Monografía
Competencia numérica
y cálculo mental

El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático

Encarnación Castro
M.ª Consuelo Cañadas
Marta Molina
Universidad de Granada

El razonamiento inductivo es un medio potente de construcción de conocimiento, tanto en el medio científico como en el social. Su potencialidad se debe, fundamentalmente, a que la generalización es una de las componentes del mismo. Es posible llegar a la generalización a través de la abstracción de lo que es regular y común en los sucesos y los hechos científicos, a partir del descubrimiento de patrones que constituyen el germen de leyes propias del nuevo conocimiento. Exponemos a continuación algunas ideas sobre el razonamiento inductivo, el papel de la generalización en la construcción de conocimiento, así como del uso que se puede hacer en el aula del razonamiento inductivo para el aprendizaje de las matemáticas.

Palabras clave: *abstracción*, *aprendizaje*, *generalización*, *inducción*, *razonamiento.*

Inductive reasoning as a generator of mathematical knowledge
Inductive reasoning is a powerful means of constructing scientific and social knowledge. Its importance lies in one of its components: generalisation. It is possible to reach generalisation by abstracting what is regular and common to scientific events, based on the discovery of patterns that make up the seeds of the laws of new knowledge. In this article we present some ideas on inductive reasoning, the role of generalisation in constructing knowledge and the use of inductive reasoning for mathematics learning.

Keywords: *abstraction*, *learning*, *generalisation*, *induction*, *reasoning.*

El razonamiento es un proceso de pensamiento que permite obtener conclusiones a partir de premisas previamente establecidas. Según sea el desarrollo de dicho proceso, se distingue entre razonamiento deductivo y razonamiento inductivo. A este último tipo de razonamiento dedicamos las páginas de este artículo. Algunos autores, entre los que se encuentran Pólya, Poincaré y Whitehead, tratan la inducción y la consideran importante en la generación de conocimiento. Pólya (1945) expresa que la inducción es una práctica que usan los científicos para tratar con la experiencia, un método para descubrir propiedades tras la observación de los fenómenos, de la regularidad que presentan dichos fenómenos y de la coherencia que se les supone a los mismos.[1] Poincaré (1902) utiliza el término *inducción* cuando reflexiona y trata de la naturaleza del razonamiento matemático. Considera la inducción como la vía para llegar al conocimiento en cualquier ciencia, en particular en la ciencia matemática, partiendo de situaciones particulares, observando las regularidades y alcanzando la generalización. Por su parte, Pólya (1945) argumenta que el razonamiento inductivo es el razonamiento natural que da lugar al conocimiento científico mediante el descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de casos particulares; jugando la evidencia un papel primordial en el descubrimiento de leyes generales. También Whitehead coincide en señalar el papel destacado de la inducción, de la percepción de lo general en lo particular, de la distinción entre lo que es permanente y lo que es transitorio, en la generación de conocimiento científico:

> *El progreso de la ciencia consiste en observar... interconexiones en mostrar... que los eventos de este mundo constantemente cambiante no son sino ejemplos de unas pocas conexiones o relaciones generales llamadas leyes.* (Whitehead, 1911, p. 4)

Observamos que *inducción* y *razonamiento inductivo* se utilizan a la par, indistintamente, con significados equivalentes y denotan un proceso cognitivo que permite obtener reglas a partir de un comportamiento común observado en algunos casos particulares y concretos. Esta acción de ver lo general en lo particular, que los autores citados destacan en la generación del conocimiento matemático y científico, no es únicamente característica de los procesos de razonamiento en los ámbitos científicos, sino que es una habilidad del ser humano que se manifiesta y se pone en juego desde la infancia —por ejemplo, cuando se asocian tonos de voz diferentes a un mismo adulto y palabras concretas como *agua* a determinados objetos que pueden contener este líquido— y que se ha mostrado primordial en la generación de conocimiento.

Modelo teórico de razonamiento inductivo

Algunos de los autores que tratan el razonamiento inductivo en la construcción de conocimiento matemático señalan una serie de fases a considerar para obtener éxito en el trabajo. Por ejemplo, Hadamard, uno de los seguidores de Poincaré, distingue cuatro fases en la invención de la matemática: preparación, incubación, iluminación y verificación o comprobación (Hadamard, 1947, p. 102). Por su parte, Pólya (1945) sugiere que el razonamiento inductivo requiere del trabajo con casos particulares, de la búsqueda de patrones basados en la regularidad observada en los casos particulares, de la formulación de una conjetura de acuerdo con el patrón, y de la comprobación posterior de dicha conjetura. Tomando en consideración estas ideas y las evidencias mostradas por algunos sujetos en nuestras investigaciones (Cañadas y Castro, 2004), proponemos un modelo de siete pasos, que describimos a continuación.

1. *Trabajo con casos particulares.* Casos concretos o ejemplos con los que se inicia el proceso. Suelen ser casos sencillos y fácilmente observables.
2. *Organización de casos particulares.* Disponer los datos obtenidos de forma que ayude a la percepción de patrones, ya sea en una tabla, en filas y columnas, con algún orden.
3. *Identificación de patrones*. El patrón, o pauta, es lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse.
4. *Formulación de conjeturas.* Una conjetura es una proposición que se supone verdadera pero que no ha sido sometida a exploración. Dicha exploración puede dar como resultado su aceptación o su rechazo. Si se presenta un ejemplo para el que la conjetura no es válida, ésta se rechaza. En términos de Popper (1967), se dice que la conjetura se refuta.
5. *Justificación de las conjeturas*. Hace referencia a toda razón dada para convencer de la verdad de una afirmación. Se suele distinguir entre justificaciones empíricas y deductivas. Las empíricas usan los ejemplos como elemento de convicción. Se vuelve a comprobar con otros casos particulares.
6. *Generalización*. La conjetura se expresa de tal manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada. Implica la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares considerados.
7. *Demostración*. Proceso de validación formal que no deja lugar a dudas sobre la validez de la conjetura que se trata de probar y que la determina inequívocamente.

Estos siete pasos no tienen el mismo peso en el proceso de razonamiento inductivo —unos son imprescindibles y otros no— ni es equivalente el esfuerzo que su ejecución requiere por parte del sujeto. El paso sexto, referido a la generalización, es imprescindible en el razonamiento inductivo, también es el más costoso de realizar para el alumnado (Cañadas y Castro, 2004). Es el que da fuerza al proceso para ser considerado generador de conocimiento. La generalización, cuando se produce, puede expresarse de formas diferentes: mediante lenguaje verbal, utilizando la representación simbólica o algebraica, o mediante otro tipo de lenguaje como puede ser el gestual (Radford, 2010). La demostración, el paso séptimo, permite por su parte conocer si se está verdaderamente ante un nuevo conocimiento, es decir, si se puede aceptar la conjetura con plena certeza de su validez desde el punto de vista matemático.

Generalización y adquisición de conocimiento matemático

Al indagar en la literatura especializada, se descubre que la concepción de que la abstracción y la generalización intervienen de manera activa en la formación de conceptos está muy presente en dicha literatura. Numerosos autores procedentes de campos diferentes tratan este tema. Rastreando en documentos como puede ser un diccionario se encuentra, entre otras, las siguientes ideas sobre abstracción: Se llega al conocimiento a través de la abstracción, ésta es una operación espontánea, natural y congénita al pensamiento humano. Por su parte, la abstracción es el precedente o el instrumento de la generalización. No es posible construir conocimiento general sin eliminar lo individual, esto es, sin abstraer. La abstracción prepara para la generalización, dispone el análisis y es el requisito indispensable de la sistematización ordenada de los conocimientos (*Diccionario enciclopédico hispano-americano*, 1887).

Acercándonos al tema desde el campo de la educación matemática, recogemos el punto de vista de algunos autores. Dörfler señala que, tanto en la vida cotidiana como en el pensamiento científico, las generalizaciones son de gran importancia, ya sea en la construcción de conceptos o proposiciones como en la generación de ideas, hipótesis o argumentaciones. Dicho autor otorga importancia a la generalización tanto en el pensamiento individual como en el desarrollo de la comunicación social al declarar que «las generalizaciones son tanto objetos como medios de pensamiento y comunicación» (Dörfler, 1991, p. 63). Otro autor, Kaput, introduce la noción de patrón y estructura cuando se refiere a la generalización con las siguientes palabras:

> *[...] extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos.* (Kaput, 1999, p. 136)

La generalización es considerada así mismo por Krutestskii (1976) como la habilidad para generar conocimiento matemático (objetos, relaciones y operaciones) y distingue dos niveles: la habilidad personal para ver lo general y conocido en lo que es particular y concreto, y la habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado. También Piaget y sus colaboradores presentan la generalización como un proceso fundamental en la construcción del conocimiento. Tratando de diferenciar lo posible de lo real utilizan los conceptos de abstracción y generalización estableciendo relaciones entre ellos. La generalización estaría sometida a la abstracción y tendría como tarea el establecimiento de regularidades en lo real. Distinguen dos formas de abstracción: la abstracción empírica y la abstracción reflexiva. En el primer caso, el sujeto se limita a comprobar ciertas propiedades de los objetos exteriores y a analizarlas independientemente. La generalización en este tipo de abstracción empírica es de naturaleza extensional, es decir sólo contempla el paso de *algunos* a *todos* (Piaget, 1975). La otra forma de abstracción es la reflexiva, y se refiere a las acciones y operaciones que el sujeto realiza, que hacen de lo real una manifestación de lo posible (Piaget, 1982; citado en Yañez, 1989).

Pólya (1945) sostiene que la generalización lleva a construir conocimiento a partir de la acumulación de ejemplos (casos concretos) entre los que se detecta y se sistematiza una regularidad. Usa el ejemplo siguiente para ilustrar cómo se puede llegar al descubrimiento de una propiedad. Una persona puede observar que $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$. La pregunta de esta persona, si está interesada por el comportamiento de los números, puede ser: ¿será cierto que esto mismo ocurra con todos los números naturales? o sea ¿será cierto que $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3$ es un número natural elevado al cuadrado? ¿Cuál es dicho número?

Esta persona a la que hacemos referencia puede ver qué sucede con otros números sencillos. Para el caso de dos y tres sumandos, comprueba que se cumple la conjetura que ha supuesto:

$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$$

Además, percibe que en el segundo miembro de la igualdad aparece en todos los casos estudiados la suma de las bases que están elevadas al cubo en el primer miembro de la igualdad, elevada al cuadrado. Luego hay ya muchas posibilidades de que sea cierta la siguiente igualdad, que constituye la generalización para las expresiones anteriores:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 \ldots n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 \ldots n)^2$$

La generalización de lo observado lleva a construir conocimiento matemático, en este caso, una propiedad matemática de los números naturales. Esto que sería una conjetura a la que llega la persona de nuestra historia, exigiría de una demostración para corroborarla y aceptarla como una regla general o propiedad de los números naturales. Se hace hincapié en que el reconocimiento de patrones es esencial en el desarrollo de la habilidad para generalizar, ya que al partir de una regularidad observada, se busca un patrón que sea válido para más casos y ya se está hablando de generalización (Pólya, 1966).

Razonamiento inductivo y educación matemática

La importancia de la generalización en el aprendizaje ha sido reconocida en investigaciones pioneras, como indicó Davidov al señalar que «desarrollar las generalizaciones de los niños se ve como uno de los principales propósitos de la instrucción escolar» (Davidov, 1972-1990, p. 10). En documentos de orientación curricular también se reconoce dicha importancia. Por ejemplo, en los estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) se enuncia que la generalización es uno de los principales objetivos de la instrucción matemática y se argumenta sobre la trascendencia e importancia de la inducción y del razonamiento inductivo para el quehacer matemático de los escolares. Para ello, se basan en la consideración de la inducción como un medio potente para la adquisición de conocimiento, para realizar descubrimientos matemáticos y para poner a los alumnos en una situación semejante a la de un matemático en su quehacer científico. Se recogen ideas como que vislumbrar más allá de lo que se percibe, ver alguna regularidad y plantear conjeturas es el «corazón» de la inducción, y «hacer matemáticas implica descubrir, y la conjetura es el principal camino para el descubrimiento» (NCTM, 2003, p. 60). Pólya, a su vez, critica la consideración de la matemática como una disciplina formal y deductiva, defendiendo la necesidad de la actitud inductiva, en la que se requiere saber ascender de las observaciones a las generalizaciones. Otorga tal importancia a la actitud inductiva que considera que estamos ante un verdadero científico cuando éste trata de «extraer de una experiencia determinada las conclusiones más correctas y acumular las experiencias más útiles para establecer la mejor línea de investigación respecto a una cuestión dada» (Pólya, 1966, p. 26). Otros autores como Mason y colaboradores apoyan el trabajo en tareas de generalización en las aulas al destacar la actividad de generalizar como esencia de la actividad matemática y afirmar que una lección en la que los estudiantes no tengan oportunidad para expresar generalidad no es una lección matemática (Mason, Gram. y Johnston-Wilder, 2005).

Dos funciones se atribuyen al razonamiento inductivo que tienen implicaciones en la educación matemática. Una de ellas ya la hemos tratado: es la que permite el descubrimiento de conocimiento nuevo mediante la formulación de conjeturas basadas en casos particulares, llegando a la generalización. La otra función se refiere a la verificación o comprobación de conjeturas mediante la consideración de casos particulares. Se recomienda introducir y trabajar con este tipo de razonamiento como modo de validación previamente al trabajo con razonamiento deductivo presente en los procesos de validación formal. «Parece razonable y natural que la fase inductiva preceda a la fase demostrativa. Primero intuir; luego probar» (Pólya, 1966, p. 125). Se potenciaría, de este modo, el desarrollo de ciertas capacidades y hábitos de trabajo que facilitarían a los estudiantes el avance en la utilización y manejo de los procesos de validación formales. Numerosas investigaciones de las últimas décadas, entre las que se encuentran las realizadas por Maher y Martino (1996) y Waring, Orton y Roper (1999), centradas en los procesos de validación formal, han evidenciado la existencia de dificultades en la realización de estos procesos por parte de los estudiantes de los niveles educativos medios. Algunas de esas dificultades se han atribuido a que los estudiantes no pueden adquirir las habilidades de razonamiento necesarias para llegar a hacer y comprender una demostración matemática formal de manera inmediata, sino que necesitan un periodo de tiempo para adaptarse, y es conveniente que sigan una progresión lógica en el desarrollo de su razonamiento, desde los razonamientos cotidianos más próximos a lo concreto hasta los razonamientos matemáticos más abstractos. Se sugiere dar importancia y prioridad al trabajo en el que se utilicen procesos de validación informales como inicio o puente, según los casos, hacia las demostraciones formales.

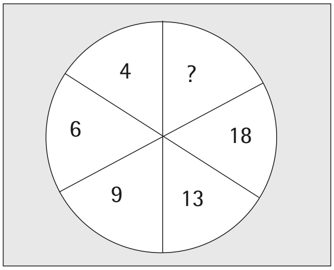
Tareas y problemas concernidos con el razonamiento inductivo

Existen numerosas situaciones que dan lugar a tareas y problemas que pueden ser tratados para su resolución mediante una heurística basada en el razonamiento inductivo. A veces, las tareas no requieren de todo el proceso que hemos descrito y organizado mediante pasos, sino de una o varias partes del mismo. Presentamos algunos ejemplos de tareas y problemas.

Hallar un nuevo elemento

En los tres ejemplos que se presentan a continuación, la tarea consiste en hallar un elemento a partir de los que se presentan, y que este siga una pauta marcada bien por una relación numérica, bien por una disposición de elementos en el plano. La imagen 1 presenta un círculo dividido en seis sectores en los cuales, excepto en uno, hay escrito un número. Hay que encontrar el número que falta en el sector en el que aparece la interrogación a partir de los números que hay en el resto de los sectores y las relaciones que se pueden establecer entre ellos. Se trata de percibir un patrón, analizando los números y su organización, que permita obtener el número desconocido.

Imagen 1. Círculo numérico

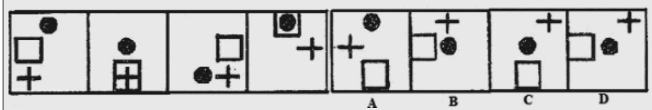


Una tarea similar es la que requiere la cuadrícula que se muestra en la imagen 2. Hay que encontrar un número para

Imagen 2. Celda desconocida

234	333	567
345	?	678

Imagen 3. Secuencia de puntos, cruces y cuadrados



colocar en la celda donde aparece el signo de interrogación, de manera que tenga relación con los que hay en el resto de las celdas.

En otras tareas, los patrones a descubrir están relacionados con la percepción espacial o visual. Así ocurre en la tarea que se presenta en la imagen 3, en la cual es necesario determinar cuál es la imagen que corresponde al siguiente término de la secuencia, eligiendo como respuesta una de las opciones A, B, C o D. Tareas de este tipo, que involucran la búsqueda de patrones, constituyen un factor relevante en los tests que miden la capacidad de los individuos para un cierto desempeño profesional. En dichas pruebas aparece algún ítem similar a los presentados. Su solución exige hallar un elemento a partir de otros dados o conocidos. Radican en generar, a partir de los casos particulares dados, un caso particular más, para lo que es necesario generar una pauta o patrón de comportamiento de los elementos conocidos.

Tareas que incluyen la generalización

La imagen 4 muestra una situación de juego, en la que se proporcionan los cuatro primeros casos particulares que podrían darse en un proceso inductivo. La generalización pedida en la tarea recae sólo en el número de cartas de la base de los castillos. Estos números forman una sucesión cuyo término general es una función lineal. La tarea, con la misma ilustración, se puede hacer más compleja si los interrogantes se hacen sobre el número total de cartas necesario para formar los castillos, en cuyo caso el término general de la sucesión que forman dichos números es una función cuadrática, lo que aumenta la complejidad.

A veces en las tareas se prescinde de la representación gráfica y se proporciona solamente la secuencia numérica, y la acción consiste en hallar el término general de la misma, como ocurre en los ejemplos incluidos en la imagen 5. En todos estos ejercicios, desde el punto de vista de la inducción, hay que buscar un patrón de comportamiento de los números, hacer la generalización y expresarla algebraicamente, desde

Imagen 4. Torres de cartas

Con las cartas se pueden hacer castillos de diferentes pisos como los de la figura

1 piso 2 pisos 3 pisos 4 pisos

Responder a las preguntas siguientes:
1. ¿Cuántas cartas forman la fila de la base en cada castillo?
2. ¿Cuántas cartas tendrá la fila de la base en un castillo de 10 pisos?
3. ¿Cuántas cartas tendrá la fila de la base en un castillo de *n* pisos?

Imagen 5. Sucesiones numéricas

Halla el término general de las siguientes sucesiones
1. 5, 7, 9, 11, 13, ...
2. -2, -4, -6, -8, -10, ...
3. $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$
4. 1, 8, 27, 64, 125, 216, ...

otro punto de vista. Se puede llegar a la solución utilizando un algoritmo conocido para hallar la expresión del término general.

Los dos últimos ejemplos presentados son propios de libros de texto de aquellos cursos en los que se trabajan las progresiones aritméticas. No es usual que los autores de textos escolares introduzcan actividades que requieran de razonamiento inductivo para su realización, a pesar de su vinculación con la adquisición de conocimiento matemático, como ya hemos argumentado; y cuando se introducen, en gran número de ocasiones, se propone uno a uno la realización de los pasos, indicando al resolutor lo que ha de hacer.

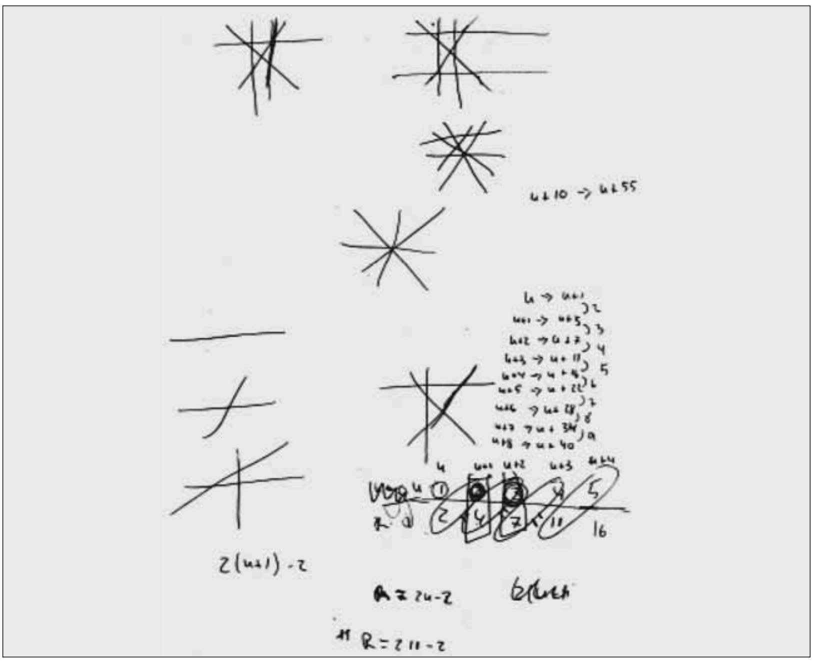
Problemas

Algunas situaciones dan lugar a problemas cuya resolución admite el uso de razonamiento inductivo. A continuación, se presentan dos de dichos problemas. Dependiendo del curso en el que se trabajen, pueden ser problemas no rutinarios, ya que en ninguno de ellos se dan indicaciones para su resolución ni quedan dentro de las situaciones habituales con las que se ejemplifican las estructuras aritméticas.

> **Problema 1**
> En una comunidad que tiene 53 municipios se plantea que todos ellos estén comunicados por carretera de todas las formas posibles. Para ello, van a construir un tramo de carretera entre cada dos municipios. ¿Cuántos tramos de carretera serán necesarios?
>
> **Problema 2**
> Determinar el mayor número de regiones en que queda dividido el plano cuando se considera en el mismo un número dado de rectas

En la imagen 6, se muestra el desempeño de una estudiante de secundaria que trabajó en el problema 2. Se puede observar que comienza a examinar lo que sucede con algunas rectas, organiza los datos obtenidos con dichos casos particulares, identifica un posible patrón y llega a una generalización que expresa, de manera errónea, utilizando lenguaje algebraico.

Imagen 6. Trabajo de una alumna sobre el problema 2 (Cañadas, 2002)



Sugerencias para la enseñanza

Dada la justificada implicación del razonamiento inductivo en la generación del conocimiento matemático, consideramos pertinente que los estudiantes lo trabajen en el aula para ir desarrollando progresivamente las habilidades que se potencian con él. Ya se ha comentado que permite el descubrimiento y la adquisición de conocimiento y, del mismo modo, se introduce al alumnado en los procesos de validación informales, al tratar de validar sus conjeturas y avanzar hacia la obtención de generalizaciones. En el aula el trabajo, debe de realizarse comenzando por los pasos más accesibles como pueden ser tratar con casos particulares e ir avanzando en la búsqueda de patrones, hacer conjeturas y generalizaciones, así como llegar a expresar dichas generalizaciones. En trabajos recientes (Carpenter, Franke y Levi, 2003; Carraher, Martinez y Schlieman, 2008) en los que se enfatiza la importancia de atender a la habilidad de generalizar, para enriquecer la actividad matemática escolar, se ha mostrado cómo, sin conocer ni manejar el simbolismo algebraico, los alumnos de diferentes niveles educativos pueden realizar y expresar generalizaciones trabajando en contextos aritméticos. Radford (2010), que investiga en un contexto de patrones geométricos, propone a estudiantes de primeros cursos de educación secundaria una caracterización para la generalización algebraica. Los resultados que obtiene sustentan la necesidad de que las actividades de razonamiento inductivo sean integradas en la actividad escolar desde los primeros cursos de educación primaria, dando por supuesto que ha de existir una exigencia progresiva en relación al grado de validación de la conjetura y en la rigurosidad con la que ésta es expresada por los alumnos. En nuestras investigaciones hemos constatado el conflicto que les crea a estudiantes de primeros cursos de secundaria el hecho de que la expresión del término general de una sucesión de números esté compuesto de varios elementos (como 2n-1) frente a cada uno de los números de la sucesión que son simples (como 1, 3, 5, 7…) (Castro, 1995). Así mismo, se ha puesto de manifiesto la gran dificultad que presentan alumnos de niveles universitarios para expresar de forma algebraica relaciones numéricas descubiertas por ellos (Trujillo, Castro y Molina, 2009). Es deseable, por tanto, que se les vaya introduciendo en este proceso desde edades tempranas, con la búsqueda de regularidades y en niveles superiores lleguen a establecer generalizaciones así como expresarlas algebraicamente, culminando con la resolución de problemas en cuyo enunciado no se describa el procedimiento a seguir. Este deseo viene justificado por nuestras reflexiones iniciales ya que, desde los diferentes ámbitos referidos en estas páginas, se recomienda que la enseñanza de la matemática fomente habilidades fundamentales en el alumnado, entre ellas, la habilidad para generalizar así como para justificar y expresar sistemáticamente generalizaciones.

Nota

1. Se distingue *inducción* de *inducción matemática* o *inducción completa*. Esta última es considerada una forma de demostrar propiedades matemáticas y, por lo tanto, sólo se utiliza en la ciencia matemática. La coincidencia en el nombre se debe a que, a menudo, se llega a propiedades matemáticas por un proceso de inducción y, posteriormente, se demuestran por el método de inducción completa. (Pólya, 1945)

Referencias bibliográficas

CAÑADAS, C. (2002): *Razonamiento Inductivo puesto de manifiesto por alumnos de secundaria.* Granada. Universidad de Granada.

CAÑADAS C.; CASTRO E. (2004): «Razonamiento Inductivo de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático». *Actas del Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM). La Coruña, pp. 173-182.

CASTRO (1995): *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales.* Granada. Comares.

CARPENTER, T.P.; FRANKE, M.L.; LEVI, L. (2003): *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school.* Portsmouth. Heinemann.

CARRAHER, D.W.; MARTINEZ, M.V.; SCHLIEMAN, A.D. (2008): «Early algebra and mathematical generalization». *ZDM Mathematics Education*, núm. 40, pp. 3-22.

DAVIDOV, V. (1972-1990): «Type of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula», en KILPATRICK (ed.): *Soviet studies in mathematics education.* Vol. 2. Reston. National Council of Teachers of Mathematics.

Diccionario *Enciclopédico Hispano-Americano.* Barcelona. Montaner y Simón, 1887-1898.

DÖRFLER, W. (1991): «Forms and Means of Generalization in Mathematics», en BISHOP, A.J (ed.): *Mathematical Knowledge: Its growth through teaching.* Dor*drecht*. Kluwer Academic, pp. 63-85.

HADAMARD, J. (1947): *Psicología de la invención en el campo matemático.* Buenos Aires. Espasa Calpe.

KAPUT, J. (1999): «Teaching and learning a new algebra», en FENNEMA, E.; ROMBERG, T. (eds.): *Mathematics classrooms that promote understanding*. Mahwah. Erlbaum, pp. 133-155.

KRUTESTSKII V.A. (1976): *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago. University of Chicago Press.

MAHER, C.; MARTINO, A. (1996): «The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study». *Journal for Research in Mathematics Education*, núm. 27(2), pp. 194-214.

MASON, J.; GRAHAM, A.; JOHNSTON-WILDER, S. (2005): *Developing Thinking in Algebra*. Londres. The Open University & Paul Chapman.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM) (2003): *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla. NCTM/Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

PIAGET, J. (1975): *Introducción a la epistemología genética*. Vol. 2. Buenos Aires. Paidós.

POINCARÉ, H. (1902): *Science and Hypothesis.* Nueva York. Dover. [Trad. cast.: BESIO, A.B.; BANTI, J. (1963): *La ciencia y la hipótesis.* Madrid. Espasa-Calpe]

PÓLYA, G. (1945): *How to solve it.* Princeton. University Press. [Trad. cast.: ZUGAZAGOITIA, J. (1965): *Cómo plantear y resolver problemas.* México. Trillas]

— (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid. Tecnos.

POPPER, K. (1967): *Conjeturas y refutaciones. El desarrollo del conocimiento científico.* Barcelona. Paidós.

RADFORD, L. (2010): «Layers of generality and types of generalization in pattern activities». *PNA*, núm. 4(2), pp. 37-62.

TRUJILLO, P.; CASTRO, E.; MOLINA, M. (2009): «Un estudio de casos sobre el proceso de generalización». *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).* Santander, pp. 511-521.

WARING, S.; ORTON, A.; ROPER, T. (1999): «Pattern and proof», en ORTON, A. (ed.): *Pattern in the teaching and learning of mathematics.* Londres. Cassell, pp. 192-206.

WHITEHEAD, A.N. (1911): *An introduction to mathematics.* Londres. Oxford University Press.

YAÑEZ J. (1989). *Epistemología, problemas y métodos en la obra de Piaget* [en línea]. <www.docentes.unal.edu.co/jyanezc/docs/Epistemologia,%20Problemas%20y%20Metodos.pdf>. [Consulta: noviembre 2009]

Referencias de las autoras

Encarnación Castro
María Consuelo Cañadas
Marta Molina
Universidad de Granada
encastro@ugr.es
mconsu@ugr.es
martamg@ugr.es
Líneas de trabajo: pensamiento numérico y algebraico.

Este artículo fue solicitado por UNO. REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS en octubre de 2009 y aceptado en enero de 2010 para su publicación.