Unidad 7. Funciones

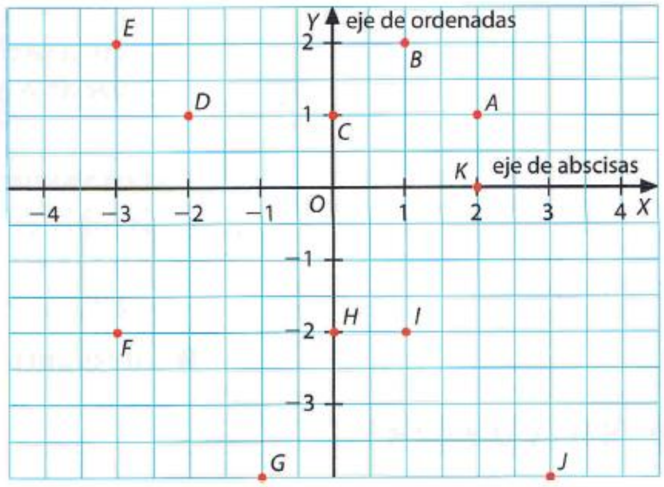
0.Introducción

Los ejes de **coordenadas cartesianas** son dos rectas perpendiculares que se cortan en el **origen de coordenadas, O**.

La recta horizontal recibe el nombre de eje de **abscisas o eje X**, y la vertical, el de eje de **ordenadas o eje Y**.
Cada punto del plano se expresa por un par ordenado de números (a,b) llamados **coordenadas del punto.**

La **abscisa o primera coordenada** del punto, a, es el desplazamiento horizontal del punto desde el origen. Si el desplazamiento es hacia la derecha, la primera coordenada es positiva, y si es hacia la izquierda, negativa.

La **ordenada o segunda coordenada** del punto, b, representa el desplazamiento vertical del punto desde el origen. Si el desplazamiento es hacia arriba, la segunda coordenada es positiva, y si es hacia abajo, negativa.



1. Funciones

Una **función** es una correspondencia entre dos conjuntos tal que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde **un único valor** del conjunto final.

- Los elementos del conjunto inicial forman la **variable independiente**.

- Los elementos del conjunto final forman la **variable dependiente o imagen**.

2. Formas de expresar una función. M

Una función se puede describir de distintas formas: con una **tabla de valores**, con un **enunciado**, con una **fórmula** o con una **gráfica**.

2.1 Mediante una tabla. M

Ejemplo

Luisa prepara un informe sobre cómo varía la temperatura el primer día de primavera. Ha ido anotando la temperatura de cada dos horas en esta tabla:

Hora	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temperatura (°C)	7	5	5	4	5	11	15	17	19	19	18	12	9

Se observa una correspondencia entre la hora, h, y la temperatura, T.

El conjunto inicial está formado por las horas y el conjunto final está formado por las distintas temperaturas.

A cada hora le corresponde una única temperatura, por lo que la correspondencia es una función. Se dice que **la temperatura está en función del tiempo**.

2.2 Mediante un enunciado. M

Ejemplo

A cada persona le corresponde un día de cumpleaños.

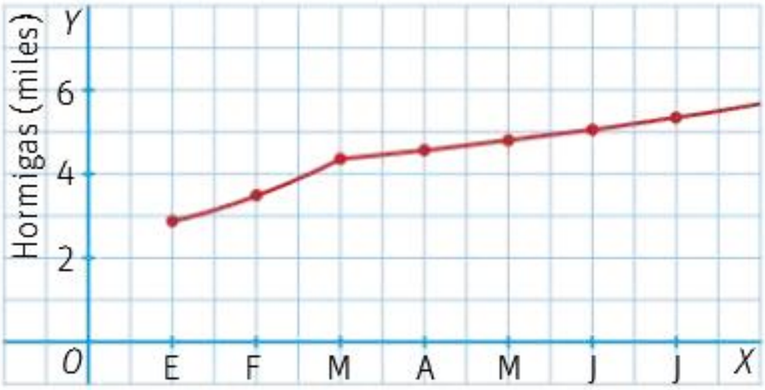
Hay una correspondencia entre el conjunto inicial, personas, y el conjunto final, día del año.

Se trata de una función porque a cada persona le corresponde un único día del año.

2.3 Mediante una gráfica. M

Ejemplo

El crecimiento poblacional de las hormigas de una colonia en los últimos 6 meses viene representado en la siguiente gráfica.



En el eje de abscisas se colocan los valores del conjunto inicial (los meses) y en el eje de ordenadas, el conjunto final (número de hormigas).

A cada mes del año le corresponde un único número de hormigas, por lo que la relación entre ambos es una función.

2.4 Utilizando el lenguaje algebraico. M

Ejemplo

La expresión que hace corresponder a cada número su inverso viene dada por la fórmula $y = \frac{1}{x}$.

Cada número real, excepto el 0, tiene un único inverso, por tanto, la relación entre ambos es una función.

2.5 Obtención de la imagen. M

Dado un valor de la variable independiente (x), para obtener su imagen:

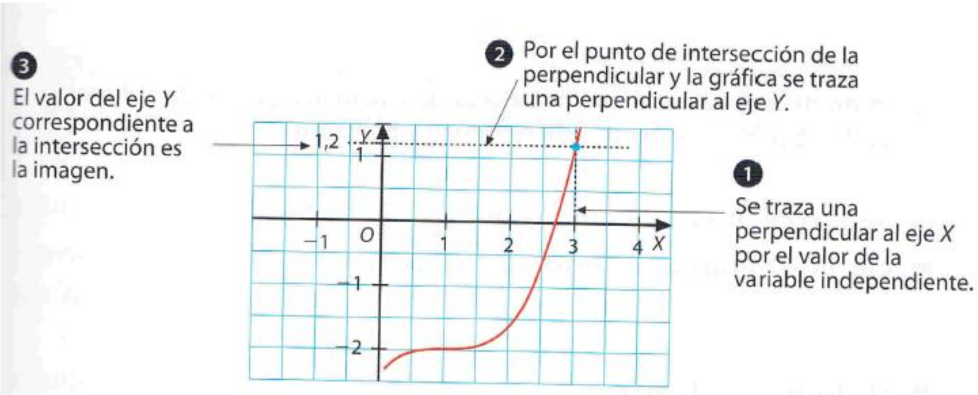
- **Mediante una tabla de valores**

Se busca el valor de la variable independiente (x) en la tabla y se observa cuál es su valor correspondiente.

x	-1	0	3	7
$f(x)$	-3	-1	5	13

La imagen de 0 es $-1 \Rightarrow f(0) = -1$.

- **Mediante una gráfica**



La imagen de 3 es 1,2 ⇒ $f(3) = 1,2$

- **Mediante una expresión algebraica**

Se sustituye el valor de la variable independiente (x) en la expresión y se realizan las operaciones.

$f(x) = 2x + 5$ ⇒ La imagen de 4 es 13, ya que $f(4) = 2 \cdot 4 + 5 = 13$

3 Funciones.

Una función de una variable se puede expresar como ***y = f(x)***.
La variable independiente se suele representar con la letra ***x*** y la variable dependiente o imagen se suele representar con la letra ***y*** o con ***f(x)***.

Ejemplo

El área de un cuadrado se expresa como $y = x^2$

La longitud del lado es la variable independiente, representada por x, y la variable dependiente, representado por y, es el área, que depende de la longitud de lado.

3.1 Tabla de valores y gráfica de una función. M

A partir de una fórmula se puede construir una tabla de valores. Se sustituyen los valores de la variable independiente (x), en la fórmula y se obtienen los valores de la variable dependiente o imagen (y).

Ejemplo

En el ejemplo anterior, la tabla que representa la función $y = x^2$ es:

Longitud del lado (x)	Área ($y = x^2$)	(x, $f(x)$)
0,5	$y = (0{,}5)^2 = 0{,}25$	(0,5; 0,25)
2,5	6,25	(2,5; 6,25)
3	9	(3, 9)

Si se representan los valores de la tabla como puntos en unos ejes de coordenadas se obtiene la gráfica de la función de forma aproximada.

- Los valores de la variable independiente x se representan sobre el eje de abscisas.
- Los valores de la variable dependiente $y = f(x)$ se representan sobre el eje de ordenadas.

La **gráfica de una función** es la representación en los ejes de coordenadas de los puntos de la forma *(x, y)*, donde *y = f(x)*.

3.2 Funciones definidas a trozos.

En ocasiones, las funciones tienen expresiones diferentes para distintos valores de la variable independiente (x). Estas funciones se llaman **funciones definidas a trozos**.

Ejemplo

Una empresa de mensajería cobra por enviar un paquete 2 € más un extra por cada gramo según las siguientes tarifas:

Gramos	De 0 a 400	Más de 400
€/gr	0,01	0,02

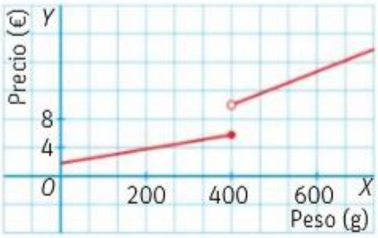
La fórmula para calcular el precio en función del peso viene dada por la expresión:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + 0{,}01x & \text{si} \quad 0 < x \leq 400 \\ 2 + 0{,}02x & \text{si} \quad 400 < x \end{cases}$$

Al representar una función definida a trozos, hay que tener en cuenta a qué parte pertenece el valor extremo.

Ejemplo

En el ejemplo anterior, el valor 400 pertenece al primer trozo y el punto se representa en ese tramo con un punto "relleno". En el segundo tramo también se representa el valor 400 pero con un punto "hueco".



4. Dominio y recorrido de una función. M

4.1 Dominio de una función. M

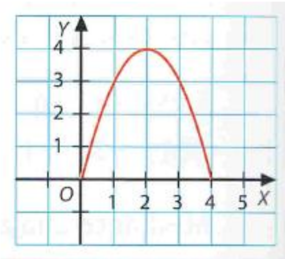
El conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente (x) se llama **dominio de la función**. Se puede representar como ***D(f)*** o ***Dom(f)*.**

El dominio de una función se puede calcular mediante dos procedimientos:

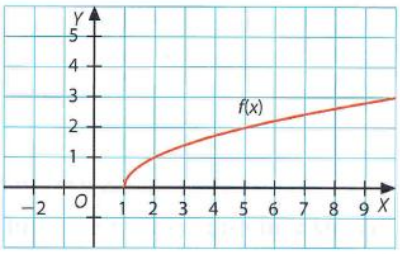
a) De forma gráfica

Se observan los valores de x que tienen imagen f(x).

Ejemplos:



Dom f(x) = [0, 4]



Dom f(x) = [1,10]

b) De forma algebraica.

Se analiza cuáles son los valores de la variable independiente (x) para los que se puede calcular su imagen f(x).

- Si *f(x)* es un polinomio, entonces Dom f(x) = $\mathbb{R}$

- Si *f(x)* $=\frac{P(x)}{Q(x)}$, para calcular su dominio se resuelve la ecuación *Q(x) = 0*. De esta forma se calculan los valores de x para los que el denominador de su imagen es 0, y por tanto, no se van a poder calcular.

Ejemplos

f(x) = $3x^2 + 1 \Rightarrow$ Dom f(x) = $\mathbb{R}$ o $(-\infty, +\infty)$

f(x) = $7x^4 + 2x - 6 \Rightarrow$ Dom f(x) = $\mathbb{R}$ o $(-\infty, +\infty)$

f(x) = $\frac{3}{x} \Rightarrow x = 0 \rightarrow$ Dom f(x) = $\mathbb{R} - \{0\}$

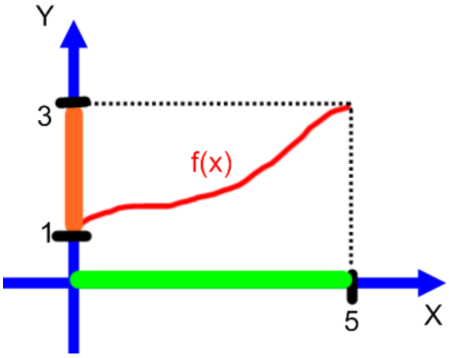
f(x) = $\frac{2x}{x-3} \Rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow$ Dom f(x) = $\mathbb{R} - \{3\}$

f(x) = $\frac{2x+1}{x^2-4} \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \rightarrow$ Dom f(x) = $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$

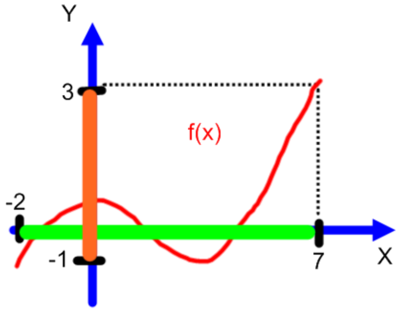
4.2 Recorrido o imagen de una función. M

El conjunto de los valores que toma la variable dependiente se llama **recorrido de la función**. Se puede representar como *R(f)* o *Img (f).*

Ejemplos



Dom f(x) = [0, 5] Rec f(x) = [1, 3]



Dom f(x) = [-2, 7] Rec f(x) = [-1, 3]

5. Puntos de corte con los ejes. M

5.1 Cortes con el eje de abscisas (Eje X). M

Los puntos de corte con el eje X son puntos de la forma $(x_o, 0)$.

Para calcular los valores de x_o se resuelve la ecuación *f(x) = 0*

5.2 Corte con el eje de ordenadas (Eje Y). M

Los puntos de corte con el eje Y son de la forma $(0, y_o)$.

El valor de yo se obtiene calculando *f(0)*, es decir, *f(0) = y_o*.

Ejemplos

f(x) = 3x + 2

- Cortes con el eje de abscisas (X)

$$3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

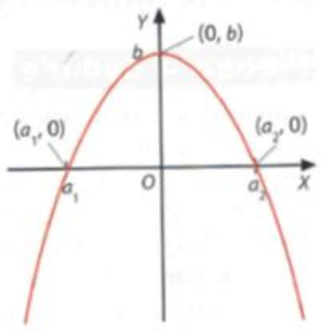
$$\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$$

- Corte con el eje de ordenadas (Y)

$$f(0) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$(0, 2)$$

Gráficamente sería:



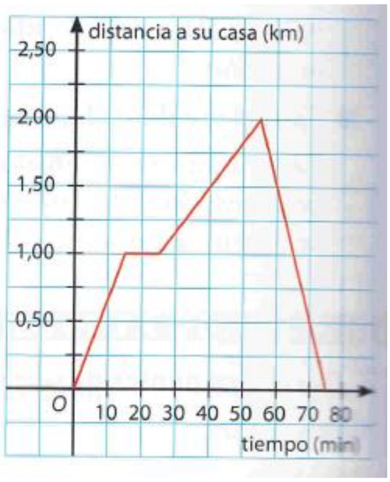
Cortes con el eje X → $(a_1, 0)$ y $(a_2, 0)$

Cortes con el eje Y → (0, b)

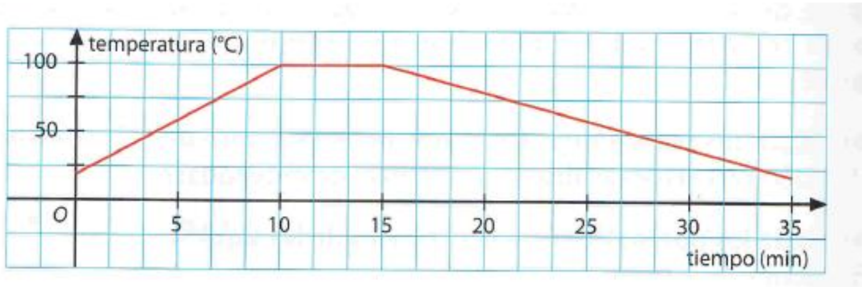
6. Monotonía y extremos relativos. M

6.1 Crecimiento y decrecimiento de una función. M

El crecimiento y decrecimiento de una función se expresa mediante los intervalos formados por los valores de la variable independiente (x).



Esta función es creciente en los intervalos (0, 15) U (25, 55), es decreciente en el intervalo (55, 75) y es constante en el intervalo (15, 25).

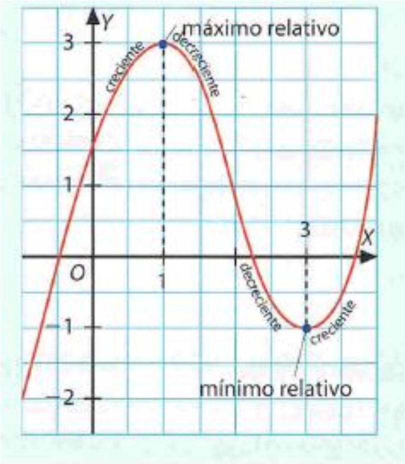


Esta función es creciente en el intervalo (0, 10), es constante en el intervalo (10, 15) y decreciente en el intervalo [15, 35]

6.2 Extremos relativos: máximos y mínimos. M

Los **extremos relativos** de una función f(x) son los puntos de la gráfica en los que la función pasa de ser creciente a ser decreciente o viceversa.
- Si pasa de ser creciente a ser decreciente, el extremo se llama **máximo relativo**.
- Si pasa de ser decreciente a ser creciente, el extremo se llama **mínimo relativo**.

Ejemplo

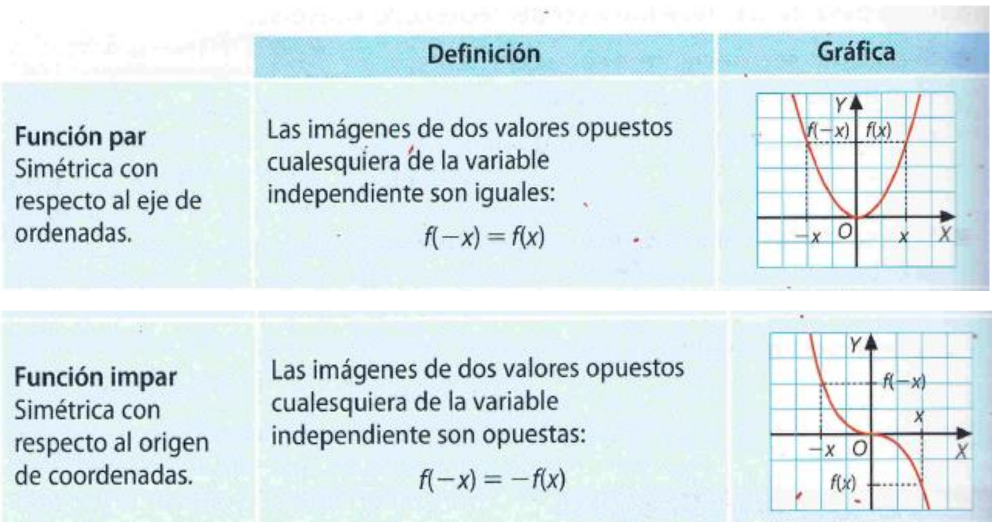


Esta función tiene un máximo relativo en el punto (1, 3) y un mínimo relativo en el punto (3, -1). Otra forma de expresar los extremos relativos es que la función alcanza un máximo relativo en x = 1 y un mínimo relativo en x = 3.

En cuanto a la monotonía, f(x) es creciente en los intervalos (- 1, 1) U (3, 4) y es decreciente en el intervalo (1, 3).

7. Simetría, periodicidad y continuidad.

7.1 Simetría.



	Definición	Gráfica
Función par Simétrica con respecto al eje de ordenadas.	Las imágenes de dos valores opuestos cualesquiera de la variable independiente son iguales: $f(-x) = f(x)$	
Función impar Simétrica con respecto al origen de coordenadas.	Las imágenes de dos valores opuestos cualesquiera de la variable independiente son opuestas: $f(-x) = -f(x)$	

Si tenemos la expresión algebraica de la función:

- $f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x)$

La gráfica es simétrica respecto del eje de ordenadas, y la función es par.

- f(x) = x^3 +1 $\Rightarrow \begin{cases} f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x \\ -f(x) = -(x^3 + x) = -x^3 - x \end{cases} \Rightarrow$ f(-x) = - f(x)

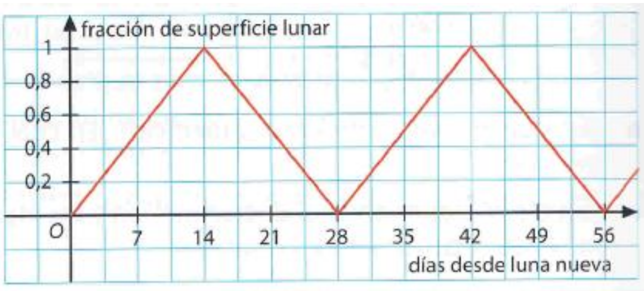
La gráfica es simétrica respecto del origen de coordenadas, y la función es impar.

7.2 Periodicidad.

Una función es **periódica de periodo T** si la forma de la gráfica se repite cada T unidades de la variable independiente (x), es decir, si la gráfica para los valores del intervalo [0, T] es la misma que en los intervalos [T, 2T]; [2T, 3T]……..

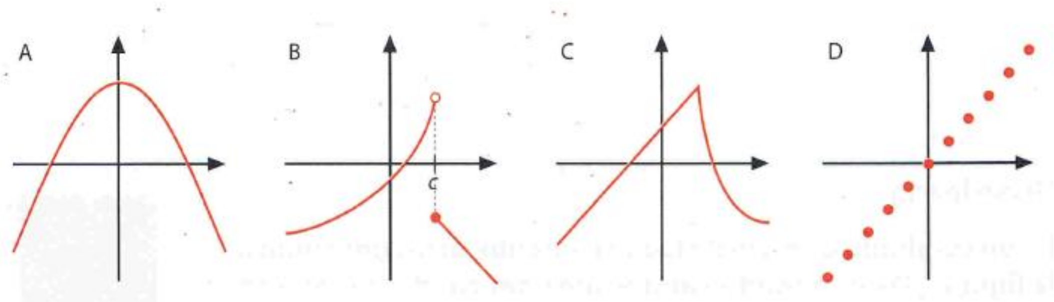
Ejemplo:

La función que relaciona la fracción de superficie lunar que se observa desde la Tierra con el día del mes.



La función es periódica y su periodo es 28 días.

7.3 Continuidad. M

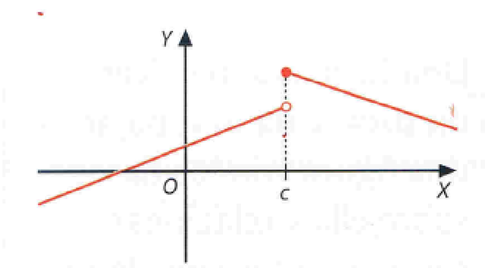


Las funciones A y C son continuas.

La función B es discontinua en x = c. En este caso se dice que la función presenta un salto finito en x = c.

La función D solo está definida para los números enteros.

Una función es **continua** cuando no presenta discontinuidades, es decir, su gráfica no tiene ningún salto.



Esta función es discontinua en x = c.