

INTRODUCCIÓN.

Operaciones o “cuentas”. Una práctica obsoleta.

A los algoritmos tradicionales de sumar, restar, multiplicar y dividir se les sigue dedicando mucho tiempo en nuestras escuelas. La actual metodología del cálculo responde a un planteamiento muy obsoleto, alejado de las necesidades de la sociedad y del alumno, y que gasta un tiempo precioso en que el niño aprenda algo que no va a volver a utilizar cuando sea mayor.

Se suele olvidar que los actuales formatos de las operaciones básicas tienen siglos de historia, que no se crearon teniendo en cuenta la psicología de los niños ni con el fin de conseguir un mayor desarrollo intelectual de los mismos, sino para resolver cálculos adultos, para solucionar estimaciones y transacciones, para poder llevar las contabilidades de empresas y administraciones. Tal y como eran se introdujeron en la escuela, y se han venido enseñando según su lógica y al margen de las características de aprendizaje de la edad de los alumnos que los aprendían.

Desde hace muchos años se vienen escuchando voces muy autorizadas que advierten de los peligros de estas prácticas, ancladas en épocas muy remotas, y el lastre que su aprendizaje supone. Los algoritmos que se utilizan en nuestras escuelas presentan unos formatos rancios, altamente inadecuados para el desarrollo de la más mínima competencia matemática, y que sólo sirven engordar la memoria de significantes. Exigen un modo de operar sin flexibilidad, sin control de los cálculos intermedios, con desprecio del sentido del número. Es un modo de trabajar el cálculo que se origina en unos momentos históricos en los que las exigencias matemáticas de los escolares y la utilización de las destrezas del cálculo en la vida profesional eran absolutamente diferentes a las necesidades y a los medios de hoy en día.

En ocasiones la cuestión no es que los docentes no estemos convencidos de muchas de las desventajas de las cuentas, sino que no se conoce una alternativa, una metodología distinta. Porque, naturalmente, los niños tienen que calcular, alumnos y alumnas han de hacer operaciones numéricas. El mismo Freinet le daba al cálculo numérico respecto al aprendizaje de las matemáticas el mismo valor que tiene el solfeo respecto al aprendizaje de la música. Si una de las tareas de la educación es que el niño cree abstracciones, emplee modelos formales susceptibles de aplicarse a un sin fin de situaciones, las operaciones responden a esa exigencia: resuelven toda una categoría de problemas que sólo difieren entre sí por tener distintos datos, pero que están relacionados por las mismas leyes. Y hay que hacer operaciones para que los números adquieran sentido y ganen potencialidad, para que se combinen entre sí y se establezcan redes de conexiones que permiten descubrir, estudiar y utilizar estructuras matemáticas.

Pero conseguir lo anterior es imposible con la metodología actual del cálculo, porque contamina todos los restantes procesos y los echa a perder. No es posible la renovación de la enseñanza de la matemática ni la elevación de su nivel de aprendizaje si no se remueve con energía y se cambia por completo la enseñanza del cálculo con las actuales operaciones.

Hacia una alternativa.

Denunciar la obsolescencia de las prácticas algorítmicas escolares no es defender que los escolares no tengan que realizar cálculo alguno. Los niños tienen que aprender a calcular y a estimar, pero de otra forma más comprensiva, conectada con la realidad y con capacidad de transferencia a conceptos matemáticos superiores. No se trata de suprimir el cálculo ni de sustituirlo por las calculadoras. Se trata de introducir otros modelos de “cuentas”, otro formato de realización de operaciones. Es hora de renovar por completo al enseñanza del cálculo, de cambiar el modelo de algoritmo, de transformar su formato para que el mismo facilite la resolución de problemas y, por ende, la mejora del alumno en sus competencias básicas.

El método de cálculo ABN (**A**bierto **B**asado en **N**úmeros) se ocupa específicamente de este aspecto. Desarrolla en las aulas los nuevos modelos de algoritmos, su relación con los problemas, su enraizamiento en el sistema de numeración, la preeminencia de los cálculos basados en el sentido numérico (y no en el aprendizaje memorístico de significantes), la utilización de métodos transparentes y llenos de sentido, con capacidad de adaptación a los ritmos y capacidades de los alumnos.

Innovación y práctica docente.

Corren tiempos en los que se pone en duda si la técnica docente es o no necesaria. No hace mucho vimos las protestas de varios catedráticos de universidad, que consideraban que en el contenido de la formación de los profesores de secundaria no deberían estar presentes estas técnicas, sino que únicamente se debería ahondar en el conocimiento noético de la materia. En el resto de las situaciones y problemas que se pudieran plantear en el desarrollo y ejercicio de la tarea docente, el profesor utilizaría un arma, al parecer, infalible: el sentido común. Es una suerte que tales afirmaciones sólo se restrinjan al campo de la educación. El predicarlas de otros sectores de la actividad profesional llevaría a un retroceso de siglos. En este caso hay que señalar algo que es muy importante: que el alumnado acceda o no al aprendizaje de ciertos conceptos y saberes depende no sólo de la dificultad intrínseca de los mismos, sino también de la propia capacidad del sujeto y, especialmente, de la forma didáctica en que éstos se aborden. Poseer técnicas didácticas, métodos y procedimientos para que el alumno incorpore los aprendizajes es precisamente la razón de ser de la profesión docente. El propio conocimiento a enseñar es el requisito previo, la cuestión que se tiene que dar por descontada. No es pensable, como ya decía García Morente hace más de setenta años, que un profesor o maestro no conozca los contenidos sobre los que va a enseñar. Lo que va a justificar su sector profesional será su habilidad para extender esos conocimientos, su habilidad para que se los incorporen aquellos que no los poseen. No es esta una cuestión menor, y menos cuando la referimos a la enseñanza obligatoria. Ésta presenta una diferencia fundamental respecto a los restantes niveles, a cuya asistencia el alumno opta voluntariamente: en la educación obligatoria no hay otra alternativa, el niño debe asistir, quiera o no, a las aulas. Con este punto de partida, es necesario afinar las técnicas con las que vamos a tratar de conseguir en ellos más aprendizaje, más desarrollo, más educación. No son ellos los que quieren aprender algo, sino que somos nosotros los que tenemos que conseguir que lo aprendan.

Con el nuevo método se aporta una nueva herramienta y se abre un nuevo camino en el difícil sector de las matemáticas escolares, en la complicada senda del

aprendizaje del cálculo. El objetivo principal del mismo es la introducción de unos modelos algorítmicos radicalmente diferentes a los empleados hasta este momento, que permitan al maestro y a la maestra desarrollar mejor su tarea, adaptarse cada vez más a las características individuales de sus alumnos, conseguir que éstos estén más motivados por el tipo de trabajo a desarrollar. En este sentido, creemos que el presente trabajo ayudará al docente en su práctica, y la mejorará notablemente.

Algunos antecedentes.

La enseñanza de las cuatro operaciones básicas ha tenido siempre un lugar preeminente en la escuela. A su enseñanza se han dedicado muchísimos trabajos y sería totalmente imposible hacer aquí siquiera una pequeña referencia a la mayoría de ellos. Ya en 1971, Ablewhite¹ advertía de los muchos problemas que se originaban en el aprendizaje de las operaciones, y cómo los alumnos con dificultades sufrían en mayor medida la irracionalidad del método que se utilizaba. Era impresionante su grito de guerra: “¡Cientos de años contra ellos!”. Desde entonces han sido múltiples los autores² que han señalado disfunciones y complicaciones derivadas del empleo de unos algoritmos muy poco adecuados para los sujetos a los que se destinaban. Han tenido poco éxito, y las cuatro operaciones se siguen enseñando, muy mayoritariamente, como hace decenas de años. El éxito de la permanencia de las mismas se puede justificar con las diez razones que enuncia Gómez Alfonso³, y que estarían detrás de esta enorme longevidad.

No hemos encontrado antecedentes en la aplicación de los modelos de algoritmos que aquí se propugnan. Tan sólo hay una recomendación, respecto a uno de los modelos de sustracción, recogido en un artículo de Ramírez Martínez y Usón Villalba⁴. En la actualidad, lo que abunda es la recomendación de un mayor protagonismo del cálculo mental, una adecuada ubicación de la calculadora en la tarea del cálculo, y un mayor énfasis en las destrezas de estimación. También se observa una transición o graduación que va desde los cálculos espontáneos de los alumnos a la sistematización de los algoritmos clásicos. Como ejemplo podemos citar el documento “**Guidance paper-calculation**”, de 2008, incluido por el Ministerio de Educación británico en su página web y que sirve de guía a la importante renovación de la

¹ Ablewhite (1971). *Las matemáticas y los menos dotados*. Madrid. Morata.

² Se citan solamente los libros en español y a los que se ha tenido fácil acceso por parte de los docentes. Para una mayor precisión se puede consultar la amplia bibliografía contenida en los trabajos del autor. Para facilitar la consulta, se ofrece el listado en orden alfabético. Alcalá (1986). *Otra matemática, otra escuela*. Granada. Escuela Popular. Baroody (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid. MEC-Visor. Castro, Rico y Castro (1987). *Números y operaciones*. Madrid. Síntesis. Chamorro, M. C. (coord.) (2005). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid. Prentice Hall. Dickson, Brown y Gibson (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid. MEC-Labor. Ferrero (1984). *Operaciones con números naturales*. Madrid. Papeles de Acción Educativa. Gómez Alfonso (1999). *El futuro del cálculo*. Uno, 22. Pp 20-27. Jaulin-Mannoni (1980). *Las cuatro operaciones básicas de la matemática*. Madrid. Pablo del Río. Kamii (1986). *El niño reinventa la aritmética*. Madrid. Visor. Maza (1989). *Sumar y restar*. Madrid. Visor. Mialaret (1977). *Las matemáticas. Cómo se aprenden. Cómo se enseñan*. Madrid. Pablo del Río. N. C. T. M. (2000). *Principios y estándares para la educación matemáticas*. Granada. SAEM Thales. Pereda (1987). *Didáctica de las cuatro operaciones*. Bilbao. D. De Brouwer. Resnick y Ford (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Madrid. MEC_Paidós. VV.AA. (2007). *Aprender matemáticas. Metodología y modelos europeos*. Madrid. S.P. del MECD. Vergnaud (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México DF. Trillas.

³ Gómez Alfonso, B. (1988). *Numeración y operaciones*. Madrid. Síntesis. Pag. 106.

⁴ Ramírez Martínez, y Usón Villalba (1996). *Por los trillados caminos de la aritmética escolar de las cuatro operaciones*. *Suma*, 21. Pp. 63 a 72.

metodología matemática que se está llevando a cabo en ese país. Por ejemplo, para la introducción de la suma emplea cuatro “Stage”: el primero, sobre la recta numérica; el segundo iniciando las particiones de los números; el tercero utilizando el algoritmo clásico, pero utilizando una fila para cada combinación numérica; el cuarto, por último, es el algoritmo clásico vertical.

El método ABN tiene como precedentes, si bien bastante difusos, las actuaciones puestas en marcha en Holanda con el fin de renovar la enseñanza-aprendizaje del cálculo. En concreto se hace referimos a:

- El “Proeve”⁵ o “Diseño de un programa nacional para la educación matemática en escuelas primarias”. Pese a que el título habla de un “programa nacional”, no hay tal cosa, sino unas propuestas de actuación dirigidas a todo el país. Las diversas publicaciones que componen el *Proeve* recogen descripciones de los diversos dominios dentro de las matemáticas. Este trabajo no tiene como fin ni está pensado para su utilización directa por parte de los docentes, sino en un apoyo para los autores de libros de texto, formadores de maestros, asesores e inspectores, pese a su estilo fácil y a la abundancia de dibujos y ejemplos. Siguen apareciendo publicaciones dentro de este marco, y están recogidos casi todos los contenidos propios de la materia: destrezas numéricas básicas, algoritmos escritos, razones y porcentajes, fracciones y números decimales, medición y geometría.
- Los “Bosquejos de trayectorias longitudinales de enseñanza-aprendizaje”, puestos en marcha en 1997 y sobre los que se sigue trabajando. Los “Bosquejos” recogen los pasos que se tienen que recorrer para que los estudiantes alcancen los objetivos establecidos para su proceso de enseñanza y facilita a los profesores un bosquejo narrativo de cómo puede realizarse el proceso de aprendizaje, incluyendo materiales de trabajo, ejemplos, grabaciones, vídeos, etc.

También se mueve en la órbita de los modelos constructivistas, con origen, siquiera sea remoto, en el psicólogo ginebrino Jean Piaget, que representa y difunde su discípula C. K. Kamii⁶. Respecto a los fallos y dificultades de los algoritmos tradicionales de cálculo, se han tenido en cuenta las aportaciones de Ashlock⁷.

El creador del método ABN está muy implicado tanto en la renovación de la enseñanza del cálculo como en la metodología de los problemas aritméticos. Ya en 1977 publica su primer artículo⁸, y en 1984 su primer libro⁹. En él se plantea una vía de

⁵ Treffers, A., de Moor, E., y Feijs, E. (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het rekenwiskundeonderwijs op de basisschool. Deel I. Overzicht einddoelen* [Diseño de un programa nacional para la educación matemática en las escuelas primarias. Parte I. Perspectiva general de las metas]. Tilburg. Zwijssen.

⁶ KAMII, C., & DOMINICK, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. Morrow & Margaret J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (1998 NCTM Yearbook). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

⁷ ASHLOCK, R. B. (2004). *Error patterns in computation*, 9ª ed. Boston: Allyn & Bacon.

⁸ Martínez Montero, J. (1977). *El cálculo en las escuelas. Algunas consideraciones*. La vida en la escuela, 2387. Pag. 11.

⁹ Martínez Montero (1984). *La programación del cálculo en la EGB por las bases y los cuadros*. Madrid. Escuela Española.

renovación del cálculo de las cuatro operaciones utilizando bases de numeración menores de diez. Tal uso facilitaba que el alumno pudiera realizar manipulativamente todos los cálculos de todas las operaciones, para lo que se proponía el empleo de un material que adaptaba el propuesto por el matrimonio Papy¹⁰. En 1990 se publica su segundo libro sobre el tema¹¹, en el que se divulga lo que, hasta esa fecha, eran los últimos hallazgos en investigaciones. Diez años después publica un nuevo libro¹², en el que se recoge por primera vez la alternativa al formato de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división. Una adaptación de las mismas a los alumnos con especiales dificultades se realiza en un nuevo trabajo¹³, en el que hay un desarrollo más completo y adaptado. En el año 2008 publica el primer libro que recoge un planteamiento sistemático del método ABN¹⁴, en el que ya se explicita para su traslado al aula el nuevo modo de calcular: paso del algoritmo antiguo al nuevo, técnicas, secuencia de aprendizaje, aprendizaje de tablas y conexión con problemas. Una actualización, con técnicas de tratamiento de las dificultades del cálculo tanto tradicional como ABN es el contenido de otro libro publicado en 2010¹⁵. Dos libros más completan la bibliografía. Uno, del año 2012¹⁶, dedicado específicamente al desarrollo del método en la Educación Infantil, y el último, aparecido en Mayo de 2013¹⁷, se dedica a la resolución de problemas. En él el autor del método, junto con una de sus colaboradoras, consigue unir los términos del binomio “operaciones-problemas aritméticos”. Existían precedentes. Uno de ellos es su Tesis Doctoral¹⁸, que permite una aproximación complementaria al aprendizaje de las operaciones, y que apunta muchas de las dificultades que tiene el alumnado a la hora de resolver problemas, y dónde se originan las mismas. El otro, la investigación que concluyó en el artículo, de título bastante esclarecedor, “**Los efectos no deseados (y devastadores) de los métodos tradicionales de aprendizaje de la numeración y de los cuatro algoritmos de las operaciones básicas**”¹⁹. En él se muestra claramente cómo el aprendizaje de las operaciones con los modelos de algoritmos utilizados impiden un desarrollo adecuado del cálculo pensado y estimativo.

Por todo lo expresado es por lo que otorga especial importancia a la gran transformación de la enseñanza del cálculo que se está generando con el cálculo ABN. Tal transformación se concreta en lo que sigue:

¹⁰ Papy (1963). *Mathematique Moderne*. Bruxelles. Didier.

¹¹ Martínez Montero (1990). *Numeración y operaciones básicas en la educación primaria*. Madrid. Escuela Española.

¹² Martínez Montero, J. (2000). *Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI*. Barcelona. CISS-Praxis.

¹³ Martínez Montero, J. (2002). *Enseñar matemáticas a alumnos con necesidades educativas especiales*. Barcelona. CISS-Praxis.

¹⁴ Martínez Montero, J. (2008). *Competencias básicas en matemáticas. Una nueva práctica*. Madrid. Wolters Kluwer.

¹⁵ Martínez Montero, J. (2010). *Enseñar matemáticas a alumnos con NEE*. Madrid. Wolters Kluwer.

¹⁶ Martínez Montero, J., y Sánchez Cortés, C. (2011). *Desarrollo y mejora de la inteligencia matemática en la Educación Infantil*. Madrid: Wolters Kluwer.

¹⁷ Martínez Montero, J., y Sánchez Cortés, C. (2013). *Resolución de problemas y método ABN*. Madrid: Wolters Kluwer.

¹⁸ Martínez Montero, J. (1995). *Los problemas aritméticos elementales verbales de una etapa, desde el punto de vista de las categorías semánticas, en los cursos 3º, 4º y 5º de EGB/Primaria*. Tesis Doctoral.

¹⁹ Martínez Montero, J. (2001). Los efectos no deseados (y devastadores) de los métodos tradicionales de aprendizaje de la numeración y de los cuatro algoritmos de las operaciones básicas. *Epsilon* 49, pp 13-26.

- Se produce un enorme desarrollo del cálculo mental y de la capacidad de estimación.
- Se eliminan los viejos formatos de las operaciones (y por tanto todos los inconvenientes asociados a los mismos), sustituyéndolos por algoritmos abiertos basados en números.
- Se mejora significativamente la capacidad de resolución de problemas.
- Y, tal vez lo más importante, se crea una actitud favorable al aprendizaje matemático.

Los efectos que se han observado.

De la observación desapasionada de los cinco cursos de experiencia y desarrollo del método ABN, se puede destacar:

- La metodología propuesta supone una revolución respecto a las prácticas habituales. Es un cambio completo de paradigma: son distintos los principios, los fines y las prácticas.
- La nueva metodología es muy sencilla. La aprenden enseguida incluso los padres con menor preparación.
- La nueva metodología no requiere de materiales sofisticados: palillos de dientes, pajitas o cualquier otro material contable, cintas métricas, tablas de numeración.
- La nueva metodología resuelve el eterno problema de la individualización, sin necesidad de poner tareas distintas a cada sujeto.
- La nueva metodología destaca sobre todo por el aumento de la competencia de los alumnos en resolución de problemas y, sobre todo, por cómo los realizan. La comprobación de este extremo se puede llevar a cabo con el visionado de los muchos vídeos que existen en la red.
- La nueva metodología entronca con la forma natural de aprender de los niños y aprovecha toda su experiencia. Tal vez sea este aspecto el que esté a la base del alto nivel de motivación que se alcanza.

El método ABN supone que las matemáticas dejen de ser la vara de medir inteligencias o el estrecho paso que se utiliza para seleccionar a unos alumnos y discriminar a los demás, para convertirse en lo que siempre han debido ser: una poderosa herramienta de desarrollo intelectual de los niños y niñas, una pieza fundamental en la construcción de su pensamiento lógico y crítico.

BIBLIOGRAFÍA.

- Ablewhite (1971). Las matemáticas y los menos dotados. Madrid. Morata.
- Alcalá (1986). Otra matemática, otra escuela. Granada. Escuela Popular.
- Aubrey, C. (1993). An investigation of the mathematical knowledge and competencies which children bring into school. *British Educational Research Journal*, 19(1), 27-41.
- Baroody (1988). El pensamiento matemático de los niños. Madrid. MEC-Visor.
- Bednarz, N., y Janvier, B. (1988). A constructivist approach to numeration in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 19. Pp. 299-231.

- Bermejo, V. (2005). Microgénesis y cambio cognitivo. *Psicothema*, 17, 4, 559-562.
- Bermejo, V., Lago, M. O., y Rodríguez, P. (1998). Aprendizaje de la adición y sustracción. Secuenciación de los problemas verbales según su dificultad. *Revista de Psicología general y Aplicada*. Pp. 535-552.
- Bermejo, V., Morales, S. & García de Osuna, J. (2004). Supporting children's developing understanding cardinality. *Learning and Instruction*, 14, 381-389.
- Bishop, A. J., et al. (2003). *International Handbook in Mathematics Education*. Kluwer Academic Publisher. Netherlands.
- Brissiaud, R. (2006). Le débat sur l'enseignement des mathématiques à l'école: la situation à la rentrée 2006. *Le café pédagogique*, Octubre 06, 21-31.
- Burgos Alonso, V., Martínez Montero, J., y Pérez González, J. (2001). Jugamos y pensamos con los números. Boecillo: La Calesa. Colección de 12 cuadernos de trabajo.
- Campbell, J., I., D. (2005). *Handbook of Mathematical Cognition*. New York. Taylor & Francis Inc.
- Castro, Rico y Castro (1987). *Números y operaciones*. Madrid. Síntesis.
- Chamorro, M. C, (coord.) (2005). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid. Prentice Hall.
- Corey, S. (1949). Curriculum Development through Action Research. *Educational Leadership*, 7. Pag.148
- De Goeij, E., Nelissen, J., y Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1998). *TAL, Tussendoelen Annexleerlijnen, Informe de consultoría [TAL, Anexo de Metas Intermedias Trayectorias de Enseñanza-Aprendizaje]*. Utrecht. Instituto Freudenthal.
- De Jong, R. (1986). *Wiskobas in methoden [Wiskobas en libros de texto]*. Utrecht. OW & OC, Universidad de Utrecht.
- Dickson, Brown y Gibson (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid. MEC-Labor.
- Ebbutt, D (1983). *Educational Action Research : some general concerns and specifics quibbles*. Cambridge. CIE.
- Elliot, J. Y otros. (1986). *Investigación/acción en el aula*. Valencia. Generalitat Valenciana.
- English, L., D. (2008). *Handbook of International Researchs in Mathematics Education*. London. Lawrence Erlbaum Associates.
- Ferrero (1984). *Operaciones con números naturales*. Madrid. Papeles de Acción Educativa.
- Fraile, J. (1997). Más allá de los algoritmos: uso de la calculadora y aprendizaje de estrategias con alumnos de 8 años. *Suma*, 26. Pp. 95-102.
- Freudenthal, H. (1977). Discurso al serle otorgado un doctorado honorario. *Euclides*, 52. Pp. 336-338.
- Freudenthal, H. (1979). Structuur der wiskunde en wiskundige structuren: een onderwijskundige analyse?. [Estructura de las matemáticas y estructuras matemáticas; un análisis educativo]. *Pedagogische Studiën*, 56 (2). Pp. 51-60.
- Fuson, K. C., y Hall, J. (1983): citados en Castro, Rico y Castro (1987). *Números y operaciones*. Madrid. Síntesis. Pag. 99.
- Fuson, C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. & Fennema, E (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 2, 130-162

García Romero, I., Aguilar Villagrán, M., y Martínez Montero, J. (2002). Los problemas aritméticos de estructura aditiva de dos operaciones. *Epsilon*, 54. Pp. 393-412.

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge. HUP.

Gómez Alfonso, B. (1988). *Numeración y operaciones*. Madrid. Síntesis. Pag. 106

Gómez Alfonso (1999). El futuro del cálculo. *Uno*, 22. Pp 20-27.

Holly, P. *Beyond the cult of the individual*. Cambridge. CIE.

Jaulin-Mannoni (1980). *Las cuatro operaciones básicas de la matemática*. Madrid. Pablo del Río.

Kamii, C. K. (1986). *El niño reinventa la aritmética*. Madrid. Visor.

Kamii, C. K. (1995). *Reinventando la aritmética III*. Madrid. Visor.

Kamii, C. K, & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. Morrow & Margaret J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (1998 NCTM Yearbook). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Macías, T., y Linares, I. (1998). Aprendizaje de la multiplicación en un contexto significativo. *Epsilon*, 14, 42. Pp. 495-513.

Martínez Montero, J. (1977). El cálculo en las escuelas. Algunas consideraciones. *La vida en la escuela*, 2387. Pag. 11-14.

Martínez Montero, J. (1984). *La programación del cálculo en la EGB por las bases y los cuadros*. Madrid. Escuela Española.

Martínez Montero, J. (1985). Ensanchemos el campo de la numeración. *Apuntes de Educación*, 19. Pp. 12-13.

Martínez Montero (1990). *Numeración y operaciones básicas en la educación primaria*. Madrid. Escuela Española.

Martínez Montero, J. (1995). Los problemas aritméticos elementales verbales de una etapa, desde el punto de vista de las categorías semánticas, en los cursos 3º, 4º y 5º de EGB/Primaria.. Tesis Doctoral.

Martínez Montero, J. (1995). Importancia de los PAEVs de una etapa. Algunas consideraciones para su tratamiento en el aula. *Tavira*, 12. pp. 169 a 183.

Martínez Montero, J. (1998). Los problemas aritméticos elementales verbales (PAEV) de una operación y su secuenciación en la Educación Primaria. *Bordón*, 50, 2. Pp. 187-202.

Martínez Montero, J. (1999). El trabajo didáctico con las situaciones reales de suma y resta. Lo que oculta una cuenta. *Tavira*, 16. Pp. 57-95.

Martínez Montero, J. (2000). *Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI*. Barcelona. CISS-Praxis.

Martínez Montero, J. (2001). Los efectos no deseados (y devastadores) de los métodos tradicionales de aprendizaje de la numeración y de los cuatro algoritmos de las operaciones básicas. *Epsilon* 49, pp 13-26.

Martínez Montero, J. (2001). Estudio sobre las calificaciones obtenidas por los alumnos de la ESQ. *Bordón*, 53,4. Pp. 535-548.

Martínez Montero, J. (2002). *Enseñar matemáticas a alumnos con necesidades educativas especiales*. Barcelona. CISS-Praxis.

Martínez Montero, J. (2006). La participación de los alumnos en los centros. Sentido y realidad. *Participación Educativa*, 2. pp. 37-43.

Martínez Montero, J. (2008). Competencias básicas en matemáticas. Una nueva práctica. Madrid. Wolters Kluwer.

Martínez Montero, J. (2010). Enseñar matemáticas a alumnos con NEE. 2ª edición. Madrid. Wolters Kluwer.

Martínez Montero, J., y Aguilar Villagrán, M. (1996). Las dificultades del aprendizaje de la numeración en la educación primaria. *Epsilon*, 35. Pp.179-192.

Martínez Montero, J., y Aguilar Villagrán, M. (1996). La categoría semántica de igualación. Rasgos distintivos respecto a las de Cambio y Comparación. *Suma*, 21. Pp. 35-39.

Martínez Montero, J., y Aguilar Villagrán, M. (1997). El dominio de la numeración al terminar cada uno de los ciclos de la Educación Primaria. *Números*, 31. Pp. 15-31.

Martínez Montero, J., y Aguilar Villagrán, M. (1998). Los problemas aritméticos elementales verbales (PAEV) de una operación formulados con números muy pequeños. *Suma*, 27. Pp. 71-79.

Martínez Montero, J., y Sánchez Cortés, C. (2011). Desarrollo y mejora de la inteligencia matemática en la Educación Infantil. Madrid: Wolters Kluwer.

Martínez Montero, J., y Sánchez Cortés, C. (2011). Resolución de problemas y método ABN. Madrid: Wolters Kluwer.

Maza (1989). Sumar y restar. Madrid. Visor.

McCloskey, M., Caramazza, A. y Basili, A. (1985). Cognitive mechanisms in number processing and calculation: Evidence from dyscalculia. *Brain and Cognition*, 4, 171 a 196.

Mialaret (1977). Las matemáticas. Cómo se aprenden. Cómo se enseñan. Madrid. Pablo del Río.

N. C. T. M. (2000). Principios y estándares para la educación matemáticas. Granada. SAEM Thales.

Papy (1963). *Mathematique Moderne*. Bruxelles. Didier.

Pereda (1987). Didáctica de las cuatro operaciones. Bilbao. D. De Brouwer.

Pérez-Echeverría, M. P. & Scheuer, N. (2005). Desde el sentido numérico al número con sentido. *Infancia y Aprendizaje*, 28, (4), 393-407.

Ramírez Martínez, y Usón Villalba (1996). Por los trillados caminos de la aritmética escolar de las cuatro operaciones. *Suma*, 21. Pp. 63 a 72.

Resnick y Ford (1990). La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Madrid. MEC Paidós.

Rieben1, L. de Ribeaupierree., & Lautrey, J. (1983). Le développement opératoire de l'enfant entre 6 et 12 ans: élaboration d'un instrument d'évaluation. Paris: CNRS.

Thompson, I., & Bramald, R. (2002). An investigation of the relationship between young children's understanding of the concept of place value and their competence at mental addition (Report for the Nuffield Foundation). Newcastle upon Tyne. University of Newcastle upon Tyne.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics*, 50(1), 29-47.

Treffers, A. (1987). Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – the Wiskobas Project. Dordrecht. Reidel Publishing Company.

Treffers, A., de Moor, E., y Feijs, E. (1989). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel I. Overzicht

eindoelen [Diseño de un programa nacional para la educación matemática en las escuelas primarias. Parte I. Perspectiva general de las metas]. Tilburg. Zwijsen.

Treffers, A., Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Buys, K (eds.). (1999). *Jonge kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Hele Getallen. Onderbouw Basisschool* [Niños pequeños aprenden aritmética. Anexo de Metas Intermedias Trayectorias de Enseñanza-aprendizaje. Números enteros. Grados más bajos de la escuela primaria], Noordhoff, Groninga. Wolters.

Van den Heuvel-Panhuizen, M.. (1998). Realistic Mathematics Education: Work in progress. En T. Breiteig y G. Brekke (eds.), *Theory into practice in Mathematics Education*. Kristiansand (Noruega) . Facultad de Matemáticas y Ciencias.

VV.AA. (2007). *Aprender matemáticas. Metodología y modelos europeos*. Madrid. S.P. del MECD.

Vergnaud (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México DF. Trillas.