**Monografía**
Competencia numérica
y cálculo mental

# El desarrollo del pensamiento multiplicativo

**Enrique Castro Martínez**
**Elena Castro Rodríguez**
Universidad de Granada

*Se ha resaltado, en la literatura especializada en el tema, que la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo es uno de los principales escollos en el aprendizaje de las matemáticas escolares en los últimos cursos de primaria y en los primeros cursos de secundaria. También se ha subrayado que los niños desarrollan progresivamente su pensamiento multiplicativo a lo largo de un periodo dilatado de tiempo, y es conveniente que el profesor conozca la forma en la que se produce este desarrollo, las grandes etapas que se dan en él y los obstáculos con los que se tropiezan. En este artículo subrayamos algunos de los aspectos del desarrollo temprano del pensamiento multiplicativo, resaltando su diferencia con respecto al razonamiento aditivo y aportando información para una toma de decisiones en el desarrollo curricular de esta temática. Analizamos el origen del pensamiento multiplicativo con el objetivo de clarificar su naturaleza y exponemos resultados de investigaciones que apuestan porque este origen se encuentra en el esquema de correspondencia uno-a-muchos.*

Palabras clave: *pensamiento multiplicativo, desarrollo pensamiento numérico, desarrollo curricular.*

**Developing multiplicative thought**
*Specialist literature has stressed the fact that the transition from additive thought to multiplicative thought is one of the major hurdles in learning mathematics in the final years of primary and first years of secondary school. Attention has also been drawn to the fact that children progressively develop multiplicative thought over a long period of time and it is extremely useful for teachers to be aware of how this development takes place, the key stages it contains and the obstacles that hamper progress. In this article we look at some of the aspects of early development of multiplicative thought and stress their difference with respect to additive reasoning and offer information for taking informed decisions in developing this subject in the curriculum. We also analyse the origin of multiplicative thought in order to clarify its nature and we set out the findings of research that reveal why this origin is found in the correspondence scheme of one-to-many.*

Keywords: *multiplicative thought, development of numerical thought, curricular development.*

Durante su etapa escolar, los estudiantes dedican una gran cantidad de tiempo al aprendizaje de los conceptos, relaciones y operaciones aritméticas, así como a desarrollar su capacidad para aplicar lo aprendido para resolver problemas. Todo ello contribuye a conformar el pensamiento numérico de los estudiantes, que será más rico en función de las estructuras conceptuales desarrolladas por los estudiantes, y su capacidad para movilizarlas en la resolución de problemas.

El pensamiento numérico es muy complejo, no se adquiere «de golpe», se requiere un amplio periodo de tiempo. Por ello, los expertos lo dividen en partes para su estudio. Dos de esas partes se han caracterizado en función de las dos estructuras conceptuales básicas: la aditiva y la multiplicativa. Cada una de ellas lleva asociada, o ha dado nombre, a un tipo de pensamiento: el pensamiento aditivo y el pensamiento multiplicativo, que juegan un papel importante en el aprendizaje de los niños en los primeros niveles escolares.

En el ámbito escolar, se trabaja en primer lugar el pensamiento aditivo y en una etapa posterior el multiplicativo. Algunos investigadores han puesto en entredicho esta secuencialidad, postulando que el conocimiento matemático de los niños es más amplio de lo que tradicionalmente se ha pensado, y afirman que el pensamiento multiplicativo se encuentra ya en los niños mucho antes de que se aborde su enseñanza en la escuela (Kouba, 1989). Incluso hay estudios que muestran la capacidad de los niños menores de 6 años para resolver problemas de estructura multiplicativa (Carpenter y otros, 1993). Esta idea es importante desde el punto de vista del constructivismo, como teoría del aprendizaje, puesto que en él se sostiene que los niños adquieren conocimiento de las matemáticas añadiendo algo a su conocimiento preexistente y reorganizándolo (Hiebert y Carpenter, 1992).

Pero, ¿qué es el pensamiento multiplicativo? ¿Y el pensamiento aditivo? El pensamiento multiplicativo se caracteriza por:

- La capacidad para trabajar de forma flexible y eficiente con un amplio espectro de números (por ejemplo, números naturales, enteros, decimales, fracciones, razones, y porcentajes).
- La capacidad de reconocer y resolver una serie de problemas que involucran la multiplicación o división, incluyendo los problemas de proporcionalidad directa e inversa.
- Los medios para comunicar esto de manera efectiva en una variedad de formas (por ejemplo, palabras, diagramas, expresiones simbólicas, y algoritmos escritos).

En resumen, el pensamiento multiplicativo está caracterizado por la capacidad para trabajar de forma flexible con los conceptos, estrategias y representaciones de la multiplicación (y división) que se producen en una amplia gama de contextos (Simeón y otros, 2008). El pensamiento aditivo se caracteriza, de igual manera, intercambiando en la definición anterior las operaciones de multiplicar y dividir por las de sumar y restar.

**Imagen 1.** Pensamiento aditivo (3 + 3 + 3 + 3)


Varios investigadores han resaltado la importancia de distinguir entre pensamiento aditivo y pensamiento multiplicativo (Clark y Kamii, 1996; Jacob y Willis, 2001). Para Clark y Kamii, la adición repetida es diferente de la multiplicación porque conlleva pensamiento jerárquico. Como vemos en la imagen 1, la estructura de adición repetida 3 + 3 + 3 + 3 es más simple porque conlleva sólo un nivel de abstracción.

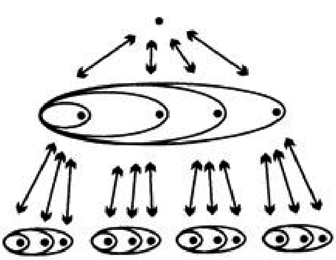
Por otro lado, la multiplicación 4 x 3 conlleva la estructura jerárquica mostrada en la imagen 2. Para interpretarla correctamente el niño debe ser capaz de transformar «tres unos» en «un tres», considerado como una unidad de orden superior.

Sowder (2002) proporciona un ejemplo clarificador de la diferencia entre pensamiento aditivo y multiplicativo empleando un contexto de inversión:

> Una persona invierte 2 euros y obtiene 8 euros, mientras que otra persona invierte 6 euros y obtiene 12 euros. ¿Cuál ha sido la mejor inversión?

Una típica solución de un estudiante empleando pensamiento aditivo es calcular la diferencia entre lo invertido y lo obtenido y concluir que las dos inversiones son iguales porque la ganancia obtenida en ambos casos es 6 euros. Los estudiantes que emplean razonamiento multiplicativo, pueden apreciar que la primera inversión cuadriplica lo invertido, mientras que la segunda sólo lo duplica, de manera que la primera inversión es mejor.

**Imagen 2.** Pensamiento multiplicativo (4 x 3)



El pensamiento multiplicativo ha sido objeto de investigaciones en los últimos años. Un buen número de ellas se ha centrado en el estudio de la estructura multiplicativa y se ha enfocado desde una perspectiva avanzada (Nesher, 1988; Vergnaud, 1988), desde la perspectiva del pensamiento adulto, y poco se ha estudiado sobre cómo los niños construyen el pensamiento multiplicativo en los primeros niveles de la escolaridad (Clark y Kamii, 1996; Fuson, 2003; Mulligan y Mitchelmore, 1997).

## El origen del pensamiento multiplicativo

Se han propuesto dos teorías alternativas para explicar el origen del pensamiento multiplicativo en los niños. La primera sugiere que el concepto de multiplicación se desarrolla a partir de la adición repetida, y la segunda sostiene que la adición repetida es sólo un cálculo y que la comprensión de la multiplicación tiene sus raíces en el esquema de correspondencia.

La primera es la teoría *implícita* que subyace en la práctica educativa de muchos países. En ellos, la experiencia escolar muestra que a los alumnos se les enseña la multiplicación como una forma de simplificar una adición repetida, con el fin de agilizar y hacer más fácil el cálculo. Bajo este enfoque, la división puede introducirse también ligada a una sustracción reiterada. Sin embargo, desde esta perspectiva, suele ser más frecuente hacerlo como una operación que da respuesta a operaciones de reparto equitativo. Esta teoría fue formalizada por Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985), que propusieron que cada operación aritmética tiene asociado un modelo implícito y que el modelo implícito asociado a la multiplicación es la adición repetida.

> *Cada operación básica de la aritmética generalmente está unida a un modelo intuitivo primitivo, inconsciente e implícito. La identificación de la operación necesaria para resolver un problema con dos datos numéricos no se realiza directamente sino mediatizada por el modelo. El modelo impone sus propias restricciones en el proceso de búsqueda.* (Fischbein y otros, 1985, p. 4)

Cuando se resuelven problemas, los autores de esta teoría asumen que los modelos imponen una serie de restricciones a los números utilizados y a su papel en la estructura del problema. Si los datos del problema son números que violan alguna de estas restricciones, el resolutor tendrá dificultades para elegir la operación aritmética apropiada.

Suponen que el modelo primitivo asociado con la multiplicación es el de *adición repetida*, en el cual un número de conjuntos de igual tamaño se ponen juntos. El modelo de adición repetida no es conmutativo y el multiplicador y el multiplicando juegan papeles diferentes y, como consecuencia, este modelo de multiplicación lleva asociados dos modelos de división: *división partitiva* y *división cuotitiva.*

Fischbein y otros (1985) contrastan estas hipótesis con escolares italianos de 11 a 15 años de edad. En el caso de la multiplicación concluyen:

> *[...] el papel de los números decimales en la estructura de un problema de multiplicación es claramente decisiva en la elección de la operación. Un problema de multiplicar es claramente más difícil cuando el operador es un número decimal (puesto que viola las restricciones del modelo.* (Fischbein y otros, 1985, p. 11)

En la interpretación de la multiplicación como adición repetida, las restricciones impuestas a los números por el modelo son: el operador deberá ser un número natural y el producto deberá ser más grande que el operando.

En el caso de la división concluyen:

> *[...] hay solamente un modelo primitivo intuitivo para los problemas de división: el modelo partitivo. Con la instrucción, los niños adquieren un segundo modelo intuitivo: el modelo cuotitivo.* (Fischbein y otros, 1985, p.14)

En la interpretación partitiva de la división, el divisor deberá ser un número natural y ambos, divisor y cociente, deberán ser más pequeños que el dividendo. En la interpretación cuotitiva de la división, hay sólo una restricción: el divisor deberá ser más pequeño que el dividendo.

Dan dos explicaciones plausibles sobre el origen de estos modelos primitivos. Una es que reflejan el modo en que son enseñadas las operaciones en la escuela. Otra es que reflejan características primarias, naturales y básicas de la conducta humana.

Los resultados de Nesher (1988) no validan la teoría de los modelos implícitos primitivos. Según ella:

> *[...] el fenómeno demostrado por Fischbein es un reflejo de la introducción explícita en la escuela del modelo de adición repetida como el primer y más dominante tipo de multiplicación más que un reflejo de un modelo psicológico implícito.* (Nesher, 1988, p. 31)

## Unidades compuestas

Una variante teórica del modelo de la multiplicación como adición repetida ha sido elaborada por Steffe (1994), que propone que el origen de la comprensión de la multiplicación está en la construcción por parte del aprendiz de lo que él llama «unidad compuesta», es decir, una unidad compuesta a su vez de unidades de orden inferior. Esta unidad compuesta es la que se añade repetidamente en la multiplicación.

La reiteración de la unidad 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 está no sólo en el origen del número, en este caso del siete, sino también en el origen de la multiplicidad: 7 es 7 veces 1, es decir, 7·1. Un paso importante se da cuando la unidad no es de primer orden, sino que está constituida por un grupo de objetos. El aprendiz tiene que asumir que todos los grupos son unidades homogéneas del mismo orden y de la misma naturaleza, lo que supone asumir una regularidad en los grupos de objetos.

## El esquema de correspondencia

Piaget y Szeminska (1975) estudiaron el esquema de correspondencia como el origen del razonamiento multiplicativo con niños de 5 a 7 años. Afirman que las primeras ideas de los niños sobre la multiplicación surgen del esquema de correspondencia y su empleo en inferencias transitivas. Sostienen la hipótesis de que si los niños entienden que A = B y C = B, entonces A = C, deberían ser capaces de entender que si A = 2B y A = C, entonces C = 2B.

El método utilizado por Piaget y Szeminska en la investigación sobre la comprensión de estas relaciones consistía en pedir a los niños que establecieran dos tipos de correspondencias: correspondencias uno-a-uno y correspondencias uno-a-muchos. En su conjunto, el estudio de estas relaciones consta de cinco pasos:

1. Primero, piden a los niños que establezcan una correspondencia entre un conjunto de vasos y un conjunto de flores rojas, para ello se les dice a los niños que coloquen flores rojas en vasos.
2. Inmediatamente, retiran las flores rojas y piden a los niños que coloquen una flor azul más pequeña que las rojas en cada vaso, con el fin de que establezcan una correspondencia entre el conjunto de flores azules y el mismo conjunto de vasos. Las flores rojas y azules eran de tamaños diferentes para que los niños no pudiesen comparar fácilmente el número de flores de los dos conjuntos La conclusión de que los dos conjuntos de flores son iguales pasa por entender la correspondencia uno-a-uno.
3. Seguidamente, preguntaron a los niños si el número de flores rojas y azules era el mismo. A partir de las respuestas dadas, Piaget y Szeminska clasifican los resultados en dos categorías:
   - Que los niños en función de las correspondencias establecidas entre flores y vasos infiera que los dos conjuntos de flores son iguales.
   - Que los niños fallen, porque no reconocen la necesidad de esta equivalencia numérica, a pesar de la intervención del entrevistador, insistiendo en que las flores de cada color podrían colocarse nuevamente en los vasos, colocando una flor en cada vaso.
4. A continuación, proponen a los mismos niños una nueva tarea que, para resolverla, se emplea el razonamiento: Si A = 2B y C = A, entonces C = 2B. Preguntaron a los niños cuántas flores habría en cada uno de los vasos si se colocaran todas las flores, las rojas y las azules, de tal manera que estuviesen igualmente distribuidas en los vasos.
5. Finalmente, las flores se dejaron a un lado, y los vasos permanecieron a la vista de los niños para realizar una tarea nueva, que consistiría en coger de una caja de tubos finos un cierto número

> C de tubos, de modo que hubiese un tubo para cada flor. Con esta tarea, querían verificar si los niños veían la necesidad de utilizar el doble de tubos en relación al de vasos (C = 2B).

Piaget y Szeminska observaron que los niños que inferían correctamente que había el mismo número de flores de color rojo y azul, seleccionaban el número de tubos adecuado, colocando dos tubos en correspondencia con cada vaso. Concluyeron que la comprensión de la correspondencia por parte de los niños es la base para que realizasen correctamente un razonamiento multiplicativo.

Los pocos estudios posteriores efectuados al respecto corroboran estas afirmaciones de Piaget y Seminska. Por ejemplo, Park y Nunes (2001) comparan las dos hipótesis alternativas que se han ofrecido para explicar el origen de la multiplicación en el razonamiento de los niños: la primera, que considera que el concepto de multiplicación tiene su origen en la adición repetida, y la segunda, que considera que tiene sus raíces en el esquema de correspondencia. Aplicaron dos tipos de tratamientos a niños de 6 años, en los que emplearon tareas similares a las de las imágenes 3 y 4.

**Imagen 3.** Ejemplo de ítems de adición repetida: Juan tiene 3 coches. María tiene 3 muñecas. ¿Cuántos juguetes tienen en total?

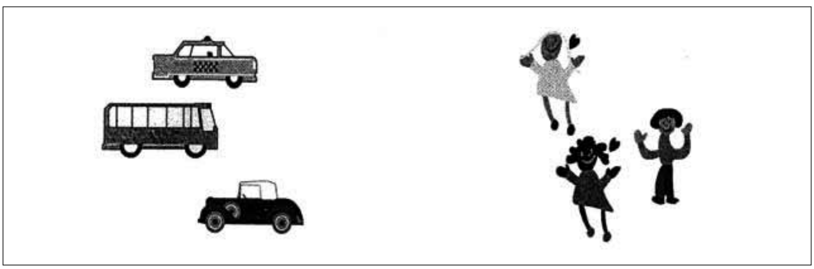


**Imagen 4.** Ejemplo de ítems de correspondencia uno-a-muchos: Anita está cocinando 2 ollas de sopa de tomate. Quiere poner 3 tomates en cada olla. ¿Cuántos tomates necesita?

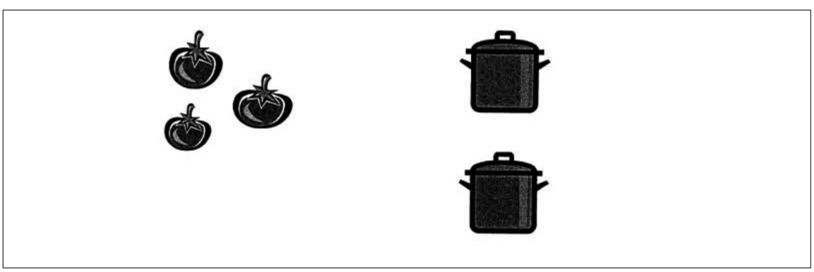
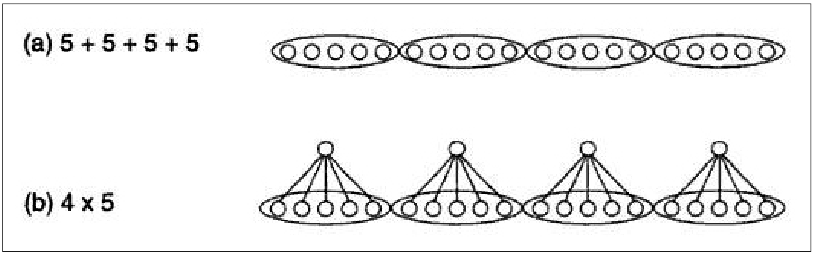


**Imagen 5.** Adición repetida y multiplicación (correspondencia uno-a-muchos)




Estas tareas corresponden a un modelo de adición repetida y a un modelo de correspondencia un-a-muchos. Estos dos modelos están esquematizados en la imagen 5.

Aplicaron un pretest y un postest a los niños y concluyeron que los datos soportaban la hipótesis de que el origen del concepto de multiplicación está en el esquema de correspondencia uno-a-muchos.

Los ítems incluidos en el pretest y en el postest de la investigación de Park y Nunes (2001) fueron problemas verbales de clasificados como problemas de razonamiento aditivo y razonamiento multiplicativo. Un ejemplo de ítem de *razonamiento multiplicativo:*

> La abuela de Ana fue de compras por Navidad. Compró 7 cajas de regalos para sus nietos. Cada caja contiene 2 juguetes. ¿Cuántos juguetes ha comprado en total?

Nesher (1988) analiza este tipo de problemas. Desde un enfoque lingüístico clasifica los problemas verbales de estructura multiplicativa en tres categorías: *mapping rule*, problemas de *comparación multiplicativa* y problemas de *multiplicación cartesiana*. De ellas, considera que la categoría de problemas más fácil para los niños es la de *mapping rule*. Los problemas utilizados en los test de Park y Nunes (2001) bajo el título de razonamiento multiplicativo corresponden o caen bajo la categoría *mapping rule* (regla de correspondencia). La estructura lingüística básica de estos problemas contiene tres proposiciones:

- Una proposición declarativa: compra 7 cajas.
- Una regla de correspondencia: 1 caja - 2 caramelos.
- Una pregunta: ¿Cuántos compra?

Así pues, Nesher identifica el tipo de situación más sencilla de multiplicación con aquellas en las que existe una correspondencia una-a-muchos entre dos conjuntos. Estas situaciones son muy familiares para los niños:

- Un automóvil tiene cuatro ruedas (1-4).
- Un niño tiene dos ojos (1-2).
- Una silla tiene cuatro patas (1-4).

Y lo que las caracteriza es una relación invariante entre dos cantidades, o mejor dicho, entre las cantidades de dos magnitudes $M_1$ y $M_2$. Esta relación constante, conocida como razón, es la esencia del concepto de multiplicación que, matemáticamente, se simboliza como $y = f(x)$. La formulación que da Vergnaud (1988) a este tipo de problema es

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \\ x & & y = f(x) = a \cdot x \end{array}$$

a los que denomina *isomorfismo de medidas*, pues cumple las condiciones de un isomorfismo entre dos magnitudes:

$$f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$
$f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$, donde a es un escalar.

Bajo este esquema ($x$ - $a$ - $y$) la división cuotitiva se presenta en las situaciones en la que se desconoce el escalar $a$ y se conocen las cantidades $x$ e $y$. Así mismo, la división partitiva corresponde con desconocer la cantidad $x$, conociendo el escalar $a$ y la otra cantidad y (más información en Castro, 2001; Puig y Cerdán, 1988).

*Referencias bibliográficas*

CARPENTER, T.P., y otros (1993): «Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes». *Journal for Research in Mathematics Education*, núm. 25, pp. 42-440.

CASTRO, E. (ed.) (2001): *Didáctica de la matemática en la educación primaria.* Madrid. Síntesis.

CLARK, F.B.; KAMII, C. (1996): «Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5». *Journal for Research in Mathematics Education*, núm. 27(1), pp. 41-51.

FISCHBEIN, E., y otros (1985): «The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division». *Journal for Research in Mathematics Education*, núm. 16(1), pp. 3-17.

FUSON, K.C. (2003): «Toward computation fluency in multidigit multiplication and division». *Teaching Children Mathematics*, núm. 9(6), pp. 300–305.

HIEBERT, J.; CAMPERTER, T. (1992): «Learning and teaching with understanding», en GROWS, D.A. (ed.): *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Nueva York. MacMillan, pp. 65-97.

JACOB, L.; WILLIS, S. (2001): «Recognising the difference between additive and multiplicative thinking in young children», en BOBIS, J.; PERRY, B.; MITCHELMORE, M. (eds.): *Numeracy and Beyond*. Sydney. Merga, pp. 306-313.

KOUBA, V.L. (1989): «Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems». *Journal for Research in Mathematics Education*, núm. 20, pp. 147-158.

MULLIGAN, J.T.; MITCHELMORE, M.C. (1997): «Young children's intuitive models of multiplication and division». *Journal for Research in Mathematics Education*, núm. 28, pp. 309-330.

NESHER, P. (1988): «Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings», en HIEBERT, J.; BEHR, M. (eds.): *Number concepts and operations in the middle grades.* Hillsdale. Lawrence Erlbaum, pp. 41-52.

PARK, J.H.; NUNES, T. (2001): «The development of the concept of multiplication». *Cognitive Development*, núm. 16, pp. 763-773.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. (1975): *Génesis del número en el niño.* Buenos Aires. Guadalupe.

PUIG, L.; CERDÁN, F. (1988): *Problemas aritméticos escolares.* Madrid. Síntesis.

SIEMON, D., y otros (2008): *The derivation of a learning assessment framework for multiplicative thinking* [en línea]. <www.eduweb.vic.gov.au/edulibrary/public/teachlearn/student/ppderivationlaf.pdf>. [Consulta: diciembre 2009]

SOWDER, J. (2002): «Introduction», en LITWILLER, B.; BRIGHT, G. (eds.): *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions.* Reston. National Council of Teachers of Mathematics, pp. 1-2.

STEFFE, L.P. (1994): «Children's multiplying schemes», en HAREL. G.; CONFREY, J. (eds.): *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.* Albany. State University of New York Press, pp. 3-39.

VERGNAUD, G. (1988): «Multiplicative structures», en HIEBERT, J.; BEHR, M. (eds.): *Number concepts and operations in the middle grades. Reston.* National Council of Teachers of Mathematics, pp. 141-161.

*Referencias de los autores*

*Enrique Castro Martínez*
Universidad de Granada
*ecastro@ugr.es*
*Línea de trabajo:* pensamiento numérico.

*Elena Castro Rodríguez*
Universidad de Granada
*elcr@correo.ugr.es*
*Líneas de trabajo:* pensamiento numérico y formación del profesorado.

Este artículo fue solicitado por UNO. REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS en octubre de 2009 y aceptado en febrero de 2010 para su publicación.