básicas egipcias y griegas (además de otras muchas) aparecen y se repiten como formas de cálculo adecuadas a su nivel de conocimientos. En este proceso, además, resulta fácil llegar con los alumnos, por ejemplo, a la forma académica de la multiplicación, pero DESPUÉS DE UN PROCESO DE CONSTRUCCIÓN PERSONAL PLENO DE SIGNIFICADO MATEMÁTICO.

Una ejemplificación de este proceso, siguiendo con la multiplicación y de manera muy esquemática, sería el siguiente:

- **¿Para qué sirve multiplicar?** ¿las utilizamos en la vida real? ¿dónde? ¿qué es multiplicar y cuándo se usa?
- *Cada uno de los cinco compañeros de clase ha llevado 8 euros a la excursión. ¿Cuánto dinero llevan entre todos?*

Partimos de que no saben multiplicar, nosotros no explicamos nada e iniciamos pequeñas investigaciones, como **8 x 5 =** Y otras con números diferentes: 6 x 7 = ..

- es posible que aparezcan soluciones como
  8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40 (8 x 5)
  o también 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 40 (5 x 8)
- de aquí se deriva nuestra siguiente acción / problema / investigación
  Realizamos otras invetigaciones similares.

- **Vamos a construir nuestras tablas**

  Cada uno la construye. Condiciones: no vale mirar resultados en otras tablas acabadas, se pueden hacer grupos y comparar y compartir resultados. Jugamos y estudiamos regularidades de la tabla ...

- **Memorizamos las tablas.**
  - No es una actividad de un día para otro.
  - La chuleta que representa la tabla hecha por él/ella mismo/a vale como herramienta. A la vez que se consulta se aprende.
  - La misma utilidad tiene la calculadora, siempre que se haga para resultados concretos (8 x 5, 7 x 9 ...)
  - Los juegos de cartas (tipo los que aparecen en los libros de Constance K. Kamii, bingos multiplicativos, ...), son un buen sistema para memorizar.
  - No saber "las tablas" nunca debe ser un obstáculo para resolver problemas. Las tablas son una actividad de rango menor.
- **Resolvemos problemas de cálculo mental** (que ofrecen un contexto real de resolución)**, con operaciones de una cifra por otra**. Al estilo de los problemas de cálculo mental de David Barba.
- Si en el problema anterior somos diez los compañeros que vamos de excursión, ¿cuánto dinero llevaremos entre todos?. Iniciamos otras **investigaciones** basadas en el problema: **8 x 10 =** Y realizamos otras similares: **20 x 6 =** **...**

  Sacamos conclusiones como grupo.
  - *¿Y si somos 25 los que vamos de excursión?*

    Iniciamos una nueva investigación numérica en torno a **25 x 8 =**

    Posibles respuestas:

    25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 = 200

    50 50 50 50

    100 100 Forma primitiva pero válida.
  - .../...
  - 25 x 8 = 20 x 8 + 5 x 8 = 160 + 40 = 200 **COMPRENSIÓN** del proceso, que tiene una transferencia positiva con nuestro algoritmo de la multiplicación.
  - 25 x 8 = 50 x 4 = 100 x 2 = 200 Esto es **SENTIDO NUMÉRICO**.

  Es un buen momento para trabajar descomposiciones de números y operaciones: "pon de dos formas diferentes la siguiente multiplicación 15 x 6"
- **Resolvemos problemas sencillos de lápiz y papel**: otras posibles estrategias y soluciones.
- *En la siguiente salida que hacemos, cada uno de los 25 lleva 10 euros. ¿Cuánto llevamos entre todos?*

  Resolvemos el problema con otra investigación numérica sencilla: **25 x 10**. Y resolvemos otras similares.
  - La podemos hacer con lápiz y papel, utilizando procedimientos similares a los de multiplicar por una cifra
  - o directamente con calculadora

  Después intentamos generalizar entre todos los conclusiones.
- *En la salida de fin de curso, volvemos a ir los 25 de la clase, y ahora nos dejan llevar más dinero, 12 euros cada uno. ¿Cuánto dinero podremos gastar entre todos?*

  Resolvemos el problema con una investigación numérica final **25 x 12**

  Recordamos las condiciones:
  - sólo saben multiplicar por una cifra.
  - nosotros no les enseñamos a hacerlos.
  - deben buscar formas de llegar a la solución.
  - trabajo individual y grupal.
  - conversación y aprendizaje dialógico.

Posibles soluciones

- 25 + 25 + 25 + 25 + ... = 300

  100 100 100

- 25 x 12 = 50 x 6 = 100 x 3 = 300 Genial su sentido numérico
- 25 x 12 = 25 x 10 + 25 x 2 = **250 + 50 Esta fórmula, llena de comprensión numéricas, tiene el valor de intermediar con nuestro algoritmo, y empiezan a aparecer coincidencias sorprendentes.**

Sigue siendo un buen momento para realizar descomposiciones numéricas:

25 x 14 =

48 x 12 =

25
x 12
50
250
300

- **"Nuestra" multiplicación, el algoritmo, sería el último paso. Antes debemos INSTITUCIONALIZAR el saber aprendido en el aula: sacar conclusiones de cada problema e investigación numérica, comentarlas, escribirlas... El tránsito a nuestro algoritmo de la multiplicación estará lleno de sentido y significado, y de procedimientos y estrategias personales.**
- **Resolvemos problemas de multiplicar: empezamos con ellos y cada investigación numérica debe estar basada en un problema real a resolver. No debemos olvidar ni un momento que el objetivo de "saber multiplicar" es resolver problemas.**
- **Otros ejemplos de operaciones realizadas por alumnos/as** cuando no sabían multiplicar, y que ilustran perfectamente el proceso que estamos comentando (Tomados del cuaderno "Estrategies que utilizam per fer operacions". C.P. ES PONT, 1r nivell, 2n cicle de Primaria. Curs 98-99:

432 x 5 = 2160

400	30	2
400	30	2
400	30	2
400	30	2
400	30	2
2000	150	10

2160

234 x 4 = 936

200	30	4
200	30	4
200	30	4
200	30	4
800	120	~~16~~
	10	**6**
	~~130~~	
100	**30**	
900		

8345 x 5 = 41.725

8000	8000	8000	8000	8000	**40.000**
300	300	300	300	300	**1.500**
40	40	40	40	40	**200**
5	5	5	5	5	**25**

324 x 6= 1944

300	20	4		**1800**
				+ 120
	x	6		**24**
				1944

425 x 13= 5525

400	20	5	5200
400	20	5	260
400	20	5	65
400	20	5	
400	20	5	**5.525**
400	20	5	
400	20	5	
400	20	5	
400	20	5	
400	20	5	
400	20	5	
400	20	5	
400	20	5	

344 x 24= 8.256

344	**344**
x20	**x4**
6.880	**1.376**

6880
+1376
8.256

837 x 345 = 288.765

837 x 300 =	**251.100**
837 x 40 =	**33.480**
837 x 5 =	**4.185**
	288.765

Estas experiencias suponen un DIALOGO constructivo de los niños/as con los misterios y claves del SND: ¿cómo podemos escribir los números? ¿cómo podemos calcular? ¿CÓMO ORIENTAR ESTE DIÁLOGO?

Algunas ideas del trabajo constructivista en torno a números, SND y cálculo [10]

1.- Cuando hablamos de actividades y situaciones de aula en torno a leer, escribir y comparar NÚMEROS, siempre nos aparecen unidos a los números los temas de las cifras y el sistema de numeración decimal: ¿qué hacer con ellos?, ¿qué relación hay entre números y cifras?¿cómo enseñar y cuándo el SND?

Por ejemplo, cuando un niño/a escribe el ciento uno como 1001, ó el ciento diez como 10010, esto indica que aunque puede entender lo que significan estos números y saber compararlos con otros, lo que no sabe o lo que le falta saber utilizar bien son las cifras[11] (los niños/as utilizan lo que saben para descomponer los números).

Otro ejemplo. Cuando un niño/a es capaz de sumar mentalmente 19 y 3, y decir que da 22, está pensando y trabajando con números. Sin embargo si le colocamos frente a la operación (en el primer ciclo de primaria):

19 Es posible que no la sepa hacer, y es que en este caso está trabajando con cifras y con el
<u>+3</u> SND, y además con el algoritmo de la suma.

Hasta ahora, nos hemos dedicado a enseñar el código del sistema de numeración mediante la descomposición y el agrupamiento de los números (unidades, decenas, centenas...), explicando analíticamente como cada cifra representa a un número diferente. Desde un punto de vista constructivista[12], ¿cómo debemos plantear el trabajo matemático y la situaciones de aula cuando los alumnos/as todavía no saben cómo se hace?:

- No hace falta utilizar los agrupamientos y descomposiciones de números para dominar la lectura y escritura de números. En realidad, la enseñanza del SND es el último paso a realizar, pues supone la parte analítica y racional del sistema de numeración (igual que en la lectura y escritura el análisis de fonemas y letras supone el paso final).
- Basta con crear en el aula situaciones funcionales, proyectos, pequeñas investigaciones, textos numéricos… en la que los alumnos/as tengan que intercambiar información y realizar ejercicios de lectura, escritura y comparación de números grandes (números con cifras).
- Es necesario embarcar a los niños en proyectos de todo tipo, con diversidad de situaciones, y en un ambiente de clase libre, especulativo e imaginativo/creativo, que sirva para dotar de significado a los números (tamaños, cantidades, grafías...) y operaciones, ... permitiendo la construcción matemática por parte de los niños y de las niñas. Por tanto, una de las claves del trabajo matemático será plantear en el aula este tipo de situaciones interesantes y funcionales:
  - Elaboración de listas con números en la clase
  - Carteles con números
  - Proyectos: ¿dónde hay números y para qué sirven?, ...
  - Situaciones con materiales como tiques, entradas de cine, facturas...
  - Tiendas en el aula, proyectos de investigación, ...
  - Resolución de problemas en contextos reales: situaciones de la vida cotidiana, misterios matemáticos, viajes..., resolver una situación problemática para cuya resolución necesitan hacer una resta pero no saben su algoritmo....
- La cuestión no es enseñar números, sino sensibilizar sobre el significado de los números, en aulas no organizadas por los libros de texto. Con el trabajo matemático de especular, pensar, discutir con los demás y de aprender compartiendo será suficiente para que se produzca el aprendizaje construido por los propios alumnos/as.

- Frente a un problema, los niños tienen que enfrentarse a imaginar lo que puede ser mediante la especulación y la reflexión compartida. Por ejemplo, en un grupo que está intentando aprender cosas de los números y sacar las regularidades del sistema de numeración, empiezan a aparecer algunas ideas:

  – si hay más números es más grande.

  – nos fijamos en el de delante (jerarquía de cifras).

  – si son iguales nos fijamos en el segundo.

  – ... sobre cómo se leen... (lo que se lee y lo que no se lee).

  – entre el 100 y el 200 hay cien números.

  – si contamos de 1 en 1 cambia el número final.

  – si contamos de 10 en 10 cambia el 2º número.

  – si contamos de 100 en 100 cambia el 3º.

  – ...

  Si estas conclusiones las escribimos en la pizarra, en un cartel mural o hacemos un cuaderno contando lo que hemos aprendido, estamos realizando el proceso de INSTITUCIONALIZACIÓN DEL SABER aprendido en el aula. Pero en este caso la institucionalización o academización de los saberes matemáticos es el resultado final de un proceso de alfabetización matemática pleno de significado.

- Debemos, además, tener en cuenta que los niños no aprenden número por número, no aprenden segmentos por segmentos de números. Los niños/as lo que aprender es el LENGUAJE NUMÉRICO y por tanto todos los números al mismo tiempo, aprenden las normas y el orden interno del SND. Esto nos sirve para entender que la enseñanza de los números no se puede hacer paso a paso en forma de escalera (en este curso hasta el 10, luego hasta el 1000, ...), sino en forma de red.

2.- Respecto al CÁLCULO, los niños utilizan recursos diferentes para calcular: dedos, manos, papel, lápiz, calculadora. Además, hay que tener en cuenta que es un tipo de trabajo matemático diferente, utilizar números y utilizar números con el valor de las cifras.

- El algoritmo se puede introducir de modos diferentes dependiendo del método o concepción que esté por debajo. En la enseñanza tradicional, se explicaba el algoritmo como un mecanismo para que lo reprodujeran. Esto, como ya hemos analizado es antihistórico y carece de sentido matemático desde todo punto de vista. En la enseñanza activa, se utilizan ábacos, multibases...para mediar en el aprendizaje, pero seguimos en la concepción de que los que sabemos somos nosotros y los niños/as no saben nada.

  Desde el punto de vista constructivista, hablamos de crear situaciones, especular, investigar..., favoreciendo que construyan un valor para las cifras en el cálculo; esto les llevará al algoritmo. La ejemplificación realizada anteriormente con la multiplicación nos puede servir de modelo.

- No es lo mismo operar con números grandes que con pequeños, los números pequeños tampoco son la antesala de los grandes. Es un trabajo diferente que hay que hacer desde el principio. Cuando los números son pequeños no aparece la necesidad de usar las cifras (lo pueden resolver, por cálculo mental, proporciones....). Los números grandes obligan a utilizar un código. Para hacer 366:2 tienen que operar con las cifras. Esto nos lleva al algoritmo de la división. Por tanto, deberemos procurar plantear situaciones funcionales con números grandes que lleven a especular sobre las cifras.

3.- El trabajo en el aula debemos procurar centrarlo en aquellos “conocimientos que el niño/a es capaz de usar pero no controla”. El **TRABAJO EN GRUPO Y LA CONVERSACIÓN** con los alumnos y entre ellos son una herramientas importantes en el trabajo de construir matemáticas (aprendizaje dialógico). Teniendo en cuenta, eso sí, que el trabajo constructivista pretende que cada uno construya lo máximo en función de sus posibilidades.

CONVERSAR es cooperar para aprender, y no se pueden reducir a conversaciones siempre en gran grupo, se tendrán que hacer también en pequeño grupo. Conversar en grupo implica resolver el problema y explicar cómo se ha resuelto. Y esto supone un alto grado de reflexión y de creatividad (contrapuesto a repetitivo o a habilidad mecánica).

Sentido Numérico [13]

Cuando hablamos de sentido numérico hablamos de:

- Hacer cálculos mentalmente y por aproximación siempre que sea posible, y explorar diferentes maneras de encontrar soluciones mentalmente.
- Utilizar la estructura de SND para facilitar los cálculos (descomponer y recomponer números) y otras estrategias “personales”.
- Sentido común al manejar números en el contexto de rrpp (investigaciones numéricas), y capacidad de pensar en las operaciones y problemas de diferentes maneras.
- Dominio inteligente de las relaciones y **REDES NUMÉRICAS BÁSICAS**: mitad = 1/2 = 0,5 = 50% (fracción, decimal, porcentaje); por 10, por 5, por 2; dobles/mitades; descomposiciones numéricas y propiedades de las operaciones ...

- Animar a los alumnos/as a explorar, cuestionar, comprobar, buscar sentido y desarrollar estrategias personales.
- Investigación numérica y análisis y discusión de la ideas de los alumnos/as (participación activa): los alumnos/as discuten sus conjeturas y las comprueban (razonamiento).
- Tienen la oportunidad de crear algoritmos y procedimientos para hallar una solución.
- Centrarse en la COMPRENSIÓN de un determinado problema desde múltiples puntos de vista (mejor que abarcar el mayor número de problemas que sea posible).
- Priorizar siempre la comprensión de significados matemáticos antes de proceder algorítmicamente (investigación matemática, cálculo mental y sentido numérico antes de los algoritmos y el lápiz y papel).

2.3. Resolver todo tipo de Situaciones Problemáticas

- Presentadas de diferentes maneras (datos incompletos, completos, inconsistentes, ...), en formatos diversos (gráficas, numéricas, ...), y con diferentes niveles de resolución: facturas, cuentas bancarias, presupuestos de obras domésticas, viajes, gastos con IVA, descuentos, ...; planos, mapas, tablas, gráficos, medir, realizar diseños, ...
- Utilizando todo tipo de materiales manipulativos en situaciones de investigación y de construcción de sentido numérico, cálculo, SND, operaciones básicas; instrumentos de medida de longitudes, capacidades, ángulos ..., calibradores, balanzas, cronómetros ...; materiales para trabajar el espacio y la orientación (brújulas, mapas, planos, ...); monedas, dados, ruletas, peonzas, para trabajar probabilidad y estadística; ...
- Poniendo en juego diferentes estrategias y habilidades de cálculo: aproximación o exactamente, con lápiz y papel, mentalmente o con calculadora.
- Trabajando la lógica y poniendo en juego algunas estrategias y procesos heurísticos sencillos (conjeturas, analogías, proceso de marcha atrás, ... y ensayo-error, reformulación del problema, comprobación de resultados, ...).
- Trabajando la COMPRENSIÓN de textos numéricos y problemas matemáticos (identificar, describir, reconocer, comparar, interpretar ... conceptos, operaciones, informaciones -orales, gráficas, escritas, tablas ...-) y la COMUNICACIÓN matemática (oral, escrito, gráfico ...).

Aprender a resolver problemas (entendidos como situaciones que no podemos resolver algorítmicamente o automáticamente y que precisan de una investigación y un pensar las cosas), es la finalidad básica que debemos perseguir, y todos los demás contenidos matemáticos son herramientas al servicio de esta finalidad.

Estas situaciones y actividades de aula (ejercicios, juegos, investigaciones, experiencias, esquemas, mapas, carteles, problemas, ...), deben potenciar la **autonomía** y el aprender a aprender, y deben permitir realizar un adecuado **tratamiento educativo de la diversidad**[14], teniendo en cuenta los diferentes procesos, ritmos y estilos de aprendizaje, y posibilitando diferentes niveles de logro. Así mismo, deben favorecer y crear un **clima de respeto, de aprendizaje entre iguales y de cooperación**, claves en la construcción del conocimiento de cada alumno/a.

Aunque ya hemos comentado algo obre ello con anterioridad, es muy interesante diferenciar entre problemas que pueden ser resueltos mentalmente y problemas de lápiz y papel. Y merece la pena dedicar una líneas a los PROGRAMAS DE PROBLEMAS DE CÁLCULO MENTAL. La particularidad de estos problemas es que ofrecen un contexto real para resolver una situación matemáticamente sin necesidad de ordenar y resolver con lápiz y papel. Y esto es importante. Existen diversos programas de este tipo, entre los cuales están el programa de David Barba (desde Infantil a 4º de ESO), y el que aparece en los libros de recursos de Primaria de Mare Nostrum. Eso sí, para que realmente sea cálculo mental lo que hacemos, debemos intentar aislar al máximo la variable de cálculo mental siguiendo una serie de normas sencillas:

- leemos el problema en voz alta, para que la comprensión lectora no interfiera en el proceso.
- lo leemos varias veces, para intentar aumentar la atención.
- no vale utilizar lápiz y papel.
- hacemos sesiones intensivas de 10 minutos, resolviendo 5 problemas, y un par de veces a la semana.

2.4. La Globalización y las Matemáticas de y para la vida cotidiana[15]

El objetivo es permitir relacionar los diferentes campos de las matemáticas y, a la vez, poner en juego todas las habilidades matemáticas orientadas a la resolución de problemas en un contexto que tiene sentido propio en la vida cotidiana, y en donde las matemáticas ocupan un lugar importante. Es difícil si miramos la realidad con esta clave, no encontrar situaciones globales y de la vida cotidiana en las que no aparezcan las matemáticas. No obstante, es un problema de educación, porque muchos adultos siguen sin ver las matemáticas. Uno de nuestros trabajos educativos básicos creo que debe ser este, ayudar a nuestros alumnos/as a ver las matemáticas que hay en la vida cotidiana. Para ello podemos:

- Utilizar la actualidad diaria de los medios de comunicación, la televisión..., y lo que sucede en nuestro entorno...: quinielas, loterías (primitiva, de navidad...), deportes y sus clasificaciones (baloncesto, fútbol, vuelta ciclista), olas de frío, lluvias, subidas de precios e IPC, euros en la vida cotidiana
- Plantear situaciones de investigación al respecto: ¿dónde hay números?, ¿para qué sirven?, ¿se puede vivir sin ellos?, la publicidad, la geometría en el arte, en nuestros pueblos, en la naturaleza y en la vida cotidiana (deportes, monedas, bordados...)

Existen también muchos ejemplos de materiales interesantes editados en este campo: *Matemáticas para la vida cotidiana*, de Claudi Alsina; *Matemáticas para la vida cotidiana*, de Fernando Corbalán; CD *Rutas Matemáticas*, de Fernando Corbalán, David Barba, Jordi Deulofeu, Anton Aubanel (editado por Cuadernos de Pedagogía). *Enseñar Matemáticas* de C. Alsina y otros.

2.5. Los Juegos

Los cuales, además de potenciar el gusto por las Matemáticas, pueden ser un contexto adecuado para:

- memorización y aprendizajes numéricos básicos.
- calculo mental.
- dominio del SND y operaciones básicas.
- trabajar la resolución de problemas, buscando y analizando estrategias ganadoras y perdedoras, investigando lo que ocurre si introducimos modificaciones en las reglas.
- hablamos de:
  - juegos de mesa: cartas, cifras y letras, escoba...
  - juegos de estrategia.
  - juegos con calculadora.
  - juegos con ordenador (clics y otras colecciones y aventuras matemáticas).
  - Cartas, dominós, ábacos, tableros, construcciones, tiendas de contar, medir, pesar, de cálculos aproximados, reparto, clasificaciones, ...

En la línea de trabajo constructivista, tienen una importancia relevante tanto en educación infantil como en primaria.

3. A MODO DE CONCLUSIONES[16]

El constructivismo no sirve para aprender lo mismo de siempre de una manera distinta (no es un método), sino que sirve para aprender cosas distintas (hechas también de manera distinta). La enseñanza constructivista no se basa en diseñar ejercicios, sino en diseñar entornos sociales de aprendizaje y alfabetización matemáticas, de diseñar un aula compleja, emocionante y especulativa.

Todo ello supone, además, renunciar a los libros de texto (al menos en su uso más tradicional y academicista), y al rol del profesor/a que controla lo que los niños/as tienen que pensar y renunciar a sentirse en el aula el representante académico que todo lo explica... El docente debe ser el que diseña situaciones que generan problemas, organiza el grupo, documenta al grupo lo que están haciendo e institucionaliza el saber.

Debemos pensar, para terminar, que sólo se construye lo que se comprende y que sólo se interioriza cuando se comprende. Y esta es la base de todo el aprendizaje matemático. El resto es sumar alumnos al conjunto de analfabetos funcionales, matemáticamente hablando, o como decía un buen amigo, “el resto es desierto curricular”, un largo desierto algorítmico, vacío de oasis y que no lleva a ninguna parte.

NOTAS

1 El aprendizaje de las Matemáticas se contempla como un proceso en construcción más que como un saber cerrado y acabado.

2 "Sólo alimenta la comida que se come uno". Oído y leído a Jesús Mari Goñi, profesor de la UPV.

3 Ahora con la llegada de los ordenadores, existe un abuso de los juegos y programas matemáticos donde el modelo no cambia: el ordenador explica, el número y la intensidad de los estímulos aumenta ... pero en lo básico sigue siendo un modelo que entiende la enseñanza como una transmisión de conocimientos, y que en lo que se refiere al aprendizaje representa un modelo agotado. ¡Es francamente descorazonador ver a alumnos/as delante del ordenador haciendo sumas, restas, multiplicaciones y divisiones! A renglón seguido es necesario decir que también existen buenos programas de construcción y aplicación matemáticas.

4 "La sociedad el siglo XXI en la que vivimos, donde **"parece" que se requiere otro tipo de inteligencia** que no se la del tradicional "trabajador matemático labotioso-aplicador de reglas". **Reducir las Matemáticas a un conjunto de algoritmos es potenciar un tipo de inteligencia y de alumno que está en crisis"**. Jesús Mari Goñi.

5 Los niños/as, al igual que hacen los adultos, son capaces de jugar, especular y operar con ideas que no dominan plenamente de forma conceptual: son capaces de diferenciar y de operar con números sin dominar el sistema de numeración decimal, de hacer cálculos sin comprender todos los entresijos algorítmicos ...

6 La actuación del profesorado irá encaminada a propiciar estos procesos, ya que su labor no consiste únicamente en transmitir conocimientos, sino en presentarlos de manera que puedan suscitar conflictos y aprendizaje/construcción por los alumnos/as.

7 Tomado de Carlos Gallego y del artículo "Maneras curiosas de sumar, restar, multiplicar y dividir", de Luis Segarra (Aula 58).

8 Extraído del artículo de UNO, "Dividir construyendo los números (mentalmente), ¿Una alternariva frente al algoritmo usual de la división?", de Jean-Marie Kraemer.

9 Éste es uno de los trabajos que hemos realizado a lo largo de los dos últimos cursos con Carlos Gallego.

10 Basado Carlos Gallego.

11 Respecto a interpretación de errores en las grafías, se puede entender de la misma manera escribir el 63, poner 603, en castellano o 3203, en euskera.

12 Teniendo en cuenta que el niño ya sabe mucho sobre los números, y que esta manera de proceder es una didáctica pensada para enseñar al que no sabe.

13 Siguiendo a David Barba y Juan Emilio García.

14 **No se debe renunciar a desarrollar la capacidad de resolver problemas**. Será preciso adecuar la dificultad de los problemas.

15 "Identificación, interpretación, análisis y resolución de problemas de la vida cotidiana en los que intervienen operaciones, magnitudes, medidas, situaciones geométricas, espaciales, ..." DCB.

16 Con cariño para todo el profesorado y alumnado, que diariamente trabaja con las matemáticas

NOTA FINAL.- Este artículo tiene, en realidad, muchos autores de los que he aprendido, oyendo o leyendo, y a los que he copiado. Entre los más cercanos debo nombrar a Carlos Gallego, David Barba, Juan Emilio García, Jesús Mari Goñi y, por supuesto, Santiago Fernández; personas con las que tengo el placer de poder hablar y aprender con ellas.

Nikolai I. Lobachevsky (1792-1856)