

COMPETENCIAS BÁSICAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

González Marí, J. L.
Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga
gmari@uma.es

Índice

Introducción

Los fines (¿Para qué la Educación Matemática?;Qué se pretende y qué se debería conseguir?)

Evaluación diagnóstica del rendimiento en matemáticas: Principios y elementos (¿qué preparación matemática efectiva proporciona el Sistema Educativo?)

Evaluación PISA-OCDE 2003

Fines

Instrumento

Principios y elementos básicos

Alfabetización Matemática

Competencias Matemáticas

Según Niss

Ejemplos

En el proyecto Pisa 2003

Ejemplos de tareas

Algunos resultados

Evaluación de diagnóstico Junta de Andalucía

Fines y principios

Competencias evaluadas

Ejemplos de tareas

Condiciones y medios (¿Qué hacer a partir de ahora?)

Currículo: Diseño y orientaciones

Fines: Matematización o proceso de hacer y aplicar Matemáticas

Orientaciones oficiales LOE Primaria y ESO

Otras consideraciones. Organizadores. Diseño de unidades didácticas

Currículo y Enseñanza: Algunas notas para una aproximación

Algunas orientaciones

Nuestra posición

Tipos de situaciones didácticas

Competencias básicas y avanzadas

Esquema del proceso didáctico

Ejemplos

Bibliografía

Introducción

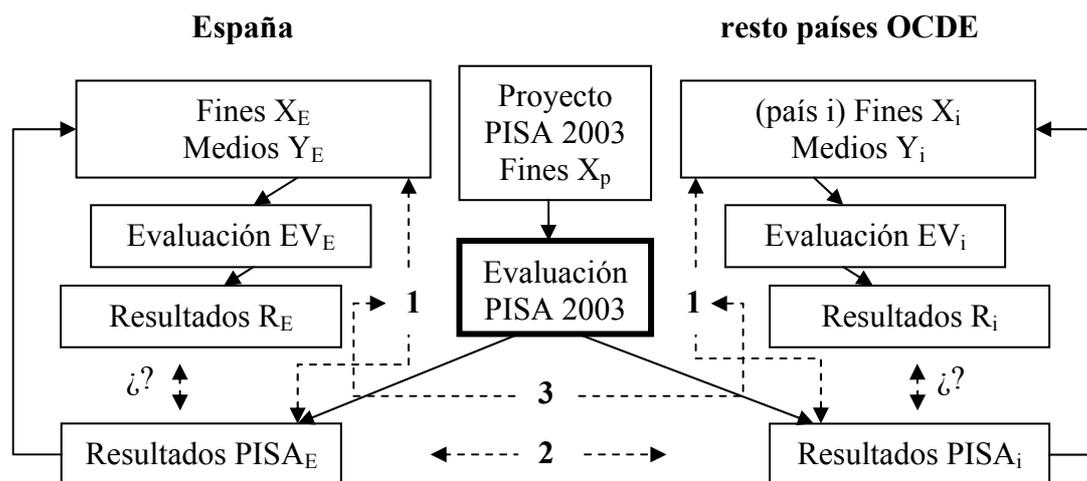
La Educación Matemática no es un campo aislado. Como parte de un complejo proceso de formación, la Educación Matemática presenta numerosos problemas derivados del cuerpo del que forma parte, junto a problemas específicos debidos a la naturaleza del conocimiento matemático y a las características propias de los procesos de enseñanza y aprendizaje correspondientes.

Tres de los problemas más importantes de la Educación Matemática son: los fines (¿Qué enseñar, por qué y para qué?; ¿qué se quiere conseguir?), los medios (¿Cómo lograr los fines propuestos?) y la evaluación (¿Cómo averiguar si se han alcanzado los fines propuestos y en qué grado, empleando los medios previstos y qué consecuencias se deducen de los resultados obtenidos para mejorar los planteamientos y desarrollos futuros?)

La Unión Europea¹ ha contemplado como eje fundamental de la política educativa común, el énfasis en una educación centrada en el aprendizaje en contraposición a una educación centrada en la enseñanza², es decir, en la adquisición de capacidades, habilidades, competencias y valores que permitan al individuo una actualización permanente de los conocimientos para desenvolverse con soltura en un mundo cambiante y complejo. Ello significa que es obligado prestar atención al aprendizaje orientado al desarrollo de competencias y a la consecución de lo que se conoce como “alfabetización matemática” y no sólo a la enseñanza y aprendizaje de contenidos, a los aspectos funcionales y formativos de las matemáticas y no sólo, ni prioritariamente, a los aspectos instrumentales y técnicos. Los conceptos de **competencia**, **matematización** y **alfabetización matemática**, como veremos, ponen el acento en los resultados del aprendizaje, en lo que el alumno es capaz de hacer al término del proceso educativo y en los procedimientos que le permitirán continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de su vida.

Tomando como base los principios mencionados, y bajo lo que se conoce como informe PISA 2003, la OCDE ha desarrollado un proceso evaluador del rendimiento matemático de alumnos de determinadas edades, cuyos resultados en España han sido más bien modestos en comparación con los de los restantes países. Pero dicho proceso se ha realizado tomando como base unos fines y unos medios teóricos para la consecución de los mismos que no son exactamente los fines y los medios que han caracterizado los procesos educativos en matemáticas en España y en el resto de países. Por tal motivo, los resultados sólo se pueden interpretar (gráfico adjunto):

Relatividad e interpretación de los procesos y resultados



¹ Proyecto Sócrates-Erasmus "Tuning Educational Structures in Europe"

² Tudela y otros (2005).- Las Competencias en el Nuevo Paradigma Educativo para Europa. Vicerrectorado de Planificación, Calidad y evaluación. Universidad de Granada

- 1) en términos de lo que podríamos llamar el *rendimiento relativo* de cada país, es decir, la valoración de los resultados obtenidos en el marco de los supuestos curriculares teóricos del proyecto PISA en relación con los planteamientos curriculares reales de cada país;
- 2) en términos de la *comparación absoluta* aislada de los resultados;
- 3) en términos de la *comparación de los rendimientos relativos* de los diferentes países.

La interpretación 1 es la que sirve de base para realizar una revisión de los diseños y desarrollos curriculares bajo la óptica de los supuestos teóricos de la OCDE.

A la luz de los resultados e interpretaciones mencionadas, de otros diseños y desarrollos curriculares efectivos en Educación Matemática (NCTM, KOM, etc.), y en base a las exigencias del espacio europeo educativo común, surgen recientemente nuevos diseños curriculares base para las enseñanzas mínimas en Primaria y en ESO en España y en las Comunidades Autónomas. Estas orientaciones se fundamentan en los principios del proyecto PISA y su desarrollo efectivo requiere de nuevas consideraciones en cuanto a los medios necesarios para alcanzar los nuevos fines que se proponen y a los criterios para evaluar la adecuación de todo el proceso educativo.

En lo que sigue se plantea una primera reflexión sobre los fines de la Educación Matemática, en la que se establezcan referencias para situar los nuevos planteamientos. A continuación, de acuerdo con los fines generales establecidos y con objeto de profundizar en los aspectos que van a guiar los procesos educativos en matemáticas en Europa a partir de ahora, se abordarán brevemente los principios y resultados de las evaluaciones PISA y de Diagnóstico de la Junta de Andalucía. El análisis concluye con las orientaciones curriculares del desarrollo normativo de la LOE para Primaria y ESO y algunas consideraciones para el diseño y el desarrollo curriculares en España y en Andalucía.

Los fines

¿Para qué la Educación Matemática? ¿Qué se pretende y qué se debería conseguir?

El problema de la determinación de las finalidades o metas de la Educación Matemática, es una cuestión de especial relevancia para el diseño y el desarrollo de cualquier currículo de matemáticas (Rico, L.;1997). Se trata, en nuestra opinión, de uno de los aspectos centrales de la Educación Matemática, estrechamente relacionado con la naturaleza del conocimiento matemático, con las necesidades socioculturales e individuales y con las características globales del proyecto sociocultural que ha de albergar la formación de las nuevas generaciones; en definitiva, se trata del conjunto de argumentos que justifican la enseñanza misma de las matemáticas y su situación, organización y tratamiento dentro del Sistema Educativo.

Pero los fines de la Educación Matemática varían sustancialmente de unos países a otros y sufren cambios importantes a través de la historia. Desde el punto de vista más reciente, la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo en España establecía las siguientes finalidades educativas generales:

- El pleno desarrollo de la personalidad del alumno;
- La formación en el respeto de los derechos y libertades fundamentales y en el ejercicio de la tolerancia y de la libertad dentro de los principios democráticos de convivencia;
- La adquisición de hábitos intelectuales y técnicas de trabajo, así como de conocimientos científicos, técnicos, humanísticos, históricos y estéticos;
- La capacitación para el ejercicio de actividades profesionales;
- La formación en el respeto de la pluralidad lingüística y cultural de España;
- La preparación para participar activamente en la vida social y cultural;
- La formación para la paz, la cooperación y la solidaridad entre los pueblos.

Las Matemáticas deben y pueden contribuir, junto a otras disciplinas, a la consecución de todas y cada una de las metas generales anteriores. Pero al mismo tiempo deben contribuir a la consecución de una formación matemática específica.

Tradicionalmente se han planteado numerosos interrogantes en torno a la finalidad de la Educación Matemática: ¿Para qué enseñar matemáticas?, ¿qué matemáticas enseñar en una sociedad tecnológica?, ¿cómo lograr un currículo flexible que atienda a las diversas necesidades de los escolares?, ¿cómo atender a la diversidad cultural?. Sin embargo, se aprecian diferencias importantes entre los fines propuestos por diversos autores. A la pregunta ¿Por qué se enseñan matemáticas?, se han dado numerosas respuestas, como la que aparece en el documento “Mathematics from 5 to 16” del Department of Education and Science Británico (1985) para la Educación Matemática en el periodo obligatorio:

- 1.- Las matemáticas son un elemento esencial de comunicación
- 2.- Las matemáticas son una herramienta potente
- 3.- Hay que apreciar las relaciones internas dentro de las matemáticas
- 4.- Las matemáticas deben resultar una actividad fascinante
- 5.- Hay que fomentar la imaginación, iniciativa y flexibilidad de la mente
- 6.- Trabajar de modo sistemático
- 7.- Trabajar independientemente
- 8.- Trabajar cooperativamente
- 9.- Profundizar en el estudio de las matemáticas
- 10.- Conseguir la confianza del alumno en sus habilidades matemáticas

O en estudios y propuestas como el **Informe Cockcroft** (1982):

Meta 1: Permitir que cada alumnos desarrolle, de acuerdo con sus propias aptitudes, las destrezas y los conocimientos matemáticos necesarios para su vida adulta, para el empleo y para continuar el estudio y la formación, siendo consciente al mismo tiempo de las dificultades que algunos alumnos experimentarán.

Meta 2: Proporcionar a cada alumno el tipo de matemáticas que pueda necesitar para el estudio de otras materias.

Meta 3: Ayudar a cada alumno a desarrollar en lo posible su apreciación y disfrute de las matemáticas por sí mismas y su comprensión del papel que éstas han desempeñado y seguirán desempeñando tanto en el desarrollo de la ciencia y la tecnología como de nuestra civilización.

Meta 4: Por encima de todo, hacer conscientes a todos los alumnos de que las matemáticas les proporciona un poderoso medio de comunicación.

O el **N.C.T.M.** (1989), en cuyos planteamientos se empiezan a apreciar elementos que apuntan a los planteamientos actuales:

Meta 1: Aprender a valorar las matemáticas. Comprender su evolución y el papel que desempeñan en la sociedad y en las ciencias.

Meta 2. Adquirir confianza en la aptitud propia. Llegar a confiar en el pensamiento matemático propio y poseer la capacidad de dar sentido a situaciones y resolver problemas.

Meta 3. Adquirir la capacidad de resolver problemas matemáticos. Esto es esencial para llegar a ser un ciudadano productivo y exige experiencia para resolver diversos problemas generalizados y no rutinarios.

Meta 4. Aprender a comunicarse matemáticamente. Aprender los signos, los símbolos y los términos matemáticos.

Meta 5. Aprender a razonar matemáticamente. Realizar conjeturas, reunir pruebas y construir argumentos matemáticos.

Asimismo, son de destacar los fines establecidos en **documentos curriculares**, tales como el Decreto de Educación Primaria de la Junta de Andalucía (1992):

"La finalidad que se le atribuye a la formación matemática es la de favorecer, fomentar y desarrollar en los alumnos la capacidad para explorar, formular hipótesis y razonar lógicamente, así como la facultad de usar de forma efectiva diversas estrategias y procedimientos matemáticos para plantearse y resolver problemas relacionados con la vida cultural, social y laboral".

Este problema central aparece también en los **debates y reuniones de expertos**, como ocurre en el caso de D'Ambrosio (1979) sobre el trabajo realizado en el ICME III y la reflexión de Romberg, T. (1991) sobre las funciones de la Educación Matemática. Este último considera dos tipos de justificaciones: funcionales y otras; las comentamos brevemente a continuación.

Las *justificaciones funcionales* se basan en la idea de que las matemáticas satisfacen una necesidad funcional de largo alcance, es decir, son necesarias para la formación de los sujetos en orden a cumplir diversas finalidades tanto individuales como sociales o científicas. Las cuestiones que surgen a partir del planteamiento anterior tienen que ver con las matemáticas que serán útiles en el futuro, con las que deben ser comunes a todos los individuos y las que deben corresponder a currículos diferenciados, o con las matemáticas que se debieran implantar en el contexto de los diversos planes de reforma educativa.

Las *justificaciones "no funcionales"* atienden, según Romberg, a razones que tienen que ver con la belleza de las matemáticas, con el desarrollo de capacidades, actitudes y destrezas de alto nivel, con la necesidad de formación de matemáticos profesionales o con la importancia de las matemáticas como parte de nuestra cultura.

Niss, en un trabajo más reciente (Rico, op. cit., pág. 10), y en la misma línea que Romberg, reconoce también dos tipos de argumentos en los estudios sobre fines de la Educación Matemática: *argumentos utilitarios* y *argumentos de formación general*. Entre los primeros se encuentran: la formación para desenvolverse en la vida y las necesidades tanto laborales como para el estudio de otras ciencias. Entre los segundos se pueden situar: el desarrollo de las capacidades formativas, de la personalidad y de las actitudes así como las que atienden al carácter estético y recreativo de las matemáticas.

Pero "no parece haber aún consenso en las respuestas que hay que dar a la pregunta: ¿Por qué enseñamos matemáticas?" (op. cit., pág. 11). Por otra parte "no está clara la correspondencia entre los fundamentos contemplados y las implicaciones curriculares que se pretenden derivar de los mismos" (op. cit., pág. 10), ya que se aprecian disparidades e incoherencias entre las finalidades pretendidas y la puesta en práctica del currículo de matemáticas; entre los fundamentos y las prácticas reales.

Se pueden identificar dos categorías amplias de finalidades: socioculturales y formativas.

Las *finalidades socioculturales* tienen que ver con la transmisión de la herencia cultural básica de cada sociedad y con la consecución de dos tipos de finalidades sociales: a) proporcionar al ciudadano común las herramientas matemáticas básicas para su desempeño social; b) proporcionar cualificación profesional adecuada para atender a las necesidades y a los retos de la sociedad actual. No en vano, el conocimiento matemático no puede considerarse aislado del medio cultural, se conforma socialmente, es público y tiene lugar mediante relaciones de comunicación entre las personas. La Matemática y la Educación Matemática no pueden vivir de espaldas a la realidad sociocultural, sencillamente porque tendrían que vivir de espaldas a los matemáticos que hacen posible la creación matemática y a los alumnos que la aprenden, recrean y transmiten en el futuro, lo cual es un contrasentido.

Es de destacar aquí la contribución de las matemáticas a cuestiones tan relevantes como: los fenómenos políticos, económicos, ambientales, de infraestructuras, transportes, movimientos poblacionales; los problemas del tráfico en las ciudades; la necesidad y formación de profesionales cualificados; los suministros básicos; el diseño de parques y jardines; la provisión de alimentos; la economía familiar o la formación en cultura matemática de las nuevas generaciones.

Entre las finalidades socioculturales se ha de tener en cuenta también que el conocimiento matemático es un conocimiento auxiliar de primer orden para la mayoría de las ciencias, de manera que la modelización matemática permite reducir los fenómenos a dimensiones manejables. El estudio de problemas

importantes actuales, como el calentamiento de la atmósfera, la globalización, las células madre, energías alternativas, los problemas de la salud, etc., necesitan de las matemáticas.

Por último, aunque no en último lugar, son importantes la difusión de los valores democráticos y de integración social así como la realización y el ejercicio de la crítica y el esfuerzo por la acción comunicativa, aspectos en los que las matemáticas proporcionan estilos de pensamiento adecuados. También tiene especial relevancia en este punto el debate sobre las aplicaciones de las matemáticas consideradas como conocimiento tecnológico y las consecuencias éticas y sociales de las mismas.

Las *finalidades formativas* se justifican en base a la satisfacción de necesidades individuales.

Pero la utilidad individual de la matemática en la vida diaria es más indirecta que directa. ¿Quién ha tenido necesidad alguna de vez de hacer una integral, hallar las raíces de un polinomio de 6º grado o calcular un límite?. Es evidente que no es una justificación sólida, por sí sola. Sin embargo, ¿quién no necesita cada día: ordenar, estructurar, establecer prioridades, axiomatizar, algoritmizar acciones, decidir estrategias, estimar, razonar, codificar y decodificar mensajes, construir comportamientos complejos, manejar varias variables simultáneamente, utilizar esquemas topológicos, etc.?. Esto sí es útil, pero, ¿cómo se lo explicamos a los alumnos o a los padres?. Quizás no haya que explicárselo; simplemente que lo comprueben por ellos mismos.

Está fuera de toda duda que “las matemáticas son una herramienta intelectual potente, cuyo dominio proporciona privilegios y ventajas intelectuales” (op. cit., pág. 15); la educación matemática debe contemplar, por este motivo, además de la información y la instrucción en habilidades y técnicas, el desarrollo de capacidades, estructuras conceptuales y procedimientos y estrategias cognitivas, tanto particulares como generales, que conformen un pensamiento abierto, creativo, crítico, autónomo y divergente. En este sentido, las matemáticas poseen unos valores formativos innegables, tales como:

- La capacidad para desarrollar el pensamiento del alumno para determinar hechos, establecer relaciones, deducir consecuencias, y, en definitiva, potenciar el razonamiento y la capacidad de acción simbólica, el espíritu crítico, la tendencia a la exhaustividad, el inconformismo, la curiosidad, la persistencia, la incredulidad, la autonomía, la rigurosidad, la imaginación, la creatividad, la sistematicidad, etc.

- La utilidad para promover la expresión, elaboración y apreciación de patrones y regularidades, así como su combinación para obtener eficacia o belleza; las matemáticas han de promover el uso de esquemas, representaciones gráficas, y fomentar el diseño de formas artísticas y la apreciación y creación de belleza;

- La facilidad para estimular el trabajo cooperativo, el ejercicio de la crítica, la participación y colaboración, la discusión y defensa de las propias ideas, y para asumir la toma conjunta de decisiones;

- La potencialidad para desarrollar el trabajo científico y para la búsqueda, identificación y resolución de problemas;

- La riqueza de situaciones para movilizar este tipo de conocimientos, de manera que se estimule la gratificación por los esfuerzos intelectuales y la satisfacción con el trabajo bien hecho.

En resumen

Participamos de las consideraciones generales establecidas, que resumimos desde nuestro punto de vista en tres grandes finalidades de la Educación Matemática:

El proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debe favorecer y permitir alcanzar, mediante la adquisición de unos instrumentos, unas técnicas y procedimientos, unas habilidades, unas actitudes, unas estrategias y un vocabulario específico, una formación cultural e intelectual que permita al individuo:

- 1.- Su **adaptación** al medio, organizarlo y potencialmente transformarlo, lo que implica un conocimiento profundo del mismo y el desarrollo de capacidades relacionadas con el análisis de la realidad, la construcción de modelos y la creación de alternativas que mejoren la situación individual así como de la sociedad y la vida en ella.

2.- Adquirir un buen nivel de **autonomía** intelectual, lo que se traduce en que el individuo sea capaz de analizar todas las posibilidades de una situación real o ficticia y, de entre ellas, elegir las mejores;

3.- Conocer la Matemática como parte de la **cultura** universal y desenvolverse en su mundo, lo que conlleva un gusto por el trabajo matemático y una profundización en los objetos y métodos propios, siendo consciente de su situación actual y de la evolución sufrida a través de la historia.

La enseñanza de las matemáticas debe contribuir, al igual que otras disciplinas, al fin 1, es un factor importante para alcanzar el fin 2 y es fundamental para alcanzar el fin 3.

Algunas precisiones finales

- La determinación de los fines depende de la naturaleza y fenomenología del conocimiento, de su contribución formativa, de los medios de que se disponga y de intereses y consideraciones sociales, culturales, políticas y económicas, es decir, de lo que la sociedad establezca para el Sistema de la Educación Matemática a través de sus representantes y organismos;
- Los fines condicionan en buena medida el proceso, los medios, la evaluación y los resultados;
- No es suficiente con enunciar las finalidades para que se desarrollen de manera armoniosa y coordinada;
- Algunas de las metas enunciadas suelen ser contradictorias en la práctica;
- Los fines suelen ser sobreabundantes o excesivos y a veces utópicos;

Evaluación diagnóstica del rendimiento

¿Qué preparación matemática proporciona el Sistema Educativo?

El concepto de evaluación atiende a la regulación tanto de la planificación de la enseñanza como de su desarrollo, constituyéndose en pieza clave del proceso educativo; constituye la base de lo que Giménez (1997) denomina la “regulación” del proceso educativo.

Desde el punto de vista general de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, las orientaciones dadas por el NCTM (1991) distinguen cinco propósitos en la acción de evaluar:

- 1) Propósito de diagnóstico: qué entiende el alumno, qué le es difícil, etc.
- 2) Retroalimentación docente: qué saben los alumnos de lo expuesto, qué ritmo llevar, etc.
- 3) Calificación: puede aplicar lo aprendido, puede pasar de nivel, etc.
- 4) Logros matemáticos generales: capacidad matemática general en relación con otros.
- 5) Valoración del programa: ¿es eficaz el programa?.

y las siguientes competencias matemáticas³ a evaluar:

a) Potencia matemática

La potencia matemática engloba todos los aspectos del conocimiento matemático, su interconexión y su aplicación.

- capacidad para aplicar lo que saben a la resolución de problemas.
- capacidad de utilizar el lenguaje matemático para expresarse
- capacidad de razonamiento y análisis
- comprensión de la naturaleza de las matemáticas

b) Resolución de problemas

- formular problemas
- aplicar diversas estrategias para resolver problemas
- resolver problemas

³ El término no tiene aquí el mismo significado que se está utilizando en la actualidad, pero se puede decir que estos planteamientos han constituido el germen para los principios y fines que se están tratando aquí.

- comprobar e interpretar resultados
 - generalizar soluciones
- c) Comunicación
- expresar ideas matemáticas hablando, escribiendo, demostrándolas y representándolas;
 - entender, interpretar y juzgar ideas matemáticas presentándolas de forma escrita oral o visual;
 - utilizar vocabulario matemático, notaciones y estructuras para representar ideas, describir relaciones y modelar situaciones.
- d) Razonamiento
- utilizar el razonamiento inductivo para reconocer patrones y formular conjeturas;
 - utilizar el razonamiento proporcional y espacial
 - utilizar el razonamiento deductivo
 - analizar situaciones para hallar propiedades y estructuras comunes
 - reconocer la naturaleza axiomática de las matemáticas
- e) Conceptos matemáticos
- dar nombre, verbalizar y definir conceptos;
 - identificar y generar ejemplos válidos y no válidos;
 - utilizar modelos, diagramas y símbolos para representar conceptos;
 - pasar de un modo de representación a otro;
 - reconocer los diversos significados e interpretaciones de los conceptos
 - identificar propiedades de un concepto determinado
 - comparar y contrastar conceptos
- f) Procedimientos matemáticos
- reconocer cuando es adecuado un procedimiento
 - explicar las razones para los distintos pasos de un procedimiento
 - llevar a cabo un procedimiento de forma fiable y eficaz
 - verificar el resultado de un procedimiento
 - reconocer procedimientos incorrectos
 - generar procedimientos nuevos
- g) Actitud matemática
- confianza en el uso de la matemática
 - interés, curiosidad e inventiva al hacer matemáticas
 - valorar la aplicación matemática en la experiencia diaria.

Pero en la reflexión que se presenta nos interesa particularmente la evaluación de diagnóstico con propósitos de averiguar si un proceso educativo en matemáticas prepara realmente a los alumnos para la adquisición de unas capacidades y competencias que se desea que constituyan los elementos clave que guíen en el futuro la formación matemática de las nuevas generaciones. De los resultados se seguirán recomendaciones y modificaciones curriculares en el sentido de introducir tales elementos básicos como principales organizadores de un nuevo currículo que será implementado en todos los países de la Unión Europea. En Andalucía se han desarrollado recientemente dos evaluaciones del tipo mencionado: la evaluación del proyecto PISA 2003 y la evaluación de diagnóstico de la Junta de Andalucía.

Evaluación PISA-OCDE 2003

Los nuevos objetivos de la educación europea tuvieron sus inicios en el proyecto Sócrates-Erasmus, conocido como proyecto Tunning, en el que se adoptaba la adquisición de competencias como eje central de los nuevos diseños y desarrollos curriculares.

En consonancia con esta iniciativa, surgió en el seno de la OCDE el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (Programme for International Student Assessment, PISA).

- El Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos –PISA–, es un estudio de evaluación internacional del rendimiento de los alumnos de 15 años, realizado a iniciativa y bajo la coordinación de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE). Las materias evaluadas son: Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas.
- PISA evalúa el conocimiento y las destrezas de los alumnos de 15 años. El objetivo general es conocer como están preparados los alumnos de esa edad para afrontar los retos de la vida adulta en un contexto de vida cotidiana.
- PISA no es una evaluación curricular en la que se evalúa lo que se les ha enseñado a los alumnos en la escuela. Es una evaluación de los conocimientos y destrezas esperables en un alumno próximo a terminar su escolaridad obligatoria y a punto de incorporarse al mercado laboral o de proseguir estudios no obligatorios. El carácter no curricular de PISA facilita que los resultados entre países sean comparables, con independencia de los distintos modos de organizar las enseñanzas en cada país.
- Los estudios PISA se repiten cada tres años. En cada uno de ellos se profundiza especialmente en una de las materias. En el primer estudio, realizado en el año 2000, se profundizó en Lectura; participaron 32 países. En el segundo, realizado en 2003, se ha profundizado en Matemáticas y en él han participado 41 países. El tercer estudio se ha llevado a cabo en 2006 y la materia principal ha sido Ciencias; han participado más de cincuenta países.
- En cada uno de los estudios, además de las pruebas de conocimientos y competencias sobre las materias señaladas, también se recoge información sobre el origen social, el contexto de aprendizaje y la organización de la enseñanza a través de cuestionarios dirigidos a los propios alumnos y a los directores de sus centros, con el fin de identificar los factores asociados a los resultados educativos. Caracterizado por los siguientes elementos:

Fines de la evaluación

- 1) *concretar y someter a prueba los principios y elementos básicos del espacio europeo de Educación;*
- 2) *averiguar en qué medida los jóvenes de 15 años:*
 - *están preparados al finalizar la escolaridad obligatoria para utilizar lo que han aprendido en situaciones cotidianas, desempeñar un papel activo en la sociedad del siglo XXI y satisfacer los desafíos que dicha sociedad les plantea⁴*
 - *dominan las herramientas matemáticas, usan y se implican con las Matemáticas y tienen un buen nivel de “Alfabetización Matemática” (Mathematical Literacy) en términos de capacidades relacionadas con las matemáticas y sus aplicaciones para enfrentarse con problemas cotidianos.*

Instrumento

Una EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA del rendimiento acumulado de los estudiantes, en términos de capacidades para utilizar y hacer matemáticas en situaciones reales, es decir, para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. Todo ello significa, no sólo utilizar las matemáticas y resolver problemas matemáticos sino también, comunicar, relacionarse con las matemáticas, valorar e incluso apreciar y disfrutar con ellas.

⁴ Rico, L. (2003): “Investigación en el aula de matemáticas. La evaluación”

La evaluación se ha basado en unos *principios y elementos básicos* que son:

- el concepto de alfabetización matemática
- el concepto de competencia matemática
- el concepto de matematización

y se han tenido en cuenta:

1.- Las **situaciones y contextos**, en la medida en que en el proceso de hacer matemáticas (matematización) siempre se hace referencia a alguna parcela de la experiencia o de la realidad, incluso aunque esta sea virtual.

2.- Los **contenidos matemáticos**, tanto desde el punto de vista de la disciplina (aritmética, geometría, álgebra, etc.) como desde el punto de vista de los fenómenos reales (cantidad espacio y forma, cambios y relaciones, incertidumbre).

3.- Las **competencias** necesarias para desarrollar con soltura los procesos de matematización (aunque las competencias en sí no son variables de tarea sino de sujeto).

Principios y elementos básicos

Alfabetización Matemática

Se conoce como alfabetización matemática o “mathematical literacy” a:

“La capacidad individual para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquéllos momentos en que se presenten necesidades en la vida de cada individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo” (OCDE, 2003).

La alfabetización matemática “. . . se refiere a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente, cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones . . .” (Rico, 2004)⁵ y es considerada por unanimidad como **un elemento muy importante** a tener en cuenta para el desarrollo individual, social y científico de cualquier país.

La alfabetización matemática supone:

- atreverse a **pensar con ideas matemáticas**;
- utilizar lo aprendido en situaciones usuales de la **vida cotidiana**;
- que dicha utilización sea **espontánea y con plena conciencia** de su importancia y necesidad y de la evidencia de su utilidad, es decir, que sea incorporada plenamente al conjunto de instrumentos y capacidades que el sujeto utiliza en sus relaciones cotidianas con su entorno;

Formación para una alfabetización matemática

Una formación matemática adecuada y completa debe abarcar todos los aspectos de las matemáticas:

- PURO O FUNDAMENTAL, como ciencia pura
- APLICADO como ciencia aplicada
- INSTRUMENTAL, como conjunto de herramientas prácticas
- EDUCATIVO, como materia formativa
- ESTÉTICO, como campo creativo y de belleza

En consecuencia, la formación para una alfabetización matemática efectiva debe contemplar, al menos⁶:

⁵ “Evaluación de competencias matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003”. En: Castro y de la Torre (eds.). Actas del VIII Simposio de la SEIEM. A Coruña. Universidad de A Coruña.

⁶ Nota añadida del autor

- los **contenidos**: conceptos y procedimientos matemáticos, aisladamente y en contextos (en su faceta de aplicación)
- las **técnicas y destrezas**, aisladamente y en contextos (en su faceta de aplicación)
- el conocimiento del **uso social** de las matemáticas, de su carácter práctico
- las relaciones de las matemáticas con los **valores** de equidad, objetividad y rigor
- los aspectos de **creatividad, ingenio y belleza** de las matemáticas

Pero:

- no es suficiente, aunque sí necesario, conocer los contenidos del currículo oficial de matemáticas, aunque quizás deberían ser conocidos o “experimentados” o aprendidos como medios y no como fines⁷;
- no es suficiente, aunque sí necesario, el mero dominio de los aspectos instrumentales básicos, de los conceptos y de las técnicas y destrezas matemáticas, aunque quizás deberían ser conocidos o “experimentados” o aprendidos como medios y no como fines;
- la alfabetización matemática no se puede reducir al mero conocimiento de los conceptos, procedimientos y destrezas matemáticas. Estos son prerrequisitos, pero no son suficientes.

Amplitud de la alfabetización matemática

La alfabetización matemática no sólo aporta beneficios específicos, relacionados con las matemáticas, sino que **contribuye a la formación o alfabetización general**. Se encuentra en el centro de los modos según los que se percibe y comprende el mundo y es un componente esencial de dicha alfabetización general o “liberating literacy”, que tiene que ver con la comprensión de los hechos generales y sus relaciones en la construcción del mundo, cubriendo cuestiones que tienen que ver con la naturaleza, la sociedad, la cultura, la tecnología, etc. y sus relaciones. Aquí se pueden poner como ejemplos los siguientes: distinguir entre astronomía y astrología; entre medicina científica y no científica; entre psicología y espiritismo; entre afirmaciones descriptivas y normativas; entre hechos e hipótesis; exactitud y aproximación; el comienzo y el fin de la racionalidad, etc.

Alfabetización matemática y rendimiento escolar tradicional

Es posible que existan personas con un buen nivel de alfabetización matemática y que, sin embargo, su rendimiento en las matemáticas escolares ha sido bajo o malo?

De hecho, la alfabetización matemática se configura mediante un repertorio básico de conocimientos, técnicas y destrezas matemáticas a las que hay que añadir un cúmulo de capacidades y competencias constituidas sobre la base de la utilización de dicho repertorio en contextos cotidianos.

¿Es posible que un individuo no domine las reglas algebraicas, la resolución de la ecuación de segundo grado, el signo igual, etc. y tenga un buen nivel de pensamiento algebraico y relacional?. ¿Es posible que tenga una formación amplia en regularidades, patrones y relaciones funcionales desde un punto de vista práctico y no domine la simbolización algebraica, las propiedades y las manipulaciones algebraicas formales?. En este caso, se puede dar un mayor grado de alfabetización, aunque limitado por la falta de dominio de cuestiones que permiten extender y ampliar las competencias.

La alfabetización aquí se produce a través de las experiencias vividas fuera del contexto de la educación formal?.

Algunas cuestiones para la reflexión

Surgen numerosas cuestiones interesantes, como por ejemplo:

⁷ Opinión del autor

- ¿hasta qué punto es importante el contenido, las destrezas, los conceptos, los procedimientos matemáticos desarrollados en el currículo escolar tradicional?

- ¿es necesario realizar una selección urgente de contenidos matemáticos elementales? ¿es necesario revisar los contenidos? ¿y la metodología?

Conjetura

La alfabetización matemática se consigue gracias al desarrollo de capacidades específicas que denominamos competencias matemáticas

Competencias matemáticas

El concepto de competencia hace referencia a lo que el individuo es capaz de hacer (capacidad de respuesta)⁸.

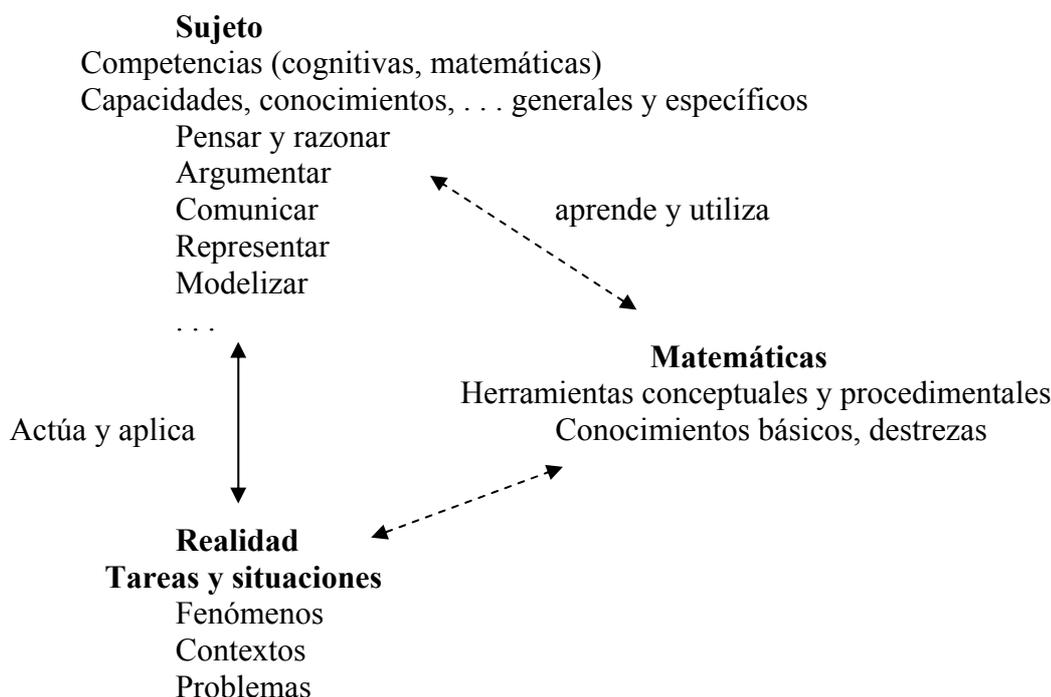
El concepto de competencia matemática está íntimamente relacionado con el **punto de vista funcional de las matemáticas**, que tiene que ver con:

- las matemáticas como “modo de hacer”
- la utilización de herramientas matemáticas
- el conocimiento matemático en funcionamiento

y en el que intervienen los siguientes elementos:

- tareas contextualizadas
- herramientas conceptuales y procedimentales
- sujeto cognitivo

y las relaciones entre ellos, tal y como se representa en el gráfico adjunto.



Significados

Tres significados para el término competencia:

⁸ Este planteamiento coincide con el que se adopta a propósito de las manifestaciones observables de la comprensión según el modelo para el diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático de Gallardo (2004)

1).- La competencia como **dominio de estudio y finalidad principal** y prioritaria de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Tiene que ver con la idea de alfabetización matemática y un modo global de hacer matemáticas, de resolver problemas prácticos;

2).- La competencia como **conjunto de procesos generales**.

Las competencias son procesos matemáticos generales que concretan las finalidades educativas, orientan las tareas y caracterizan los niveles en el rendimiento de los alumnos

3).- Las competencias agrupadas en forma de **grupos o niveles de complejidad cognitiva expresables mediante una escala**.

Utilidad múltiple del concepto de competencia matemática

Las competencias matemáticas sirven para:

1.- Propósitos **formativos**

Para orientar los procesos de formación hacia el desarrollo de determinadas capacidades.

2.- Propósitos **normativos**

para especificar aspectos curriculares, fines, métodos, etc.

3.- Propósitos **descriptivos**

para describir y caracterizar las prácticas de enseñanza de las matemáticas en el aula, las respuestas de los estudiantes, los fines que se persiguen con determinadas tareas, etc.

4.- Propósitos **comparativos**

Se pueden comparar diferentes currícula, diferentes clases de educación matemática, en diferentes niveles o en diferentes lugares, etc.

5.- Propósitos **evaluadores**; como soportes metacognitivos para evaluación de procesos tanto de profesores como de alumnos

Las competencias matemáticas han sido analizadas con los fines descritos por Niss, M. (1999)⁹ a propósito de la preparación del Proyecto danés KOM (Competencias y aprendizaje de las Matemáticas). De dichos planteamientos, aunque esta vez con fines comparativos y evaluadores, la OCDE adoptó una parte de dichas consideraciones para el desarrollo del proyecto PISA 2003. Veamos primero el enfoque de Niss con una cierta amplitud para pasar posteriormente al examen de las consideraciones realizadas para la elaboración y desarrollo del proyecto PISA 2003.

Competencias matemáticas según Niss

Arranca de la pregunta *¿Qué significa **dominar las matemáticas**?*: domina las matemáticas quién posee competencias matemáticas.

Poseer una **competencia**, o ser competente, en algún campo o dominio de la vida personal, profesional o social es dominar, en un cierto grado y dependiendo de las condiciones y circunstancias, aspectos esenciales de la vida en ese dominio o campo. Poseer **competencia matemática** significa:

poseer habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos intra y extra matemáticos y situaciones en las que las matemáticas juegan o pueden tener un protagonismo

Las competencias matemáticas:

- se adquieren, se construyen o se desarrollan;
- se poseen, se dispone de ellas o se tienen en mayor o menor grado;
- se manifiestan en las actuaciones del sujeto ante situaciones que las activan.

⁹ Niss, M. (1999).- Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project

Es necesario distinguir, por tanto, entre *tareas de diagnóstico*, *tareas de aprendizaje* y *tareas de aplicación* o utilización práctica de dichas competencias, si bien todas pueden cumplir todas las funciones con las orientaciones adecuadas.

Requisitos básicos (necesarios pero no suficientes) para tener competencia matemática:

- poseer conocimiento factual
- poseer destrezas técnicas

Tipos de competencias matemáticas y situaciones en las que se manifiestan¹⁰

El autor distingue dos grupos de competencias:

- 1º grupo, competencias 1, 2, 3 y 4.
- 2º grupo, competencias 5, 6, 7 y 8

Primer grupo Tienen que ver con la habilidad para preguntar y responder cuestiones en matemáticas y por medio de las matemáticas

1.- PENSAR MATEMÁTICAMENTE (dominar los modos matemáticos de pensamiento)

- proponer cuestiones características de las matemáticas conociendo las clases de respuestas (no necesariamente las respuestas concretas ni como obtenerlas);
- comprender y manejar el alcance y las limitaciones de un concepto dado;
- ampliar el dominio de un concepto abstrayendo algunas de sus propiedades;
- generalizar los resultados a clases más amplias de objetos;
- distinguir entre diferentes clases de enunciados / afirmaciones matemáticas, incluyendo sentencias condicionadas, cuantificadores, suposiciones, definiciones, teoremas, conjeturas, casos, etc.

Ejemplos:

1.a.- Dos hermanos se quieren repartir un campo rectangular en partes iguales. ¿Cómo lo pueden hacer?. ¿De cuántas maneras distintas?. ¿Cómo pueden estar seguros de que los trozos son iguales?.

1.b.- Sin hacer la multiplicación ¿se puede saber si 17×28 es mayor o menor que 400?. Explica porqué. ¿Hay varias formas de hacerlo?.

2.- PROPONER Y RESOLVER PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

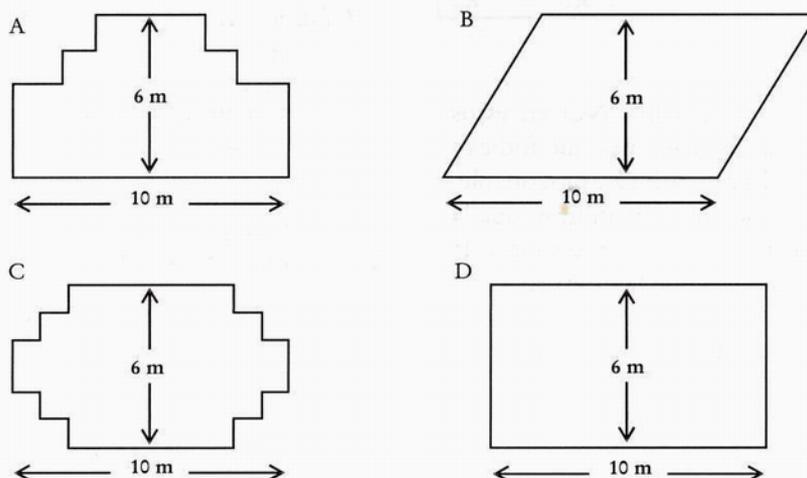
- identificar, proponer y especificar diferentes clases de problemas de matemáticas (puro-aplicado, abierto con solución-cerrado, etc.);
- resolver diferentes clases de problemas de matemáticas (puro-aplicado, abierto con solución o cerrado, propuesto por otros o por uno mismo, propuestos de diferentes modos, etc.);

Ejemplos:

2.a.-

¹⁰ Se proponen algunos ejemplos a pesar de la complejidad de la elección y representatividad de las tareas y situaciones.

Un carpintero tiene 32 metros de madera y quiere construir una pequeña valla alrededor de un parterre en el jardín. Está considerando los siguientes diseños para el parterre.



Rodea con un círculo *Sí* o *No* para indicar si, para cada diseño, se puede o no se puede construir el parterre con los 32 metros de madera.

2.b.- Encontrar los números enteros a, b, c y d tales que: $4/a = 1/b + 1/c + 1/d$

3.- MODELIZAR MATEMÁTICAMENTE (analizar, construir y evaluar modelos)

Se puede entender también la competencia de modelización como el *conjunto de habilidades, destrezas y actitudes que son importantes para el proceso de modelización matemática*. Dicho proceso se puede referir a:

- analizar fundamentos y propiedades de modelos existentes, valorar su rango y validez;
- decodificar modelos existentes (traducir e interpretar elementos de un modelo en términos de la realidad modelizada);
- aplicar un modelo a un contexto dado, lo que requiere:
 - estructurar el campo
 - matematizar
 - interpretar y resolver problemas
 - trabajar con el modelo
 - validar el modelo, interna y externamente
 - analizar y criticar el modelo, en sí mismo y en sus posibles alternativas
 - comunicar el modelo y sus resultados
 - observar y controlar el proceso de modelización

Niveles en la competencia de modelización¹¹

Nivel 1.- Reconocer y comprender la modelización

Se caracteriza por la habilidad para:

- reconocer y describir el proceso de modelización,
- caracterizar, distinguir y localizar las fases en el proceso de modelización

¹¹ Los niveles y ejemplos que se mencionan en este apartado han sido elaborados a partir de: Henning, H.; Keune, M. (2004). Levels of modelling competence. Department of Mathematics. Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Germany.

Nivel 2.- Modelización independiente

Se caracteriza por la habilidad para:

- analizar y estructurar los problemas y abstraer las cantidades,
- adoptar diferentes perspectivas,
- aplicar y establecer modelos matemáticos,
- trabajar sobre modelos matemáticos,
- interpretar resultados y otros aspectos de los modelos,
- validar los modelos y el proceso completo.

Nivel 3.- Reflexión sobre el proceso de modelización

Se caracteriza por la habilidad para:

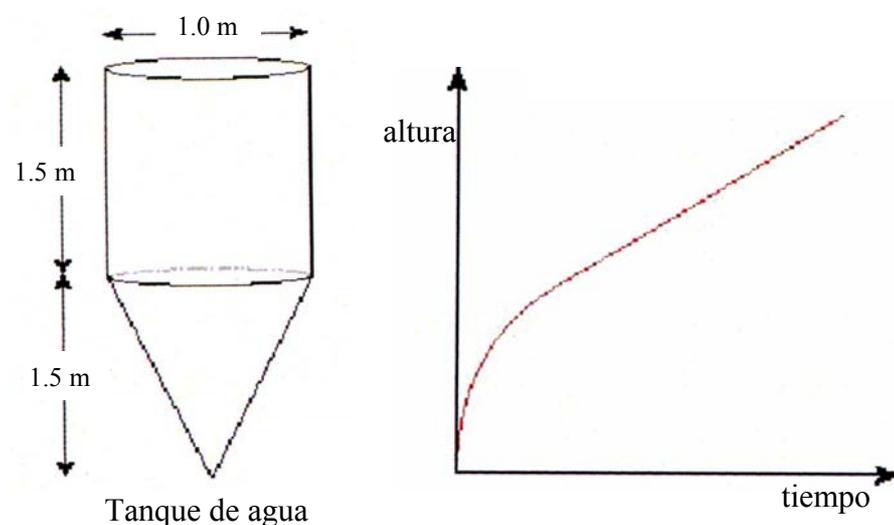
- analizar críticamente el proceso de modelización,
- caracterizar los criterios para la evaluación del modelo utilizado,
- reflexionar sobre la causa de la modelización,
- reflexionar sobre las aplicaciones de las matemáticas.

Ejemplos basados en el estudio PISA (OCDE, 2003) para cada uno de los niveles

3.1.- El problema del tanque de agua

(nivel 1)

Tenemos un tanque vacío que se llena de agua a la razón de un litro por segundo. Lo que aparece en las figuras siguientes son los resultados de un proceso de construcción de un modelo realizado por un grupo de alumnos. En dicho proceso, los alumnos han hecho ciertas suposiciones sobre el tanque con las que han dibujado el gráfico que acompaña al dibujo del tanque.



- a) Describe cómo crees que los alumnos realizaron el proceso de modelización
- b) ¿Qué suposiciones hicieron?
- c) ¿Qué clase de modelo usaron?
- d) ¿Cuál puede ser el próximo paso teniendo en cuenta el gráfico?

3.2.- Fiesta escolar

(nivel 2) (resolver un problema utilizando técnicas de modelización)

Se va a celebrar una fiesta en el colegio a la que va a venir a tocar un famoso grupo musical. La mayoría de los alumnos del centro y de otros centros cercanos querrán asistir a la fiesta, de manera que es posible que se llene el local.

Sabiendo que el grupo cobra una cantidad y que el colegio subvenciona con otra cantidad, los organizadores te encargan la tarea de averiguar el máximo número de personas que caben en el gimnasio y fijar un precio para la entrada.

- a) Explica como harías para resolver el problema y los pasos necesarios para encontrar la solución;
- b) Completa la tarea como creas conveniente. Si falta información precisa, emplea la estimación.

Los organizadores quieren convencer al Director del colegio mediante una presentación corta de las conclusiones de tu trabajo,

- c) Elabora un guión corto con los puntos clave para que dicha exposición sea convincente.

3.3.- Accidentes de tráfico

(nivel 3) (reflexión crítica sobre el proceso de modelización y su uso en una aplicación real; evaluar el uso tendencioso de modelos matemáticos en general)

En la siguiente tabla se indica el número de muertes por accidente de tráfico en un país en una serie de años.

año	1960	1965	1970	1975	1980	1984
Número de accidentes	110	200	330	480	590	550

La tabla es utilizada por una marca de coches conocida para justificar la necesidad de un nuevo sistema de seguridad instalado en sus vehículos.

El slogan que acompaña a la tabla es el siguiente: “Cada 10 años se duplica o triplica el número de accidentes. Con nuestros vehículos equipados con el sistema HB1 viajará más seguro!!!”

- a) ¿Es correcta la frase de la primera parte del slogan?. Justifica la respuesta
- b) ¿Porqué esta casa comercial utiliza este recurso matemático?
- c) ¿Es posible utilizar erróneamente las matemáticas?

4.- RAZONAR MATEMÁTICAMENTE

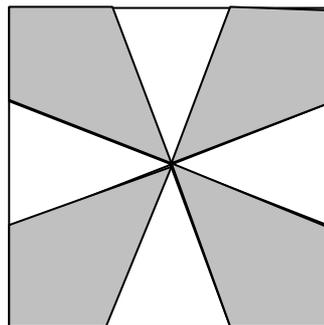
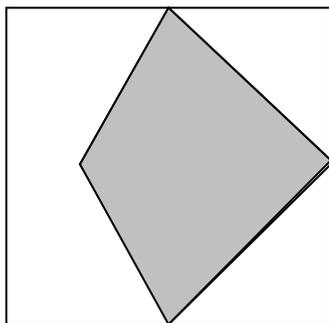
- seguir y valorar cadenas de argumentos
- saber lo que es una demostración matemática y cómo se diferencia de otras clases de razonamiento y de otras clases de razonamiento matemático (por ejemplo el razonamiento heurístico)
- descubrir las ideas básicas en una línea argumental, distinguiendo principales sublíneas a partir de detalles, ideas y aspectos técnicos

Ejemplos:

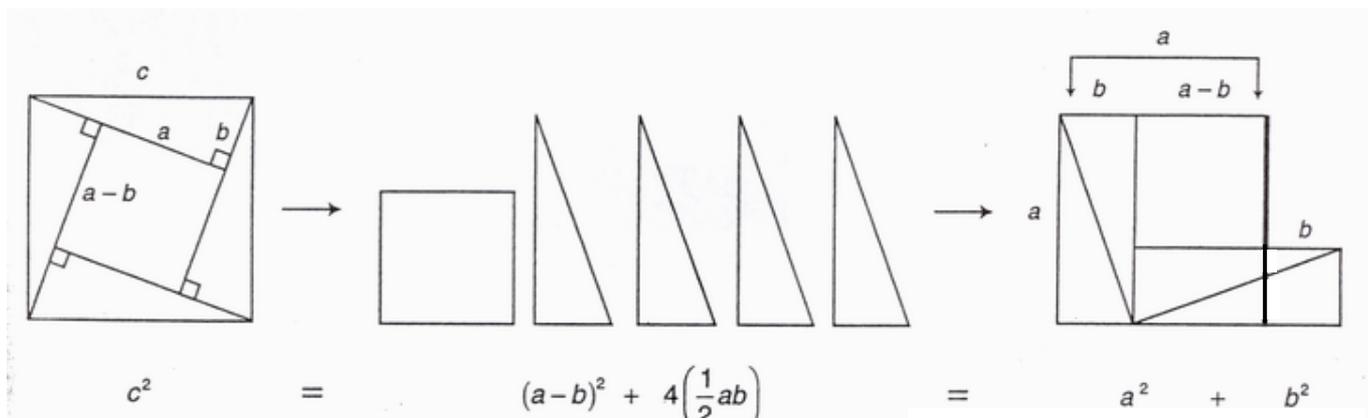
4.a.- Completa:

$$\begin{array}{r}
 \square 8 \square \\
 \times \square 4 \\
 \hline
 \square 5 \square 0 \\
 2 \square 1 0 \\
 \hline
 2 \square 6 \square 0
 \end{array}$$

4.b.- Cada cuadrado tiene de área 1. ¿Qué parte del total representa lo sombreado?



4.c.- razonamiento combinado geométrico-algebraico sobre el teorema de Pitágoras



Segundo grupo de competencias. Tienen que ver con la habilidad para utilizar el lenguaje y las herramientas matemáticas.

5.- REPRESENTAR OBJETOS Y SITUACIONES MATEMÁTICAS

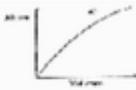
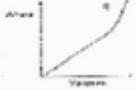
- comprender, utilizar, decodificar e interpretar diferentes clases de representaciones de objetos, fenómenos y situaciones matemáticas y distinguir entre ellos;
- comprender y utilizar las relaciones entre diferentes representaciones de la misma entidad u objeto, incluido el conocimiento de sus restricciones y limitaciones;
- elegir entre diferentes representaciones y pasar de unas a otras

Ejemplos:

5.a.-

Observa:	
1. «Los precios están subiendo ahora más despacio que en ningún otro momento de los últimos cinco años.»	
2. «Cuanto más pequeñas son las cajas, más podemos cargar en la camioneta.»	
Representa	
3. «Me gusta bastante la leche fría y la leche caliente, pero ¡detesto la leche templada!»	
4. ¿Cómo depende el precio de una bolsa de patatas de su peso?	
5. ¿Cómo varía el diámetro de un globo cuando sale aire lentamente de él?	
6. ¿Cómo depende la duración de una carrera de su longitud?	

5.b.-

Observa:	
	
	
Completa:	
	
	
	

6.- UTILIZAR SIMBOLOS Y FORMALISMOS MATEMÁTICOS

- decodificar e interpretar lenguaje matemático simbólico y formal y comprender sus relaciones con el lenguaje natural;
- comprender la naturaleza y las reglas de los sistemas matemáticos formales (desde ambos puntos de vista, sintáctico y semántico);
- traducir entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico/formal;

- utilizar y manipular sentencias y expresiones que contienen símbolos y formulas.

Ejemplos:

6.a.- “el cuadrado del binomio”. Proceso de investigación mediante cuadrados de puntos¹²

¿Cómo crecen los cuadrados?

a) De uno en uno:

x x x •	x x x x •
o o o x	o o o o x
o o o x	o o o o x
o o o x	o o o o x
	o o o o x , ...

Escribiendo con números cómo crecen los cuadrados:

$(3 + 1)^2 = 3^2 + 2 \times 3 + 1$; $(4 + 1)^2 = 4^2 + 2 \times 4 + 1$; ...

En general $(x + 1)^2 = x^2 + 2 \times x + 1$

b) De dos en dos:

x x x • •	x x x x • •
x x x • •	o o o o x x
o o o x x	o o o o x x
o o o x x	o o o o x x
o o o x x,	o o o o x x

$(3 + 2)^2 = 3^2 + 2 \times (2 \times 3) + 2^2$; $(4 + 1)^2 =$
 $= 4^2 + 2 \times (2 \times 4) + 2^2$; ...

En general $(x + 2)^2 = x^2 + 2 \times (2 \times x) + 2^2$.

c) En general (una tabla es una valiosa ayuda):

$(x + 1)^2 = x^2 + 2 \times x + 1$
 $(x + 2)^2 = x^2 + 2 \times (2 \times x) + 2^2$
 $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times (3 \times x) + 3^2$

7.- COMUNICAR EN, CON Y SOBRE LAS MATEMÁTICAS

- comprender los textos escritos, las expresiones visuales o las frases orales de otros, en una variedad de registros lingüísticos, sobre cuestiones materias o temas de contenido matemático;

- expresarse uno mismo sobre tales cuestiones materias o temas, con diferentes niveles de precisión teórica y técnica, de forma oral, visual o escrita;

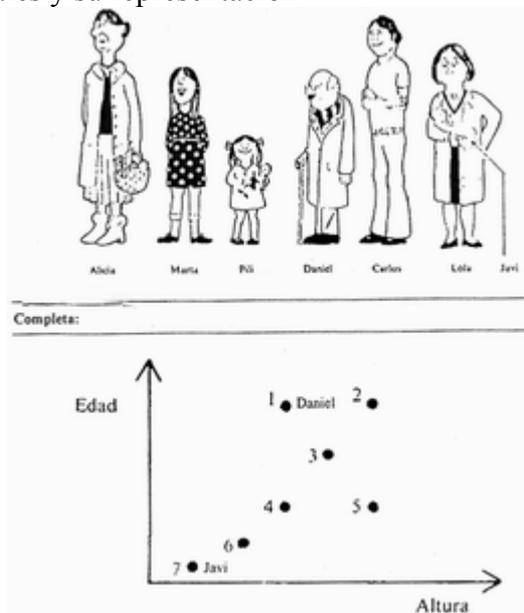
Ejemplos:

7.a.- 4 o más jugadores. El profesor forma una fracción sencilla con los multicubos. Por turno, cada jugador debe formar una nueva fracción equivalente a la primera, utilizando el mismo material, y convencer al resto de jugadores y a los demás de que efectivamente es una fracción equivalente a la primera. Sólo se apuntará el tanto si hay consenso en la bondad de la construcción. El profesor moderará el debate.

¹² Extraído de Gómez, B. (1992).- Las Matemáticas y el proceso educativo. Cap. 2 En: Área de Conocimiento Didáctica de la Matemática. Madrid: Síntesis

7.b.- Un grupo de alumnos recaba información de las familias de los compañeros para averiguar las preferencias en la ocupación del tiempo libre, elaborar con los datos unos informes y gráficos y exponer las conclusiones a toda la clase.

7.c.- Relaciones funcionales y su representación



8.- UTILIZAR RECURSOS AUXILIARES Y HERRAMIENTAS (tecnológicas, entre otras)

- conocer la existencia y propiedades de varias herramientas y recursos para la actividad matemática, sus alcances y limitaciones;
- ser capaces de usar racionalmente tales recursos y herramientas.

Ejemplos:

8.a.- Conocer la calculadora¹³

Sin pulsar la calculadora	Pulsa la calculadora
¿Qué esperas que salga en la pantalla si pulsas las teclas en el orden indicado?	¿Qué sale en realidad?
1.ª $2 + 3 \times 5 =$
2.ª $5 \times 2 + 3 =$
3.ª $3 \times 5 + 2 =$
4.ª $2 \times + 3 =$
5.ª $2 + \times 3 =$
6.ª $2\sqrt{\quad} \times =$
7.ª $2 \times = \times = \times = \times =$
8.ª $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times =$
9.ª $3 + + 2 = 3 = 4 = 5 =$
10.ª $3 \times \times 2 = 3 = 4 = 5 =$
11.ª $2 \times \div =$
12.ª $2 \div \times =$
13.ª $1 \div 0 =$
14.ª $1 \div 7 \times 7 =$
15.ª $1 \times 7 \div 7 =$
16.ª $4\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}\dots =$
17.ª $0,5\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}\dots =$

¹³ Extraído de Hernán, F. (1989).- Recursos en el aula de Matemáticas. Madrid: Síntesis

8.b.- Con regla y compás, construir distintos cuadriláteros a partir de sus diagonales, enunciar las regularidades que se observan y generalizar los resultados.

Algunos comentarios del autor

- todas las competencias tienen que ver con procesos, actividades y comportamientos mentales o físicos, con lo que se centran en lo que el individuo puede hacer;
- las competencias están relacionadas entre sí;
- todas las competencias tienen un aspecto analítico y otro productivo
 - el aspecto analítico se centra en torno a la comprensión, interpretación, análisis y valoración de los fenómenos y procesos (reflexión);
 - el aspecto productivo se centra en la construcción activa y el desarrollo de procesos (aplicación);
- todos los términos son específicamente matemáticos (lenguaje, símbolos, representación, etc.);
- son independientes de contenidos y niveles educativos; no están sujetos a tópicos matemáticos, currículos o clases;
- al igual que ocurre con la lengua, se pueden producir diferencias entre niveles y zonas;
- la intuición matemática, la creatividad y la capacidad de abstracción se encuentran distribuidas a lo largo de las ocho competencias;
- las competencias y los contenidos son dos campos que se deben entrecruzar entre sí como en una tabla de doble entrada. Cada casilla indicará como se manifiesta la competencia concreta en el caso de un contenido concreto.

Aspectos complementarios que tienen que ver con la Matemática como disciplina

Las 8 competencias no cubren todo el campo de las matemáticas. Existen tres aspectos que no se derivan de las competencias y que es necesario completarlos mediante el estudio interno de la disciplina. Son:

- las aplicaciones actuales de las matemáticas a otras ciencias o campos
- el desarrollo histórico de las matemáticas
- la naturaleza especial de las matemáticas como disciplina

Se podrían identificar con lo que se conoce como el conocimiento sociocultural de las matemáticas como disciplina.

Análisis de tareas desde el punto de vista de su contribución al desarrollo de competencias matemáticas según Niss

Son múltiples las situaciones que requieren de las matemáticas y que se resolverían antes, mejor y más fácilmente si se utilizaran dichos conocimientos. Por ejemplo:

- Necesito controlar lo que gasto mensualmente en transporte
- Tengo que hacer una planificación del trabajo para la semana que viene con objeto de preparar los exámenes.
- Voy a pintar mi habitación . . . ¿cuánta pintura necesito? ¿de qué precio? ¿cuánto me va a costar? . .
- El partido empieza a las nueve y estoy lejos de la casa. ¿A qué hora límite tengo que salir para llegar a tiempo y verlo desde el principio? ¿qué tengo que averiguar? ¿si no dispongo de información exacta, qué debo hacer?
- Me quiero comprar una bicicleta. ¿Cuánto tiempo aproximado debo estar ahorrando hasta tener la cantidad total si ingreso una media semanal de 100 euros y un gasto medio semanal de 70 euros?
- Estoy pensando en comprar una vivienda, pero como máximo puedo dedicar 600 euros al mes. ¿qué posibilidades tengo? ¿qué tipo de vivienda me puedo comprar?
- Quiero que la vivienda esté en el centro, que sea grande, soleada, con garaje y con calidades excepcionales. ¿cómo puedo compatibilizar mis deseos con mi disponibilidad económica?
- ¿A qué hora quedo con Blanca en el centro para que me de tiempo a llegar?

- Si tengo que ir en taxi a la calle . . . ¿cuál será el mejor camino para llegar antes? ¿tendré dinero suficiente si el taxista decide ir por un camino más largo?
- Quiero invitar a todos mis amigos a mi fiesta de cumpleaños . . . ¿cómo lo hago?, ¿qué necesito?
- Me gusta esa librería casera y quiero hacer una igual . . .;
- ¿cómo puedo construir un cuadrado cuya superficie sea el doble que la de otro cuadrado?;
- Mi hijo quiere empezar a estudiar una carrera. . ¿qué será lo mejor?;

Ejercicio: Analizar las tareas desde el punto de vista de las competencias requeridas, es decir, teniendo en cuenta:

- información necesaria y accesible
- información a averiguar (no accesible directamente)
- actuaciones a llevar a cabo: organización de la información, análisis de relaciones, estructuración de la situación, etc.
- modelos matemáticos a utilizar en su caso
- resolución de problemas
- conceptos y procedimientos
- capacidades necesarias para afrontar la tarea
- competencias involucradas (en orden de importancia)

Competencias matemáticas en PISA 2003

El Proyecto PISA utiliza las siguientes competencias matemáticas para propósitos evaluadores y comparativos fundamentalmente:

- Pensar y razonar (distinguir entre diferentes tipos de enunciados, plantear cuestiones propias de las matemáticas, etc.);
- argumentar (conocer lo que son pruebas matemáticas, tener sentido para la heurística, crear y expresar argumentos matemáticos, etc.);
- comunicar (expresión matemática, oral y escrita, entender expresiones, etc.);
- modelizar (estructurar el campo, interpretar los modelos, trabajar con modelos, etc.);
- plantear y resolver problemas;
- representar (codificar, decodificar e interpretar representaciones, traducir entre diferentes representaciones, etc.);
- utilizar varios lenguajes.

Niveles de complejidad

1.- Niveles de complejidad por grupos de competencias (niveles teóricos)

Para el diseño de las pruebas, puesto que las competencias en sí no se pueden asignar sin más a tareas concretas para cada una de ellas, se han establecido tres niveles de complejidad que hacen referencia a clases o grupos de competencias; son tres: de **reproducción** y procedimientos rutinarios, de **conexiones** e integración y de **reflexión**, razonamiento y argumentación para resolver problemas originales.

Esta variable ha servido para construir las tareas de acuerdo con los siguientes indicadores¹⁴:

REPRODUCCIÓN	CONEXION	REFLEXIÓN
- Contextos familiares - Conocimientos practicados - Aplicación de algoritmos	- Contextos menos familiares - Interpretar y explicar - Manejar y relacionar diferentes	- Tareas que requieren comprensión y reflexión - Creatividad

¹⁴ Tabla extraída de Rico, L. (2005) (documento inédito)

estándar - Realización de operaciones sencillas - Uso de fórmulas elementales	sistemas de representación - Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios	- Ejemplificación y uso de conceptos - Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos - Generalizar y justificar resultados obtenidos
---	---	---

2.- Niveles de complejidad expresables mediante una escala (obtenidos empíricamente)

Existen 6 niveles de competencia matemática obtenidos empíricamente que expresan la maestría en la realización de las tareas matemáticas y la riqueza cognitiva asociada a tal realización. Son los siguientes¹⁵:

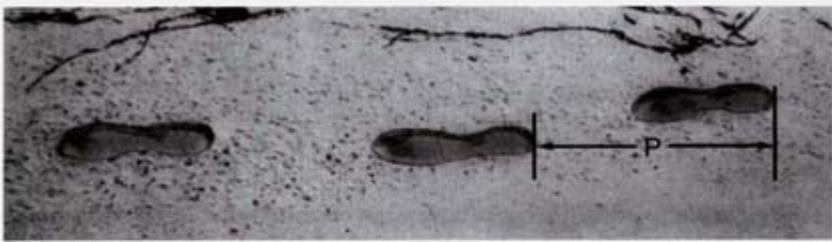
- **Primer Nivel** (1): los alumnos saben responder a preguntas planteadas en contextos conocidos, donde está presente toda la información pertinente y las preguntas están definidas claramente. Son capaces de identificar la información y llevan a cabo procedimientos rutinarios al seguir instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.
- **Segundo Nivel** (2): los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa. Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único sistema de representación. Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales. Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.
- **Tercer Nivel** (3): los alumnos saben ejecutar procedimientos descritos con claridad incluyendo aquéllos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos. Saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. También son capaces de elaborar escritos breves para exponer sus interpretaciones, resultados y razonamientos.
- **Cuarto Nivel** (4): los alumnos pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Saben utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y cierta perspicacia en estos contextos. Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.
- **Quinto Nivel** (5): Los alumnos saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de resolución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos. Pueden trabajar estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones relacionadas adecuadamente, caracterizaciones simbólicas y formales e intuiciones relativas a estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
- **Sexto Nivel** (6): Los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones complejas. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y traducirlas de una manera flexible. Los estudiantes de este nivel poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Pueden aplicar su entendimiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Pueden formular y comunicar con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, argumentos y su adecuación a las situaciones originales (OCDE, 2004, p. 47; OCDE, 2005, pp 47 y 48).

¹⁵ Maestro, C. y otros (2005)

La siguiente tabla, extraída de Rico, L. (2005), recoge los resultados empíricos obtenidos en términos de descriptores resumidos por niveles y competencias.

Niveles	1	2	3	4	5	6
Competencias						
Pensar y razonar	Responder a cuestiones en contextos muy conocidos		Responder a cuestiones en contextos poco familiares		Responder a cuestiones complejas en multitud de contextos	Formar y relacionar conceptos
Argumentar y justificar				Elaborar argumentos basados en las propias acciones	Formular los razonamientos desarrollados	Elaborar argumentos desde la propia reflexión
Comunicar		Describir resultados obtenidos	Realizar explicaciones sencillas		Comunicar conclusiones con precisión	
Modelizar				Usar modelos explícitos en situaciones concretas	Desarrollar y usar modelos en múltiples situaciones	
Resolución de problemas	Resolver problemas con datos sencillos		Seleccionar y aplicar estrategias sencillas		Seleccionar, comparar y evaluar estrategias	Generalizar resultados de problemas
Representar	Leer datos directamente de tablas o figuras	Usar un único tipo de representación	Conocer y usar diferentes sistemas de representación	Vincular diferentes sistemas de representación, incluido el simbólico		Relacionar entre sí y traducir con fluidez diferentes sistemas de representación
Lenguaje simbólico	Realizar operaciones básicas	Usar algoritmos y fórmulas elementales	Aplicar procedimientos descritos con claridad	Representar situaciones reales mediante símbolos		Dominar con rigor el lenguaje simbólico

Ejemplos de tareas de la evaluación del proyecto PISA 2003



La foto muestra las huellas de un hombre caminando. La longitud del paso P es la distancia entre los extremos posteriores de dos huellas consecutivas.

Para los hombres, la fórmula $\frac{n}{P} = 140$ da una relación aproximada entre n y P donde:

n = número de pasos por minuto, y
 P = longitud del paso en metros.

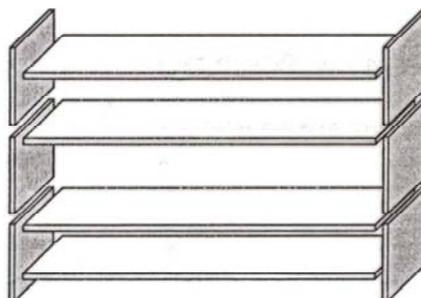
Pregunta 1: CAMINAR M124Q01 - 0 1 2 9

Si se aplica la fórmula a la manera de caminar de Enrique y éste da 70 pasos por minuto, ¿cuál es la longitud del paso de Enrique? Muestra tus cálculos.

Pregunta 19: ESTANTERÍAS

Para construir una estantería un carpintero necesita lo siguiente:

- 4 tablas largas de madera,
- 6 tablas cortas de madera,
- 12 ganchos pequeños,
- 2 ganchos grandes,
- 14 tornillos.



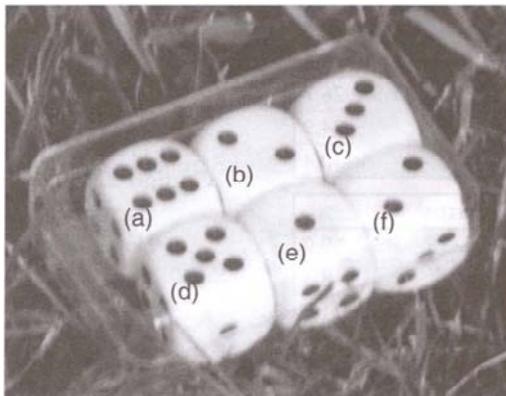
El carpintero tiene en el almacén 26 tablas largas de madera, 33 tablas cortas de madera, 200 ganchos pequeños, 20 ganchos grandes y 510 tornillos.

¿Cuántas estanterías completas puede construir este carpintero?

Respuesta: ___ estanterías.

Pregunta 3: CUBOS

En esta fotografía puedes ver seis dados, etiquetados desde la (a) a la (f). Hay una regla que es válida para todos los dados: La suma de los puntos de dos caras opuestas de cada dado es siempre siete.



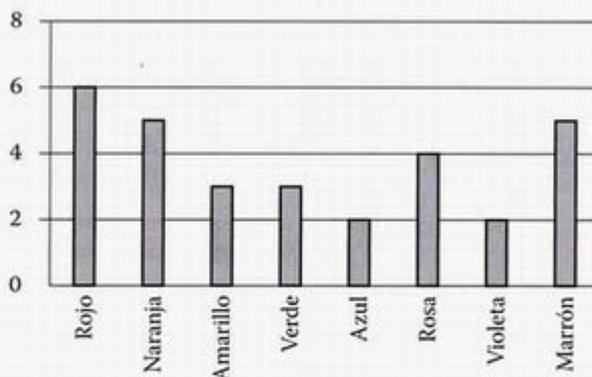
Escribe en cada casilla de la tabla siguiente el número de puntos que tiene la cara inferior del dado correspondiente que aparece en la foto.

(a)	(b)	(c)
(d)	(e)	(f)

Pregunta 16: CAMELOS DE COLORES

M467Q01

La madre de Roberto le deja coger un caramelo de una bolsa. Él no puede ver los caramelos. El número de caramelos de cada color que hay en la bolsa se muestra en el siguiente gráfico.



¿Cuál es la probabilidad de que Roberto coja un caramelo rojo?

- A 10%
- B 20%
- C 25%
- D 50%

EL MEJOR COCHE

Una revista de coches utiliza un sistema de puntuaciones para evaluar los nuevos coches y concede el premio de Mejor coche del año al coche con la puntuación total más alta. Se están evaluando cinco coches nuevos. Sus puntuaciones se muestran en la tabla.

Coche	Seguridad (S)	Ahorro de combustible (C)	Diseño exterior (D)	Habitáculo interior (H)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
XK	3	2	3	2

Las puntuaciones se interpretan de la siguiente manera: 3 puntos – Excelente; 2 puntos – Bueno; 1 punto - Aceptable

Para calcular la puntuación total de un coche, la revista utiliza la siguiente regla, que da una suma ponderada de las puntuaciones individuales:

$$\text{Puntuación total} = (3 \times S) + C + D + H$$

Calcula la puntuación total del coche Ca. Escribe tu contestación en el espacio siguiente. Puntuación total de Ca:

Pregunta 38: El fabricante del coche Ca pensó que la regla para obtener la puntuación total no era justa. Escribe una regla para calcular la puntuación total de modo que el coche Ca sea el ganador.

Tu regla debe incluir las cuatro variables y debes escribir la regla rellenando con números positivos los cuatro espacios de la ecuación siguiente.

$$\text{Puntuación total} = \dots\dots\dots S + \dots\dots\dots C + \dots\dots\dots D + \dots\dots\dots H.$$

Algunos resultados PISA 2003

- La materia principal en el estudio PISA 2003 ha sido Matemáticas, a la que se le ha dedicado un 55% del tiempo de evaluación. Las otras materias en esta ocasión han sido Lectura, Ciencias y Solución de problemas, con un 15% del tiempo de evaluación cada una.
- En PISA 2003 han participado 41 países, los 30 países miembros de la OCDE y 11 no miembros. Entre ellos quedan incluidos los 15 países que eran miembros de la Unión Europea en 2003. Se ha evaluado un total de 276.165 alumnos provenientes de 10.104 centros escolares.

La participación de España

- España ha participado en PISA 2003, como ya lo hizo en PISA 2000, y ha sido el Ministerio de Educación y Ciencia el que ha llevado a cabo las tareas de coordinación e implantación del estudio, a través del Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE) y en estrecha colaboración con las Administraciones educativas de las Comunidades Autónomas.

• Las Comunidades Autónomas de Castilla y León, Cataluña y País Vasco han participado en el proyecto PISA 2003 con una muestra ampliada, lo que ha permitido una mayor precisión en la medida de sus resultados, suficiente para una presentación desglosada de los mismos.

• El número de alumnos y de centros en la muestra española en PISA 2003 ha sido el siguiente:

Territorio	Alumnos	Centros
España	10.761	383
Castilla y León	1.490	51
Cataluña	1.516	50
País Vasco	3.885	141

Rendimiento medio en matemáticas

• Los alumnos españoles de 15 años muestran un rendimiento en matemáticas 15 puntos por debajo del promedio de la OCDE, fijado en 500 puntos. Esta diferencia es estadísticamente significativa. El rendimiento de los alumnos de Castilla y León y del País Vasco es significativamente superior al del conjunto de España.

• Los resultados de España no son significativamente diferentes de los de Eslovaquia, Noruega, Luxemburgo, Polonia, Hungría, Letonia y Estados Unidos.

• Aunque España figura en el puesto 26 de la lista, la falta de significatividad estadística de las diferencias con los países mencionados en el punto anterior hace que España ocupe un puesto indeterminado entre las posiciones 22 y 24 entre los países de la OCDE, o entre las posiciones 25 y 28 entre los 41 países participantes. España ocupa el puesto 22 entre estos países en cuanto a PIB per capita.

• La distribución de puntuaciones individuales en Matemáticas ha sido dividida en siete niveles de rendimiento. Los niveles se numeran del 1 al 6, pero el nivel inferior se denomina “nivel menor que 1” ya que agrupa a aquellos alumnos con un rendimiento tan bajo que PISA no es capaz de describirlo adecuadamente.

Evaluación de Diagnóstico Junta de Andalucía

Fines y principios

La evaluación de diagnóstico que se ha realizado en la Comunidad Autónoma Andaluza se enmarca dentro de un proceso orientado al establecimiento de una nueva Ley de Educación para Andalucía dirigida a mejorar la calidad de su Sistema Educativo y conforme con las orientaciones de la Unión Europea al respecto.

La evaluación se ha llevado a cabo asumiendo los principios de:

- Compromiso ético
- Participación democrática
- responsabilidad compartida
- confidencialidad
- transparencia

Fines

Fin general

Evaluación del rendimiento del alumnado como parte de un proceso de evaluación más amplio. La evaluación ha sido censal por un lado, para información a los propios centros, y muestral con carácter de evaluación externa realizada por la Consejería de Educación.

Contenido

Esta evaluación del rendimiento se ha centrado en la **evaluación de competencias** en el mismo sentido que la evaluación del proyecto PISA 2003.

Objetivos

- mejorar el rendimiento de los alumnos
- favorecer la cooperación e integración de esfuerzos
- conocer el grado de consecución de los objetivos educativos
- potenciar modelos de evaluación formativa

Principios

Concepto de competencia

“Saber hacer complejo, resultado de la integración, movilización y adecuación de capacidades, conocimientos, actitudes y habilidades utilizados eficazmente en situaciones que tengan un carácter común”¹⁶

Otro enfoque: “Una combinación de habilidades prácticas y cognoscitivas interrelacionadas, conocimientos, motivaciones, valores y ética, actitudes, emociones y otros componentes sociales y comportamentales que pueden movilizarse conjuntamente para una acción eficaz en un contexto particular”¹⁷

O también: “el desarrollo armónico del intelecto, de la inteligencia emocional y de la posesión de las habilidades y destrezas necesarias para aplicar y desarrollar los conocimientos adquiridos en cualquier contexto o situación, todo ello sustentado en valores éticos, morales y culturales comúnmente aceptados en el contexto social en el que nos desenvolvemos”¹⁸

Nota del autor: Estas definiciones o descripciones contrastan, en el sentido de su complejidad, indeterminación y falta de claridad, con las consideraciones mucho más simples de los planteamientos de la OCDE, en los que se concibe la competencia como:

“*capacidad de respuesta a demandas complejas y de realización de tareas diversas de forma adecuada*” o dicho de otra manera, como “*capacidad de respuesta adaptada*” o “*capacidad de poner en funcionamiento, de forma globalizada, conocimientos, destrezas y actitudes adquiridas en distintos contextos*”

Competencia

En el documento de la Junta de Andalucía se define la competencia como una *combinación de conocimientos, capacidades y actitudes adecuadas al contexto*.

Competencias básicas o claves

Aquellas que van a permitir a la persona en la sociedad del conocimiento, lograr una realización de su ser individual, social y su inclusión en el mundo laboral. Son las que todas las personas precisan para su relación y desarrollo personales así como para la ciudadanía activa, la inclusión social y el empleo.

Se caracterizan por:

- saber hacer
- en diversidad de contextos

¹⁶ Lasnier, F. (2000); cita en: Consejería de Educación de la Junta de Andalucía. Evaluación de Diagnóstico. Marco Teórico. Dirección General de Ordenación y Evaluación Educativa.

¹⁷ Rychen y Tiana (2004); cita en: Consejería de Educación de la Junta de Andalucía. Evaluación de Diagnóstico. Marco Teórico. Dirección General de Ordenación y Evaluación Educativa.

¹⁸ Benítez, A. (2006).- Las competencias básicas en la LOE. Revista Escuela Española, nº 3701. Madrid.

- con un carácter integrador
- constituidas por interrelación de saberes de los distintos ámbitos educativos

Tipos de competencias básicas

Comunicación en lengua materna

Comunicación en lenguas extranjeras

Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología

Competencia digital (TIC)

Aprender a aprender

Competencias interpersonales, interculturales, sociales y cívicas

Espíritu de empresa

Expresión cultural

Competencia matemática: capacidad del individuo para resolver situaciones prácticas cotidianas, utilizando para este fin los conceptos y procedimientos matemáticos.

Habilidad para utilizar sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y fracciones en el cálculo mental escrito con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas.

Descartamos por tanto el mero aprendizaje de conocimientos y procedimientos matemáticos en sí mismos, poniendo el énfasis sobre la *aplicación de éstos a situaciones de la vida real*.

El énfasis se sitúa en el proceso y en la actividad, aunque también en los conocimientos.

La competencia matemática entraña, en distintos grados, la capacidad y la voluntad de utilizar modos matemáticos de pensamiento (pensamiento lógico y espacial) y representación (fórmulas, modelos, construcciones, gráficos y diagramas).

las competencias matemáticas que han sido tomadas como objeto de la evaluación son:

Competencia 1. Organizar, comprender e interpretar información

Elementos:

- Identifica el significado de la información numérica y simbólica.
- Ordena información utilizando procedimientos matemáticos.
- Comprende la información presentada en un formato gráfico.

Competencia 2. Expresar

Elementos:

- Se expresa utilizando vocabulario y símbolos matemáticos básicos.
- Utiliza formas adecuadas de representación según el propósito y naturaleza de la situación.
- Expresa correctamente resultados obtenidos al resolver problemas
- Justifica resultados expresando argumentos con una base matemática.

Competencia 3. Plantear y resolver problemas.

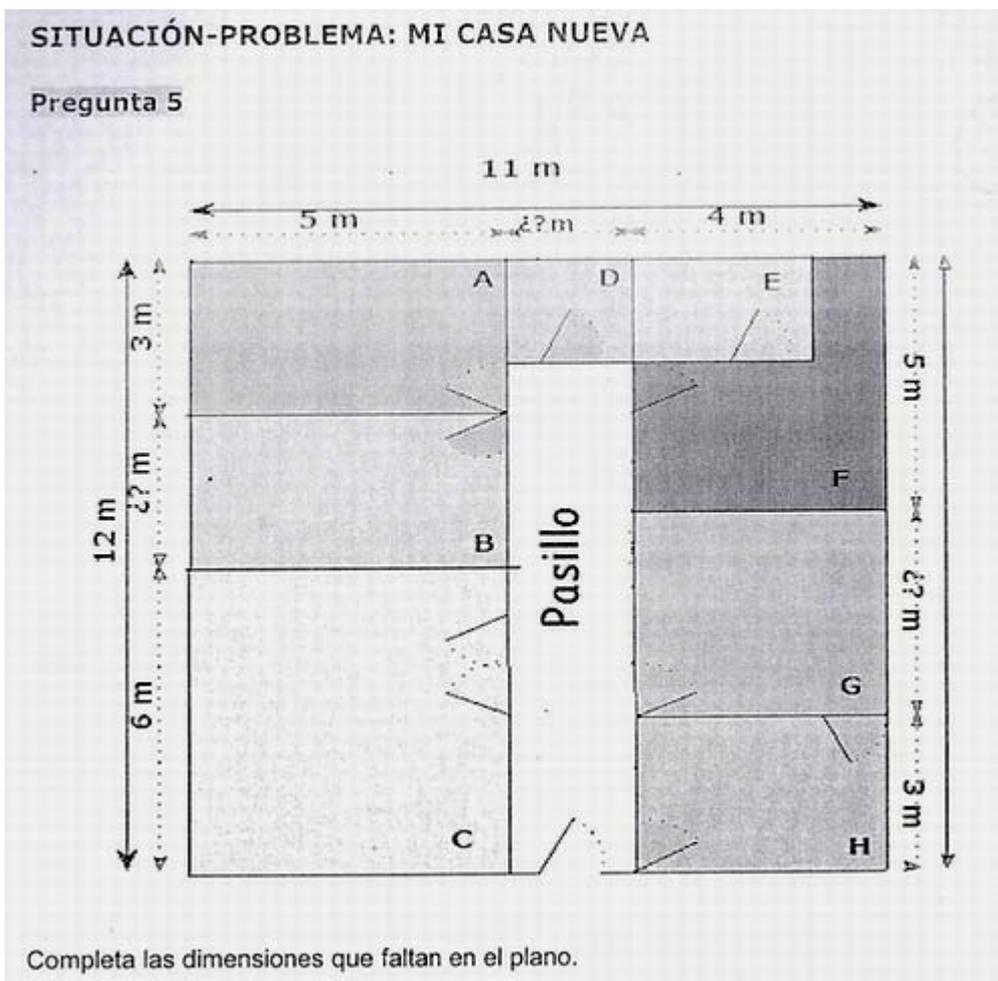
Elementos:

- Traduce las situaciones reales a esquemas o estructuras matemáticas.
- Valora la pertinencia de diferentes vías para resolver problemas con una base matemática.
- Selecciona estrategias adecuadas.
- Selecciona los datos apropiados para resolver un problema.
- Utiliza con precisión procedimientos de cálculo, fórmulas y algoritmos para la resolución de problemas.

Entendiendo que el desarrollo de competencias es un proceso continuo a lo largo de la vida escolar del alumnado, las aquí contempladas constituirían una referencia válida tanto en cuarto de Educación Primaria como en segundo de la Educación Secundaria Obligatoria. No obstante, la redacción de los ítems para la medición de estas competencias, en cada uno de los niveles considerados, ha tenido en cuenta la amplitud con la que, los diferentes elementos de competencia, han de estar presentes y los niveles de ejecución que se esperan del alumnado de cada una de esas etapas.

Ejemplos de tareas de la evaluación de diagnóstico de la Junta de Andalucía

Primaria



SITUACIÓN-PROBLEMA: FIESTA DE CUMPLEAÑOS

Pregunta 14

Quiero celebrar mi cumpleaños e invitar a estos amigos y amigas: Ana, Paco, Isabel, María, Carmen, Lourdes, Estefanía, Pepe, Aitor, Pablo y Luis. Tengo muchas cosas que hacer: fijar el día, comprar comidas y bebidas, etc.

Mis amigos están muy ocupados:

- Ana, Estefanía, Pepe e Isabel tiene *natación* los lunes y miércoles.
- Luis, Lourdes, Aitor y Pablo van a *inglés* los martes y los jueves.
- María y Carmen hacen *danza* los viernes.
- Mis padres y yo vamos todos los sábados y domingos a casa de mis abuelos.

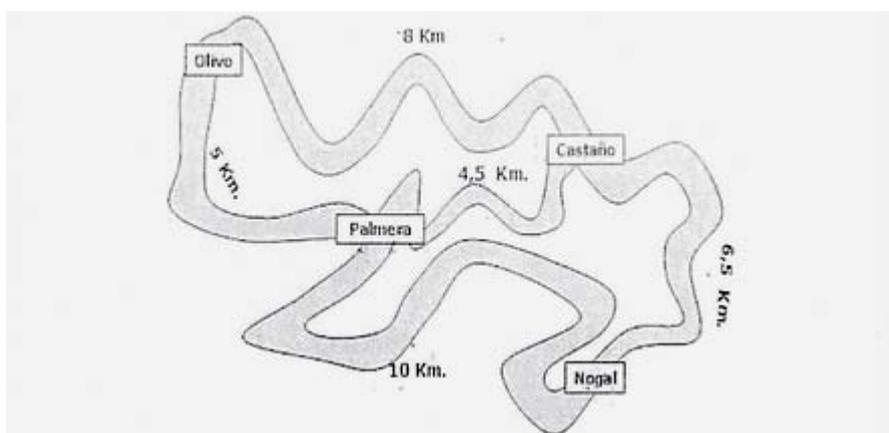
¿Qué día será el más apropiado? Explica tu respuesta.

	L	M	M	J	V
Ana					
Paco					
Isabel					
María					
Carmen					
Lourdes					
Estefanía					
Pepe					
Aitor					
Pablo					
Luis					

Al final vienen todos y conmigo somos 12. Rellena la tabla de la compra:

		Total
Tortilla	1 para cada 4 personas	3 tortillas
Refrescos	1 botella para cada 2 personas	
Batidos	1 botella para cada 3	
Bocadillitos	2 por persona	
Tarta	1 Kg de tarta para cada 6 personas	
Paquetes de patatas	1 para cada persona	
Paquetes de chuchería	1 para cada persona	

Rutas de senderismo



Pregunta 9

Un grupo de excursionistas decide salir de un pueblo, pasar por dos pueblos más y volver al punto de salida para recoger los coches.

Indica una de las posibles rutas y calcula los kilómetros que recorren:

Salida	Pueblo 1	Pueblo 2	Llegada

Los kilómetros totales del recorrido son:	
---	--

Educación Secundaria obligatoria

Pregunta 6

En un cine, la entrada más un paquete de palomitas cuesta 6,30 €. En el mismo cine y sin rebajar el precio, compramos dos entradas y tres paquetes de palomitas y nos cobran 14,10 €.



Explica el proceso que hay que seguir para encontrar el valor de la entrada del cine y del paquete de palomitas. Indica esos valores.

SITUACIÓN-PROBLEMA: LA EVOLUCIÓN DEL PRECIO DE LA VIVIENDA

Pregunta 13

La evolución del precio medio de la vivienda nueva en una ciudad andaluza a lo largo de seis años ha sido:

	Años					
	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Precio (€/m ²)	918	1023	1130	1262	1432	1653

El precio de la vivienda usada en la misma ciudad viene reflejado en el gráfico siguiente:

Años	Precio en euros/metro cuadrado
2000	836
2001	897
2002	997
2003	1215
2004	1466
2005	1699

¿Qué incremento se ha producido entre 2003 y 2004 en cada uno de los dos tipos de vivienda?

Las condiciones y los medios

(¿Qué hacer y cómo a partir de ahora?)

La evaluación después de un proceso educativo, o durante el desarrollo del mismo, permite apreciar si se han alcanzado o no los fines propuestos y en qué aspectos es necesario modificar los planteamientos para diseños y desarrollos didácticos posteriores. También permite ir modificando sobre la marcha los aspectos necesarios, incluidos los propios fines examinados. En este caso, las evaluaciones de diagnóstico se han llevado a cabo externamente, al margen de los diseños y desarrollos curriculares de los países participantes, si bien basadas en unos fines y principios que se pretenden tomar como base del nuevo espacio educativo europeo.

En cualquier caso, para alcanzar los fines propuestos en un proceso educativo, una vez modificados como consecuencia de un proceso de evaluación, se ha de atender a las condiciones y a los medios necesarios para ello. En la figura 2 se aprecian los principales instrumentos y categorías de instrumentos (recuadro central) que hacen posible la consecución de los objetivos y la constatación de este hecho por medio de la evaluación.

El paso siguiente es el diseño del proceso, la adopción de las medidas adecuadas y el desarrollo de la enseñanza en el aula. La evaluación, esta vez como elemento integrado en el proceso y no como elemento externo, como se ilustra en el gráfico de la figura 2, permitirá, por último, averiguar si se han utilizado los medios adecuados para alcanzar los objetivos.

No es el momento de entrar aquí en profundidad sobre los aspectos ordinarios del diseño curricular, las orientaciones oficiales y los medios materiales y personales de todo proceso educativo. Antes de prestar atención a dichos aspectos instrumentales y ver cómo puede afectar la introducción de las competencias matemáticas al diseño y desarrollo ordinarios, a lo que dedicaremos la última parte de este análisis, nos

interesa especialmente clarificar en qué consiste la modificación que se ha de realizar y los cambios de perspectiva que necesariamente debemos introducir en la preparación y desarrollo de la labor docente.

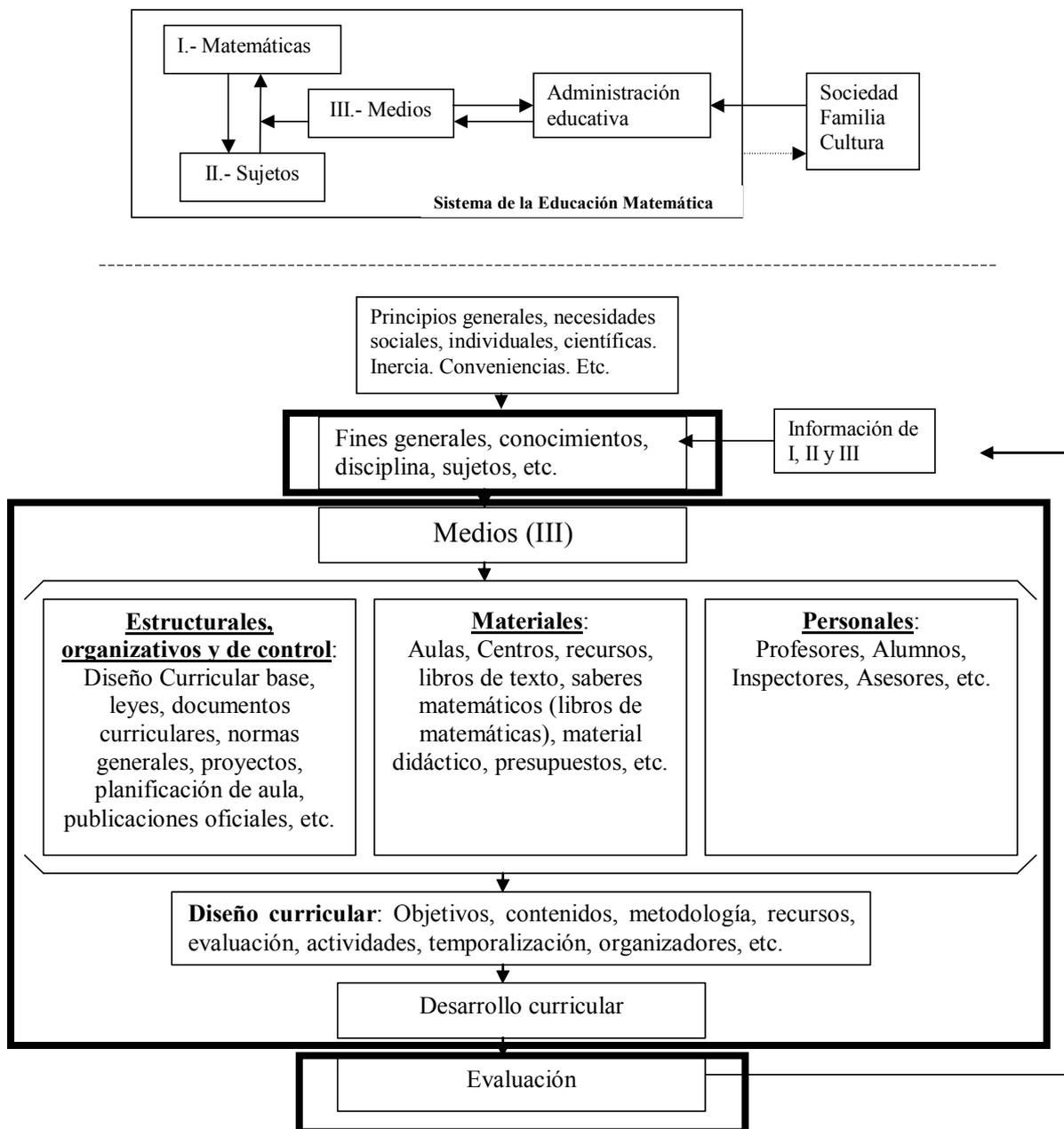


figura 2.- La diversidad de los medios en el proceso educativo en matemáticas

Currículo: Diseño y orientaciones

Competencias matemáticas y currículo: Crítica desde el Danish KOM Project

Tradicionalmente, un currículo de matemáticas viene especificado por tres componentes

- propósitos y logros a alcanzar
- contenido matemático dado en forma de temas y unidades o lista de tópicos, conceptos, teorías, métodos y resultados a cubrir

- formas e instrumentos para evaluar hasta qué punto los alumnos han alcanzado los logros previstos

Hay serias objeciones a este modelo¹⁹ y es necesario modificar los planteamientos.

Orientaciones oficiales en España

LOE Primaria y ESO

La ley Orgánica de Educación, 2/2006, de 3 de mayo, en su artículo 6: . . . el currículo es “el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas . . .”

Competencias básicas en la LOE

En el currículo de la educación obligatoria en España se contemplan las siguientes competencias básicas, que hemos ordenado en función de la contribución de las matemáticas a la consecución de cada una de ellas:

- Competencia matemática
- Aprender a aprender
- Autonomía e iniciativa personal
- Conocimiento e interacción con el mundo físico
- Tratamiento de la información y competencia digital
- Competencia social y ciudadana
- Comunicación lingüística
- Competencia cultural y artística

Fines de la introducción de las competencias básicas en el currículo

El planteamiento de las competencias básicas en Educación tiene como finalidad en España:

- Enriquecer el currículo
- Orientar la enseñanza (para que los alumnos desarrollen formas de actuación y adquieran capacidades para enfrentarse a situaciones nuevas)
- Servir de referencia (para la promoción de ciclo en Educación Primaria y para la titulación al final de la ESO. Igualmente, para las evaluaciones de diagnóstico)

Características curriculares en relación con las competencias básicas

- a) todas las competencias básicas están relacionadas entre sí. No son independientes;
- b) existen elementos comunes a todas . . . actitudes, resolución de problemas, creatividad, etc.
- c) No existe relación unívoca entre la enseñanza de materias y la adquisición o desarrollo de competencias;
- d) Cada área contribuye al desarrollo de varias competencias. Algunas áreas contribuyen más que otras.
- e) Cada competencia básica se alcanza como consecuencia del trabajo en varias áreas o materias, aunque no sólo se adquiere con el trabajo en las materias. Otros factores tales como organización, participación, instalaciones, entorno, acción tutorial, etc., aspectos que no forman parte de ninguna materia, contribuyen también al desarrollo de las competencias básicas.
- f) **COMPETENCIAS BÁSICAS Y OBJETIVOS.** Para cada etapa se han de especificar los objetivos así como el grado de desarrollo esperado de las competencias básicas al final de la misma.

¹⁹ Niss, M. (1999).- Quantitative literacy and Mathematical Competencies

g) **COMPETENCIAS Y ORGANIZADORES CURRICULARES.**

- El currículo de cada área debe especificar los objetivos, los contenidos, los criterios de evaluación y la contribución del área a la adquisición de las competencias básicas.

- Los contenidos (conceptos, procedimientos y actitudes) y criterios de evaluación se han de establecer para cada uno de los ciclos y se debe asegurar la presencia de los contenidos que se relacionen directamente con la adquisición de las competencias básicas. No obstante, pueden existir también contenidos necesarios para alcanzar objetivos de la materia y que no se relacionen directamente con competencias básicas

h) **COMPETENCIAS Y DISEÑO.** El diseño curricular del plan de formación debe contemplar, por tanto, dos tareas previas:

- a) analizar la actividad en la que se pretende que el alumno llegue a ser competente
- b) identificar las competencias necesarias para la realización de dicha actividad

La competencia matemática en la LOE

Aunque tiene una formulación algo confusa, se concibe como:

Habilidad para utilizar números y operaciones, formas de expresión y razonamiento matemático para producir e interpretar informaciones, conocer aspectos cuantitativos y espaciales y resolver problemas. Asimismo, se incluyen los siguientes aspectos: identificación de situaciones matematizables, selección de técnicas adecuadas y aplicación de estrategias de resolución de problemas.

El énfasis de esta competencia se pone en:

- elementos matemáticos básicos
- procesos de razonamiento

para: resolución de problemas, obtención de información, valoración de la validez de informaciones y argumentaciones, . . .

para lo cual es importante: espíritu crítico fundado, confianza en las propias habilidades, actitudes positivas, espontaneidad, seguridad, efectividad, habilidad para tomar decisiones, . .

Contribución del área de Matemáticas al desarrollo de las competencias básicas

Los contenidos del área se orientan de manera prioritaria a garantizar el mejor desarrollo de la competencia matemática en todos y cada uno de sus aspectos, lo que incluye la mayor parte de los conocimientos y de las destrezas imprescindibles para ello. Es necesario remarcar, sin embargo, que la contribución a la competencia matemática se logra en la medida en que el aprendizaje de dichos contenidos va dirigido precisamente a su utilidad para enfrentarse a las múltiples ocasiones en las que niños y niñas emplean las matemáticas fuera del aula.

El desarrollo del pensamiento matemático contribuye a la competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico porque hace posible una mejor comprensión y una descripción más ajustada del entorno. En primer lugar, con el desarrollo de la visualización (concepción espacial), los niños y las niñas mejoran su capacidad para hacer construcciones y manipular mentalmente figuras en el plano y en el espacio, lo que les será de gran utilidad en el empleo de mapas, planificación de rutas, diseño de planos, elaboración de dibujos, etc. En segundo lugar, a través de la medida se logra un mejor conocimiento de la realidad y se aumentan las posibilidades de interactuar con ella y de transmitir informaciones cada vez más precisas sobre aspectos cuantificables del entorno. Por último, la destreza en la utilización de representaciones gráficas para interpretar la información aporta una herramienta muy valiosa para conocer y analizar mejor la realidad.

Las Matemáticas contribuyen a la adquisición de la competencia en tratamiento de la información y competencia digital, en varios sentidos. Por una parte porque proporcionan destrezas asociadas al uso de los números, tales como la comparación, la aproximación o las relaciones entre las diferentes formas de

expresarlos, facilitando así la comprensión de informaciones que incorporan cantidades o medidas. Por otra parte, a través de los contenidos del bloque cuyo nombre es precisamente tratamiento de la información se contribuye a la utilización de los lenguajes gráfico y estadístico, esenciales para interpretar la información sobre la realidad. En menor escala, la iniciación al uso de calculadoras y de herramientas tecnológicas para facilitar la comprensión de contenidos matemáticos, está también unida al desarrollo de la competencia digital.

Los contenidos asociados a la resolución de problemas constituyen la principal aportación que desde el área se puede hacer a la autonomía e iniciativa personal. La resolución de problemas tiene, al menos, tres vertientes complementarias asociadas al desarrollo de esta competencia: la planificación, la gestión de los recursos y la valoración de los resultados. La planificación está aquí asociada a la comprensión en detalle de la situación planteada para trazar un plan y buscar estrategias y, en definitiva, para tomar decisiones; la gestión de los recursos incluye la optimización de los procesos de resolución; por su parte, la evaluación periódica del proceso y la valoración de los resultados permite hacer frente a otros problemas o situaciones con mayores posibilidades de éxito. En la medida en que la enseñanza de las matemáticas incida en estos procesos y se planteen situaciones abiertas, verdaderos problemas, se mejorará la contribución del área a esta competencia. Actitudes asociadas con la confianza en la propia capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones inciertas, están incorporadas a través de diferentes contenidos del currículo.

El carácter instrumental de una parte importante de los contenidos del área proporciona valor para el desarrollo de la competencia para aprender a aprender. A menudo es un requisito para el aprendizaje la posibilidad de utilizar las herramientas matemáticas básicas o comprender informaciones que utilizan soportes matemáticos. Para el desarrollo de esta competencia es también necesario incidir desde el área en los contenidos relacionados con la autonomía, la perseverancia y el esfuerzo para abordar situaciones de creciente complejidad, la sistematización, la mirada crítica y la habilidad para comunicar con eficacia los resultados del propio trabajo. Por último, la verbalización del proceso seguido en el aprendizaje, contenido que aparece con frecuencia en este currículo, ayuda a la reflexión sobre qué se ha aprendido, qué falta por aprender, cómo y para qué, lo que potencia el desarrollo de estrategias que facilitan el aprender a aprender.

Para fomentar el desarrollo de la competencia en comunicación lingüística desde el área de Matemáticas se debe insistir en dos aspectos. Por una parte la incorporación de lo esencial del lenguaje matemático a la expresión habitual y la adecuada precisión en su uso. Por otra parte, es necesario incidir en los contenidos asociados a la descripción verbal de los razonamientos y de los procesos. Se trata tanto de facilitar la expresión como de propiciar la escucha de las explicaciones de los demás, lo que desarrolla la propia comprensión, el espíritu crítico y la mejora de las destrezas comunicativas.

Las Matemáticas contribuyen a la competencia en expresión cultural y artística desde la consideración del conocimiento matemático como contribución al desarrollo cultural de la humanidad. Asimismo, el reconocimiento de las relaciones y formas geométricas ayuda en el análisis de determinadas producciones artísticas.

La aportación a la competencia social y ciudadana se refiere, como en otras áreas, al trabajo en equipo que en Matemáticas adquiere una dimensión singular si se aprende a aceptar otros puntos de vista distintos al propio, en particular a la hora de utilizar estrategias personales de resolución de problemas.

Matemáticas y otras competencias generales

Del Anexo IV del Proyecto “Tunning” para enseñanzas universitarias, extraemos las siguientes competencias generales a las que las matemáticas contribuyen especialmente. Se puede decir que las características del conocimiento matemático y de las experiencias matemáticas favorecen su adquisición. Son las siguientes:

- Capacidad de Análisis y Síntesis
- Capacidad para organizar y planificar
- Habilidades elementales en informática

- Habilidades para recuperar y analizar información
- Habilidades para resolver problemas
- Capacidades para la toma de decisiones
- Capacidad de crítica y autocrítica
- Habilidades de investigación
- Capacidad de aprender
- Capacidad de adaptación a nuevas situaciones
- Capacidad de generar nuevas ideas (creatividad)
- Habilidad para trabajar de forma autónoma
- Capacidades para planificar y dirigir
- Inquietud por la calidad
- Inquietud por el éxito

Algunas consideraciones curriculares para una aproximación

Consideraciones previas

Creemos que la preparación adecuada de un proceso educativo en matemáticas requiere de un detenido examen de los aspectos generales de la materia. En este sentido, consideramos:

Sobre las Matemáticas y el conocimiento matemático:

“Las Matemáticas son un conjunto de conocimientos en evolución continua que tienen que ver con relaciones e ideas u objetos conceptuales, independientes de su simbolización o representación (representación imprescindible, no obstante, para la comunicación y creación) y accesibles a través del descubrimiento y la invención o creación no arbitrarias, que tienen una existencia ficticia o convencional y que su creación/descubrimiento se encuentra condicionada por lo que hay de común a todos los individuos y culturas que la han hecho y la hacen posible: las características comunes de la mente humana (físicas y fisiológicas, entre otras), las características comunes del medio (físicas y sociales, entre otras) y las características comunes de la interacción entre ambos (adaptación del sujeto al medio)”²⁰.

Sobre la experiencia y la actividad matemática

Llamamos experiencia matemática a toda situación de interacción entre el sujeto y el medio con un conocimiento matemático como mediador. Cuando la experiencia se produce en el Sistema de la Educación Matemática, es decir, cuando es diseñada y/o desarrollada para provocar un aprendizaje matemático, diremos que se trata de una experiencia matemática con fines formativos o didácticos.

Actividad matemática es toda Acción o Conjunto de acciones individuales o colectivas que configuran, forman parte o dan lugar a experiencias matemáticas: resolver problemas, construir modelos, abstraer, inventar, demostrar, representar, definir, aplicar un procedimiento matemático, etc.

Sobre el aprendizaje matemático

Conjunto de procesos, consecuencias cognitivas y resultados derivados de una doble vía de actividades matemáticas y experiencias lógico-matemáticas con fines didácticos:

- construcción y abstracción de relaciones lógico-matemáticas elaboradas durante y a partir de la actividad del alumno (el conocimiento en acción, en formación, como medio o herramienta);

²⁰ González Marí (2005)]

- apropiación de conceptos, términos y procedimientos matemáticos establecidos (el conocimiento constituido, acabado, como fin en sí mismo).

Como resultados del aprendizaje se producen modificaciones en las capacidades, los conocimientos, las actitudes, la conducta, las competencias matemáticas y, en general, en la situación cognitiva general del sujeto, contribuyendo así al desarrollo de otras competencias básicas.

Sobre las capacidades y las competencias

Las capacidades concretas contribuyen al desarrollo de competencias, entendiendo por competencia al modo en que los escolares actúan cuando hacen matemáticas. Ser competente implica tener desarrolladas diversas capacidades concretas (Lupiañez, J. L., 2005)

Recomendaciones del Proyecto PISA y del NCTM.

Adoptaremos las siguientes recomendaciones, entre otras, como elementos que pueden guiar el diseño y el desarrollo curricular.

PISA : los estudiantes deben:

1.- aprender a matematizar (representar, comprender las relaciones, encontrar regularidades y patrones, modelizar, etc.);

2.- desarrollar las siguientes competencias matemáticas: Pensar y razonar; argumentar; comunicar; modelar; plantear y resolver problemas; representar.

NCTM : para una educación matemática de calidad se deben cumplir los siguientes preceptos:

* Principios: - de igualdad: matemáticas para todos; atención a la diversidad;

- curricular: currículo bien estructurado y centrado en matemáticas importantes;

- de enseñanza: partir de lo que los alumnos saben, establecer lo que necesitan saber y ser eficaz para que lo aprendan..

- de aprendizaje: APRENDIZAJE CON COMPRESIÓN;

- de evaluación: la evaluación formativa (la que permite tomar decisiones) y la evaluación sumativa (logros de los alumnos) deben estar integradas.

- tecnológico: la tecnología debe ocupar un lugar como recurso en los programas.

* Contenidos: Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida, y Análisis de datos y probabilidad;

* Procesos: Resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación

Fines del proceso de formación

Finalidad general: Alfabetización Matemática mediante el desarrollo de las Competencias Matemáticas básicas a través de los procesos de matematización o “hacer matemáticas”

En general, desde nuestro punto de vista, el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debe proporcionar al alumno unos instrumentos, unas técnicas y unos procedimientos, unas estrategias, un vocabulario específico y una formación intelectual y cultural que le permitan:

1.- Adaptarse al medio, organizarlo y transformarlo en su caso, lo que implica un conocimiento profundo del mismo y el desarrollo de capacidades relacionadas con el análisis de la realidad, la construcción de modelos y la creación de alternativas que mejoren la situación básica vital individual y colectiva (ADAPTACIÓN).

2.- Adquirir un buen nivel de autonomía intelectual, lo que se traduce, entre otros aspectos, en que el individuo sea capaz de buscar y ampliar la información sobre una situación, analizar todas las posibilidades y, de entre ellas, elegir libremente las mejores (AUTONOMÍA INTELECTUAL);

3.- Conocer la Matemática como parte de la cultura universal y desenvolverse en su mundo, lo que conlleva un gusto por el trabajo matemático y una profundización en los objetos y métodos propios, siendo consciente de su situación actual y de la evolución sufrida a través de la historia (CULTURA). La enseñanza de las matemáticas debe contribuir, al igual que otras disciplinas, al fin 1, es un factor importante para alcanzar el fin 2 y es fundamental e imprescindible para alcanzar el fin 3.

En resumen: la Educación Matemática debe servir para que los alumnos adquieran y construyan las competencias matemáticas básicas, es decir: aprendan a valorar las matemáticas, adquieran confianza en su propio pensamiento, adquieran la capacidad de modelizar matemáticamente situaciones reales y la de resolver problemas matemáticos, aprendan a comunicarse matemáticamente, aprendan a argumentar y razonar matemáticamente y, por último, adquieran un dominio sobre el lenguaje, los conocimientos, las destrezas, técnicas y procedimientos matemáticos como parte de la cultura universal.

Matematización o Proceso de hacer y aplicar Matemáticas

El objetivo básico de la Educación Matemática debe ser que los estudiantes APRENDAN A MATEMATIZAR²¹, lo que significa:

- 1.- Identificar y localizar un problema real
- 2.- Organizar la información de acuerdo con conceptos matemáticos.
- 3.- Generalizar y formalizar.
- 4.- Resolver el problema.
- 5.- Discutir y dar sentido a la solución.

La matematización implica tres procesos, uno horizontal, otro vertical y un tercero de validación y reflexión. Veamos brevemente cada uno de ellos.

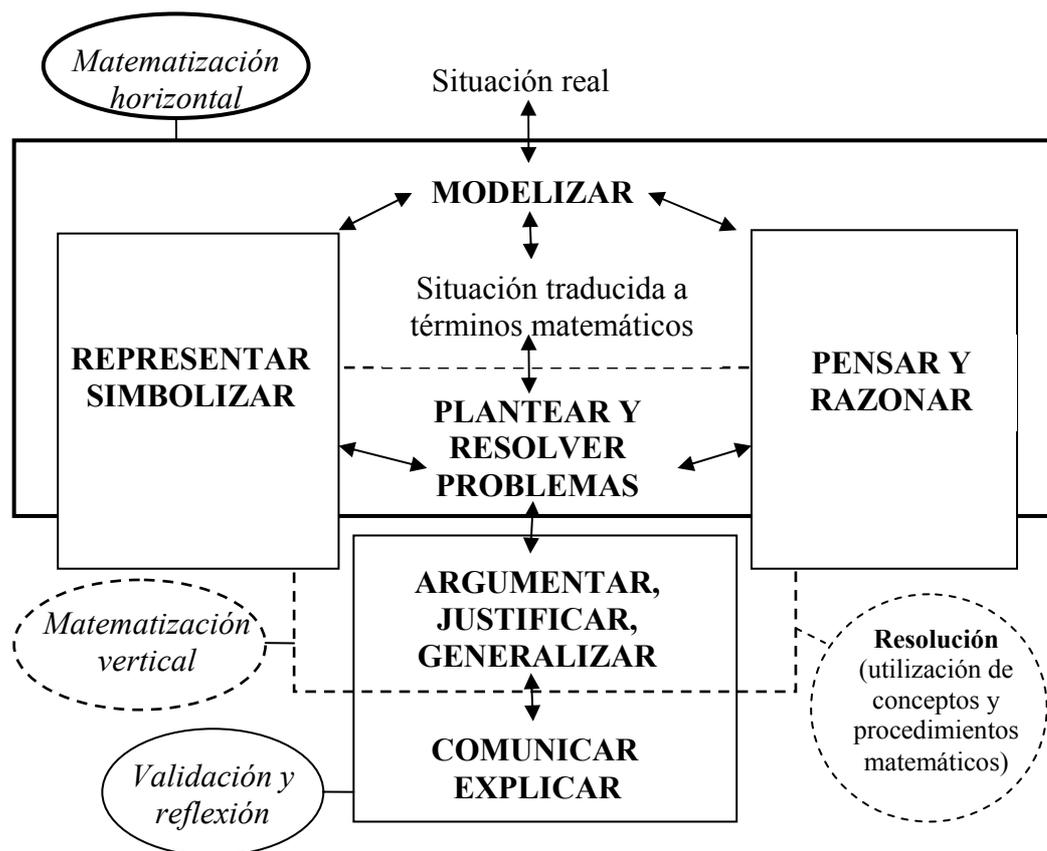
I.- Las actividades de la **matematización horizontal** persiguen traducir el problema del mundo real a términos matemáticos. Algunas de estas actividades son: identificar los conceptos relevantes en una situación y organizar en base a ellos, representar, analizar y comprender las relaciones, encontrar regularidades y patrones, reconocer problemas similares, modelizar.

II.- Las actividades de la **matematización vertical** incluyen: utilizar herramientas adecuadas para resolver; utilizar diferentes representaciones; utilizar el lenguaje en sus diferentes facetas; ajustar y refinar los modelos; argumentar y generalizar.

III.- Las actividades de reflexión, interpretación y **validación** son, entre otros: dar sentido a la solución; justificar los resultados, analizar los argumentos, comunicar el proceso y la solución, criticar el modelo.

Tipos de matematización y su relación con las competencias matemáticas OCDE

²¹ Nota: Matematizar no es sólo resolver problemas (González, J. L.)



Currículo y Enseñanza: Algunas notas para una aproximación

Y todo lo anterior . . . ¿cómo se traduce en el trabajo en el aula?

Además de lo establecido anteriormente, la enseñanza de las matemáticas en los niveles de Educación Primaria y Secundaria debe tener en cuenta las siguientes consideraciones (González y Gallego (1997)):

- a).- la mayor parte de lo que se haga en el aula debe tener sentido para los alumnos;
- b).- educar en matemáticas / aprender matemáticas requiere de un proceso constructivo y activo en el que se reduzca a lo indispensable la asimilación pasiva de información.
- c).- se ha de conceder importancia a los conocimientos intuitivos, a las relaciones entre las matemáticas y la realidad o a valorar la potencialidad de preguntar ¿porqué?;
- d).- Mediante la MOTIVACIÓN adecuada, se debe procurar que el alumno se implique en las actividades, es decir, se debe conseguir la “devolución” al alumno de la responsabilidad de lo que se hace en el aula (el alumno debe “hacer suyas” las tareas).
- e).- hay que atender a dos frentes simultáneamente y en el siguiente orden de importancia o atención:
 - COMPRENSIÓN, UTILIDAD Y SIGNIFICADOS del conocimiento matemático (intención motivadora y de conexión con las experiencias y conocimientos de los alumnos);
 - ASPECTOS CULTURALES E INSTRUMENTALES del conocimiento matemático (elementos básicos, terminología, conceptos, validación, institucionalización, consolidación, práctica y extensión del conocimiento matemático; intención "cultural", "informativa" e "instrumental" del conocimiento);
- f).- a través de los tipos de situaciones didácticas / actividades que se incluyen en I.
- g).- para alcanzar las competencias matemáticas básicas y avanzadas que se mencionan en II
- h).- integradas en procesos didácticos ajustados al esquema teórico que se describe en III

I.- Tipos de situaciones didácticas / actividades

A).- Elementos básicos y tareas de **reproducción y representación** (conocimiento como fin; vocabulario)

Conceptos, procedimientos, técnicas, destrezas básicas, expresiones, fórmulas, terminología y representación. A este tipo de situaciones didácticas corresponden:

- aprendizaje de técnicas y procedimientos;
- tareas de ejercitación y práctica; actividades repetitivas o de consolidación, práctica y extensión del conocimiento conocidas como “ejercicios de matemáticas” (prácticas de algoritmos, técnicas y destrezas básicas, etc.);
- tareas de lectura y escritura matemática o relacionadas con la terminología propia de las matemáticas. Representación y lenguaje matemático (tareas de asociación e identificación);
- tareas de memorización;
- Situaciones de enculturación matemática. Explicaciones y Ejemplos intuitivos o elementales

B).- Conexiones primarias (Comprensión y Competencias a nivel primario, es decir: Conocimiento como medio, contextualizado y aplicado pero restringido a situaciones elementales, estructuradas, simples, cercanas e inmediatas. Primeras aplicaciones, primeras relaciones)

B1) Conexiones Primarias No Matemáticas (Situaciones estructuradas de modelización primaria o elemental)

Corresponden a este grupo, las situaciones, actividades y experiencias siguientes:

- Modelos manipulativos. Material Didáctico específico para Matemáticas (regletas, bloques multibase, ábacos, etc.)
- Recursos orientados específicamente (uso restringido a un contenido)
- Juegos y pasatiempos relacionados con las Matemáticas
- Modelos reales. Situaciones reales o ficticias copiadas de la realidad, pero con carácter específico o restringidas a un conocimiento matemático concreto (problemas tradicionales de enunciado verbal con contenido no matemático).

B2).- Conexiones Primarias Matemáticas (Situaciones estructuradas de contenido matemático; pensamiento matemático elemental)

Corresponden a este grupo las situaciones, actividades y experiencias siguientes:

- Tareas de relación de un conocimiento concreto con otros conocimientos matemáticos: relaciones “verticales” (previos (referentes), siguientes (en los que se utiliza)) y relaciones “horizontales” (con otros contenidos matemáticos del mismo o distinto nivel).
- Tareas de análisis (multiplicación con cifras desconocidas, cuadrado mágico, etc.)
- Problemas de enunciado verbal de contenido matemático específico (restringido a un contenido concreto)

C).- Conexiones Secundarias (Comprensión y Competencias a nivel secundario o global, es decir: Conocimiento como medio, contextualizado y aplicado pero de carácter avanzado y orientado a situaciones no elementales, no estructuradas o poco estructuradas y complejas. Aplicaciones y relaciones amplias y en toda su extensión dependiendo del nivel).

C1) Conexiones Secundarias No Matemáticas (Situaciones no estructuradas de modelización avanzada).

- Material manipulativo general, no específico
- Recursos generales no orientados (uso amplio en variedad de temas)
- Realidad en toda su extensión. Visión global. Relaciones amplias

- Problemas modelizables con toma de decisiones y gestión de la información.

C2) Conexiones Secundarias Matemáticas (Situaciones no estructuradas de contenido matemático avanzado; pensamiento matemático avanzado)

- Problemas amplios y complejos de contenido matemático o no situables fácilmente dentro de un contenido matemático específico
- Propiedades, teoremas. Teorías matemáticas y sus relaciones con otros conocimientos.

D).- Reflexión, validación y formalización (Conocimiento como fin, recapitulación; institucionalización; tareas y situaciones de control del profesor y del libro de texto con rigor matemático)

A este tipo de situaciones didácticas corresponden:

- Explicaciones y ejemplos
- Definiciones; teorías
- Demostraciones, justificaciones, razonamientos matemáticos

II.- tipos de pensamiento matemático, niveles y competencias matemáticas básicas y avanzadas

Las competencias matemáticas: Pensar y razonar, argumentar y justificar, comunicar, modelizar, plantear y resolver problemas, representar y utilizar símbolos y formalismos matemáticos, se pueden presentar en distintos niveles de dominio. Se establecieron 6 niveles empíricos de grado de maestría en el desempeño de dichas competencias, pero aquí hemos delimitado lo que se puede entender como niveles básico y avanzado de las competencias matemáticas y su relación con 5 tipos de pensamiento matemático. El esquema recoge estos aspectos así como la zona en la que se han desarrollado las evaluaciones de diagnóstico.

Pensamiento matemático	Conocimientos y tareas	Tipos de situaciones didácticas	Niveles de competencias matemáticas
1.- Pensamiento matemático básico o de reproducción	Contenidos, destrezas, técnicas, términos, tareas de reproducción, etc.	A	BÁSICAS
2.- Pensamiento matemático aplicado simple	Aplicaciones prácticas puntuales; problemas de enunciado verbal de contenido no matemático	B1	BÁSICAS
3.- Pensamiento matemático heurístico elemental	Aplicaciones matemáticas elementales. Problemas de enunciado verbal de contenido matemático	B2	BÁSICAS
4.- Pensamiento matemático aplicado complejo, integrado o globalizado	Aplicaciones reales complejas. Situaciones no estructuradas. Visión global; conexiones y relaciones amplias	C1	AVANZADAS
5.- Pensamiento	Situaciones de		

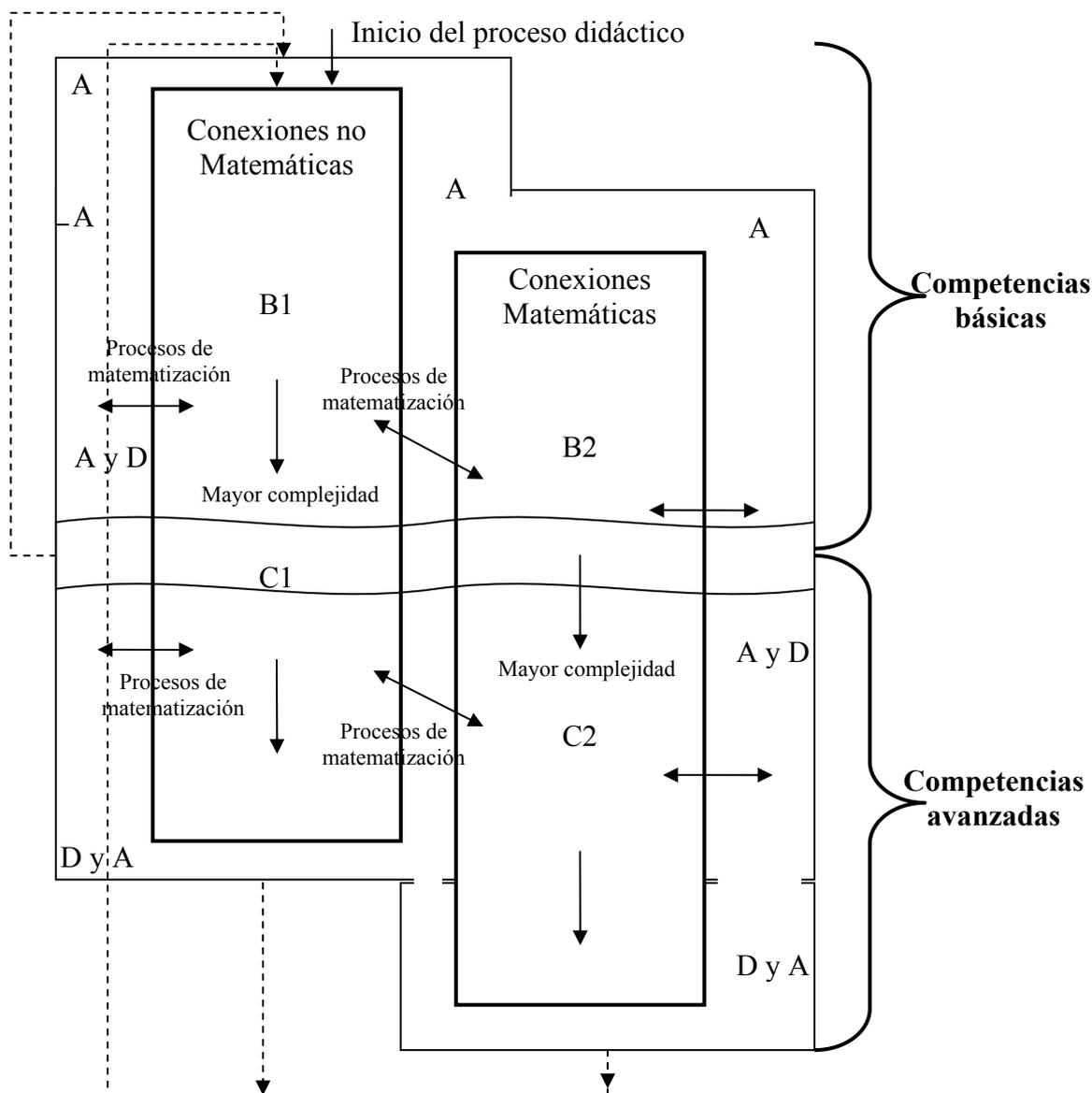


matemático avanzado	reflexión. Conocimiento matemático profundo. Teorías y conexiones matemáticas amplias	C2 y D	AVANZADAS
---------------------	---	--------	-----------

III.- Esquema del proceso didáctico

Como se aprecia en el esquema:

- núcleo central del trabajo: conexiones
- se empieza por: conexiones más elementales
- el trabajo siempre se realiza con la ayuda auxiliar de: elementos básicos o reproducción (A) y reflexión, validación y formalización en su caso (D)
- los elementos básicos (A) van cediendo paulatinamente el protagonismo a la reflexión y formalización (D)



Ejemplos (documentos aparte)

- los números decimales
- los polígonos

Ejemplo de planificación preactiva real

Necesidad de experimentar

Bibliografía

- BENÍTEZ, A. (2006).- Las competencias básicas en la LOE. Revista Escuela Española, nº 3701. Madrid.
- CASTRO, E.; MOLINA, M. (2005). «Rendimiento en competencias matemáticas de los estudiantes españoles en el Informe PISA 2003», Padres y Madres de Alumnos, Revista de la CEAPA
- CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN (2006). Dirección General de Ordenación y Evaluación Educativa. Evaluación de Diagnóstico. Marco Teórico.
- CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN (2006). Dirección General de Ordenación y Evaluación Educativa. Evaluación de Diagnóstico. Pruebas de evaluación de diagnóstico.
- DEVLIN, K. (1994): Mathematics: The Science o/ Patterns. New York: Scientific American Library.
- DEWEY, J. (1933): How we think? Lexington, MA: Heath and Company
- FREGE, G. (1996): Escritos filosóficos. Barcelona: Crítica.
- FREUDENTHAL, H. (1973): Mathematics as an Educational Task. Dordrecht: Reidel.
- GÓMEZ, B. (1992).- Las Matemáticas y el proceso educativo. Cap. 2 En: Área de Conocimiento Didáctica de la Matemática. Madrid: Síntesis
- GONZÁLEZ, J. L.; GALLEGRO, M. (1997): Un esquema metodológico para la Educación Matemática en los primeros niveles educativos. Inédito. Didáctica de la Matemática. UMA.
- GONZÁLEZ, J.; Wagenaar, R. (2003).- *Tunning Educational Structures in Europe*. Final Report. Phase One. Bilbao: Universidad de Deusto.
- HENNING, H.; Keune, M. (2004). *Levels of modelling competence*. Department of Mathematics. Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Germany.
- HERNÁN, F. (1989).- Recursos en el aula de Matemáticas. Madrid: Síntesis
- INECSE (2004a): Aprender para el mundo de mañana. Resumen de resultados PISA 2003. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- INECSE (2004b): Evaluación PISA 2003. Resumen de los primeros resultados en España. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- INECSE (2005): PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- RICO, I. (COORD.) (1997).- La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Barcelona: Horsori.
- LUPIÁÑEZ, J. L. (2005): Análisis Cognitivo. Granada: Universidad de Granada (pendiente de publicación)
- MAESTRO, C. y otros (2005).- *La enseñanza de las Matemáticas y el informe PISA*. Seminario de Primavera 2005. Madrid: Fundación Santillana.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN y CIENCIA (1989): Diseño Curricular Básico. Educación Secundaria Obligatoria. Madrid: Servicio de Publicaciones del MEC.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000): Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM
- NISS, M. (1995): "Why do we teach Mathematics in School?", en PUIG, L, & CALDERÓN, I. (Edts.): Seminario de Investigación y Didáctica de la Matemática. Madrid: CIDE.
- NISS, M. (1999).- *Mathematical competencias and the learning of mathematics: The Danish KOM Project*. Paper.

- OCDE (2003): The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. París: OCDE.
- OCDE (2004).- *Learning for tomorrow's world: first results from PISA 2003*. París: OCDE
- OCDE (2004a): Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas. Madrid: INECSE.
- OCDE (2004b): Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003. París: OECD.
- OCDE (2005).- *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana*. Madrid: Santillana.
- OCDE (2005a): Organisation for Economic Co-operation and Development. <http://www.oecd.org/home> (Consulta 20/06/2005)
- OCDE (2005b): Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana. Madrid:
- PAJARES, R. SANZ, A. y RICO, L. (2004): Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto PISA 2000. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- POLY A, G. (1945): How to solve it. Princenton: University Press.
- RICO, L. (1997): "Organizadores del Currículo de Matemáticas", en RICO, L. (Coord.):
- RICO, L. (2004): "Evaluación de Competencias Matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003". En CASTRO, E y DE LA TORRE, E. (Edts): Actas VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. La Coruña: Universidad de A Coruña.
- RICO, L. (2005b): "Competencias Matemáticas e Instrumentos de Evaluación en el Proyecto PISA 2003", en PISA 2003 Pruebas de matemáticas y de solución de Problemas. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- RICO, L. (2005c): "La Enseñanza de las Matemáticas y el Informe PISA ", en Actas VI Seminario de Primavera. Madrid: Fundación Santillana.
- RICO, L. (2006).- *Marco teórico de evaluación n PISA sobre Matemáticas y Resolución de Problemas*. Documento inédito. Universidad de Granada
- RICO, L., CASTRO, E., CASTRO, E., CORIAT, M. y SEGOVIA, I. (1997): "Investigación, diseño y desarrollo curricular", en RICO, L. (Edt.): Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria. Madrid: Editorial Síntesis.
- RICO, L.: "La Alfabetización Matemática y el Proyecto PISA de la OCDE" en Padres y Madres de Alumnos Revista de la CEAPA nO 82, pp. 7-13.
- ROMBERG, T.: "Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas", en Revista de Educación, 294, pp. 323-406.
- Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales (SAEM Thales) (Ed.) y NCTM (2003).- *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. ISBN 84-933040-3-4. <http://thales.cica.es>
- STEEN, L. (Ed.) (1990): On the shoulders of Giants. Washington D.C.: National Academy Pres
- TUDELA, P. (coord.) (2005).- *Las competencias en el nuevo paradigma educativo para Europa*. Documento inédito del Vicerrectorado de Planificación, Calidad y Evaluación. Universidad de Granada.