La división: mucho más que un algoritmo

Cecilia Calvo
Escuela Sadako.
Barcelona

David Barba
Universidad Autónoma
de Barcelona

Saber dividir no es dominar el algoritmo de la división, sino poder resolver un cierto tipo de problemas utilizando estrategias que no necesariamente han de pasar por la ejecución del algoritmo estándar de la división. En el artículo se propone una secuencia didáctica que, respetando el principio antes expuesto, permita desplazar el aprendizaje del algoritmo como organizador del currículo, en favor de la construcción de estrategias de cálculo en un sentido más amplio. Para acompañar al alumno en el desarrollo de estrategias personales para la resolución de problemas de división, se propone un trabajo específico con estas estrategias y una introducción gradual del algoritmo a partir del estudio de situaciones contextualizadas. Esta propuesta admite la posibilidad de que un alumno que está en una fase previa al dominio del algoritmo estándar pueda igualmente resolver los problemas que se le proponen. Se alienta al alumno a que aplique la versión más comprimida del algoritmo a través de la discusión sobre la optimización de su procedimiento de reparto.

Palabras clave: *estrategias de cálculo*, *algoritmos*, *división*, *currículo.*

Division: much more than an algorithm
Knowing how to divide is not about mastering the division algorithm, but being able to solve certain kinds of problem using strategies that don't necessarily involve carrying out the standard division algorithm. This article sets out a teaching sequence following this principle that shifts learning from the algorithm, as a curriculum organiser, to building wider-ranging strategies for calculating. To accompany students as they develop personal strategies for solving division problems, we set out a specific project with these strategies and a gradual introduction to the algorithm based on studying contextualised situations. This proposal enables students at a previous phase to mastering the algorithm can also solve problems set them. Students are encouraged to apply the most compressed version of the algorithm through discussion on optimising its sharing procedure.

Keywords: *calculating strategies*, *algorithms*, *division*, *primary*, *curriculum.*

Una de las deficiencias de la enseñanza de las matemáticas en primaria es la identificación que se hace entre una operación y su algoritmo (o sea, el procedimiento que se realiza paso a paso para obtener el resultado de la operación). De hecho, los algoritmos son uno de los principales contenidos organizadores de las matemáticas en primaria. Por ejemplo, si preguntamos qué se trabaja en las matemáticas de segundo, la respuesta suele ser «la resta llevando», o en las matemáticas de cuarto, «la división por dos cifras».

Pero una operación como objeto de aprendizaje es mucho más que saber ejecutar un algoritmo: implica reconocer los distintos contextos en que se aplica, usar sus propiedades, identificar regularidades y, sobre todo, implica desarrollar estrategias personales de resolución de los problemas escolares que se plantean asociados a esa operación.

Lo dicho puede aplicarse a cualquiera de las llamadas «cuatro reglas», pero en este artículo nos centraremos en la división.

Dos tipos de problemas asociados a la división

En la línea de reconocer los distintos contextos en que se aplica la división, y que, por tanto, deberían de aparecer en las actividades de clase, encontramos que un mismo cálculo, como por ejemplo 18 : 3, puede ser la forma de resolver dos tipos de problemas bastante diferentes:

- Problemas de reparto, en los que, conociendo el total de elementos a repartir entre un determinado número de grupos, se busca el número de elementos en cada grupo. Por ejemplo:

  > Tengo 18 bombones para repartir entre 3 compañeros. ¿Cuántos bombones recibirá cada uno de ellos? (imagen 1)

- Problemas de agrupamiento, en los que, conociendo el total de elementos a repartir y el número de elementos que tendrá cada grupo, se busca el número de grupos resultantes. Por ejemplo:

  > Tengo 18 bombones y los pongo en bolsas de 3 bombones cada una. ¿Cuántas bolsas llenaré? (imagen 2).

Relación con la multiplicación

La base para entender que los dos problemas anteriores se asocian a la misma división está en la propiedad conmutativa de la multiplicación: dado que 6×3 y 3×6 dan el mismo resultado, 18 se puede descomponer tanto en 6 grupos de 3 elementos cada uno, como en 3 grupos de 6

Imagen 1. Problema de reparto: distribuimos los 18 bombones en 3 grupos y contamos el número de bombones de cada uno

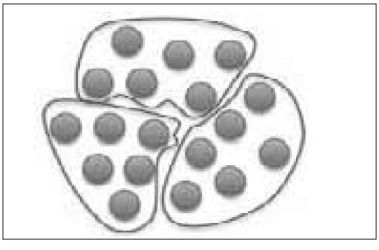
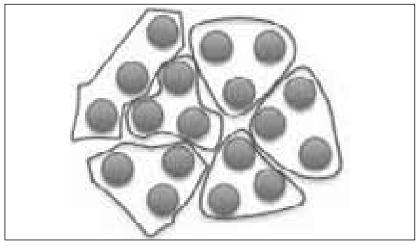


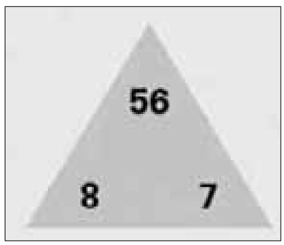
Imagen 2. Problema de agrupamiento: vamos agrupando los 18 bombones de 3 en 3 y contamos el número de grupos resultantes



elementos cada uno. En este sentido, resolver una división es buscar el factor que falta en una multiplicación conociendo uno de los factores y el resultado. Un buen recurso para acercarse a la división como inversa de la multiplicación son los triángulos multiplicativos.

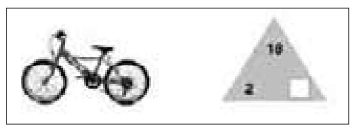
Los triángulos multiplicativos son simplemente una manera de simbolizar una multiplicación escribiendo en los dos vértices inferiores los factores y en el tercer vértice el producto. Los triángulos multiplicativos pretenden ayudar a la encapsulación de los tres números involucrados en una multiplicación. Es decir, saber que $8 \times 7 = 56$ implica poseer como *hechos conocidos* simultáneamente estos tres hechos:

$$7 \times 8 = 56,\ 56 : 7 = 8 \text{ y } 56 : 8 = 7$$

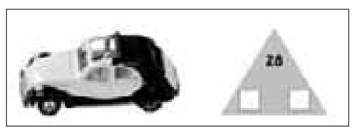


Este proceso de encapsulación debe ser presentado de manera contextualizada, por lo cual desde que se comienza a trabajar la multiplicación, aun antes de mencionar la división, se pueden proponer ejercicios como los siguientes:[1]

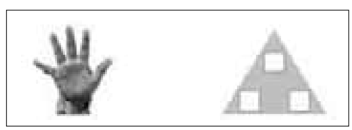
¿Cuántas bicicletas hay si he contado 18 ruedas? Ilustración 2



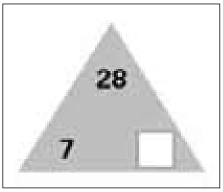
¿Cuántos coches de juguete puedo fabricar con 28 ruedas? Ilustración 3



He contado 15 dedos. ¿Cuántas manos hay? Ilustración 4



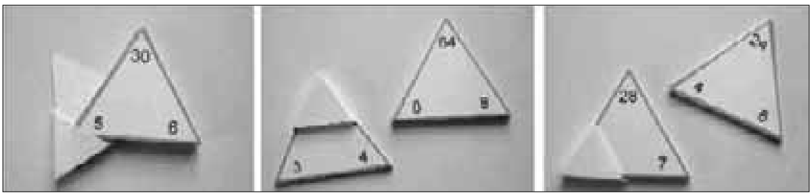
De esta manera, cuando se introduce la notación 18 : 2 = 9 para simbolizar la situación del recuento de bicicletas del primer ejercicio, favorecemos la vinculación entre multiplicación y división que pretendemos destacar con el uso del triángulo multiplicativo.



Y así, la propuesta de resolver un cálculo formal como 28 : 7 se convierte en completar el triángulo siguiente, con un 28 en el vértice superior y un 7 en la base.

El uso de los triángulos multiplicativos nos lleva a la memorización de las tablas de multiplicar, casi en simultáneo, con lo que podríamos llamar tablas de dividir. Un material para trabajar este aspecto son las cartas triangulares que contienen las multiplicaciones desde el 1×1 al 9×9 y se colocan en un dispositivo de cartulina como se muestra en la imagen 3. Si se tapa el vértice superior y preguntamos por el número que no se ve, repasamos las tablas de multiplicar, pero si tapamos uno de los otros dos vértices, repasamos las de dividir.

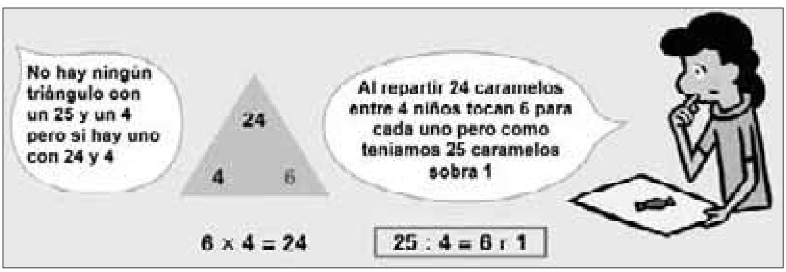
Imagen 3. Cartas triangulares



Problemas «con residuo»

En ocasiones no es posible encontrar ningún triángulo multiplicativo que responda al problema de reparto o agrupamiento que queremos resolver. Por ejemplo, pensemos en el problema:

> Si tenemos 25 caramelos para repartir entre 4 niños ¿cuántos caramelos tocan a cada uno?



En este ejemplo aparece la noción de residuo como el sobrante de un reparto, su verdadero significado antes de la presentación de cualquier algoritmo de la división.

La importancia de los «hechos derivados»

En los párrafos anteriores, hemos recurrido a la estrecha relación existente entre multiplicaciones y divisiones para explotar al máximo la derivación del repertorio de *hechos conocidos* de una de las operaciones hacia la otra. Pero la derivación de hechos nuevos a partir de otros conocidos no acaba aquí. El reconocimiento de las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y residuo son una fuente de regularidades que permiten derivar nuevos hechos a partir de otros conocidos.

Primeras deducciones

Por estas primeras deducciones entendemos la búsqueda de respuesta a preguntas tales como:

- Si se aumenta el divisor en una unidad, ¿varían el cociente y el residuo?
- Si se duplican dividendo y divisor, ¿se modifican el cociente y el residuo? ¿Y si sólo se duplica el dividendo?
- ¿Qué relación existe entre el cociente de un número dividido entre 5 y el mismo número dividido entre 10?

Una manera de llevar a clase estas preguntas es el uso de «tiras»[2] que den lugar a actividades muy cortas en que, a partir del resultado conocido de una operación, los alumnos deben descubrir los otros resultados (cuadro 1).

Las deducciones implicadas en las dos últimas columnas de la imagen 4 se relacionan con dobles y mitades del dividendo o el divisor. Todas las tiras implican deducciones a partir de un hecho dado por el enunciado, pero las de la tercera columna tienen la potencialidad de ser usadas fuera del contexto de la actividad con tiras, cada vez que el

Cuadro 1. Tiras de actividades de deducción

39 : 6 = 6 r 3
40 : 6 =
40 : 6 =
40 : 6 =
40 : 6 =

141 : 3 = 47
282 : 6 =

205 : 4 = 51 r 1
410 : 4 =

130 : 10 = 13
130 : 10 = 13

242 : 10 = 24 r 2
242 : 5 =

alumno se enfrente a una división entre 5, puede recurrir a una división entre 10 para derivar el resultado buscado.

Estrategia de descomposición

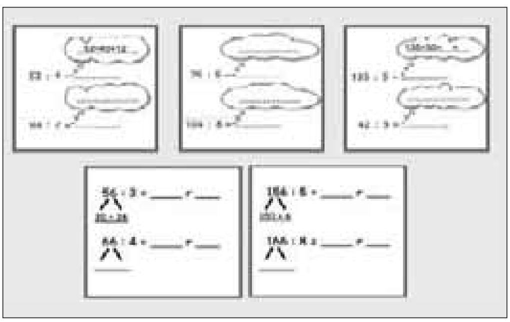
La estrategia de descomposición juega un papel muy importante al momento de sumar, de restar y de multiplicar mentalmente. Por ejemplo, sabemos que:

- 37 + **54** = 37 + **50** + **4** = 87 + 4 = 91
- 73 – **26** = 73 – **20** – **6** = 53 – 6 = 47
- **12** × 8 = **10** x 8 + **2** × 8 = 80 +16 = 96

Pero la descomposición también es una estrategia fundamental cuando tenemos que efectuar una división mentalmente ya que permite resolverla sin necesidad de utilizar el algoritmo:

- **378** : 4 = **360** : 4 + **18** : 4 = 90 + (4 r 2) = 94 r 2

Imagen 4. Ejercicios de descomposición



Los ejercicios[3] que aparecen en la imagen 4 son un buen ejemplo de cómo alentar al uso de estas descomposiciones desde un cuaderno de cálculo.

Lo primero que cabe destacar es que, mientras en la multiplicación, la suma y la resta, la descomposición más conveniente es la descomposición decimal (54 = 50 + 4, 26 = 20 + 6, 12 = 10 + 2), aquí la descomposición aditiva más eficiente es la de intentar expresar el dividendo como suma de múltiplos del divisor.

- En los cuadros superiores de la imagen 6, la descomposición es posible. Por ejemplo, para dividir 52 entre 4 se descompone el dividendo como 40 + 12, dos números que fácilmente se identifican como resultados de la tabla del 4 (aunque también la descomposición puede hacerse en más de dos sumandos como se propone para 135 : 5)
- Pero en los cuadros inferiores de la misma imagen, la descomposición aditiva del dividendo en múltiplos del divisor es imposible. En estos casos, la descomposición debe tener un único sumando que no sea múltiplo del divisor. Por ejemplo, para dividir 66 entre 4, se puede descomponer 66 como 40 + 20 + 6, dos múltiplos de 4 y un tercer número que permite calcular mentalmente el residuo que deja al ser dividido entre 4.

Algoritmos

Antes de introducirnos en este aspecto, cabe recordar que un alumno sabe dividir cuando sabe resolver los problemas escolares que implican una división, independientemente de si domina o no el algoritmo asociado a esta operación. Puede hacerlo usando triángulos multiplicativos, descomposiciones u otros procedimientos personales y el algoritmo ha de presentarse como una de las posibles maneras de sistematizar el procedimiento que la sociedad ha considerado más eficiente hasta el momento. Es decir, el punto clave para el maestro es tener presente la distinción entre saber dividir y saber ejecutar el algoritmo de la división.

Para realizar una operación hay disponibles diferentes algoritmos. Ni siquiera el que consideramos algoritmo estándar lo ha sido desde siempre, ni es el mismo en todos los lugares del mundo.

A veces, las diferencias son simplemente de apariencia. En algunos países de Europa, al realizar una división escriben el divisor a la izquierda del dividendo, en otros dejan siempre explicitadas las restas parciales. En la imagen 5 vemos tres maneras diferentes de registrar un procedimiento que en esencia es el mismo.

Podemos detectar diferencias más profundas en el algoritmo de la división si estudiamos algoritmos usados en el pasado como la división egipcia o la división a la francesa.[4]

División en columnas

Habiendo asumido la existencia de diversos algoritmos asociados a una misma operación, cabe preguntarse con qué criterio elegimos cuál será el que usaremos en nuestras clases para cada una de las cuatro operaciones aritméticas. Creemos que los criterios más relevantes que deberían intervenir en esta decisión son la eficiencia del procedimiento, la transparencia de su justificación y su potencial en relación a futuros aprendizajes.

En un marco de construcción del aprendizaje por parte de los alumnos se acude a la contextualización. Esto sucede mayoritariamente en el momento de presentar un concepto, pero no pasa lo mismo en el momento de enseñar un algoritmo. Por regla general, empezamos directamente por contar cómo se realiza, sin darle contexto ni transparencia (o sea, sin buscar que el alumno entienda por qué ese procedimiento da respuesta al problema de encontrar el resultado de la operación).

Imagen 5. Tres maneras de registrar una división

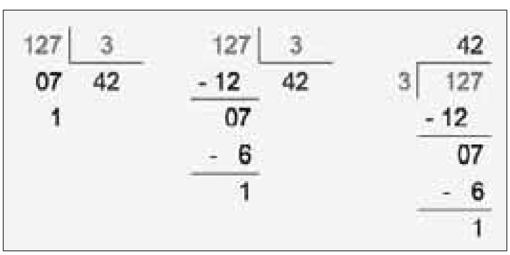


Imagen 6. Transcripción simbólica de una división en columnas

1) Empieza repartiendo 10 naipes a cada uno

2) En total se reparten 30 naipes, por lo que ya sólo quedan 97 por repartir

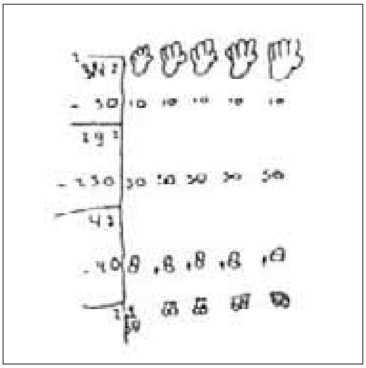
3) En la segunda vuelta se reparten 30 naipes a cada uno

4) En total se reparten 90 naipes, por lo que ya sólo quedan 7 por repartir

5) Al quedar 7 sólo se pueden rapartir 2 naipes a cada uno

127	Luis	Paco	Hugo
-30	10	10	10
97			
-90	30	30	30
7			
-6	2	2	2
1	42		

Imagen 7. Registro de una división realizada por un alumno



Creemos que el algoritmo que presentamos a continuación[5] cumple con los criterios antes mencionados para el caso de la división.

La construcción del cálculo en columnas aparece como un simple registro ordenado de los cálculos mentales que la operación requiere en cada caso: mientras uno de los alumnos efectúa un reparto,[6] por ejemplo: «Repartir 127 naipes entre tres amigos Luis, Paco y Hugo», se va registrando en la pizarra colectivamente su trascripción simbólica tal como aparece en la imagen 6.

Al final del proceso ilustrado se repartieron 42 naipes a cada uno de los tres amigos y sobró 1.

En la imagen 7[7] aparece el registro de una división (342 : 5) realizada por un alumno frente a un problema de reparto con contexto.

Imagen 8. Primera abreviación de una división en columnas

127	Luis	Paco	Hugo
-30	10	10	10
97			
-90	30	30	30
7			
-6	2	2	2
1	42		

127	entre 3
-30	10
97	
-90	30
7	
-6	2
1	42

Imagen 9. Segunda abreviación de una división en columnas

127	entre 3
-30	10
97	
-90	30
7	
-6	2
1	42

127	entre 3
-120	40
7	
-6	2
1	42

Compresión de procesos

Evidentemente, este primer modelo es poco eficaz y necesitaríamos dotarnos de una expresión más breve, lo que nos lleva a intentar abreviar el proceso realizando sucesivas compresiones.

Una primera abreviación para este registro: no importa quiénes son las personas sino cuántas son, por lo tanto, la expresión «entre 3» nos reduce el número de columnas, tal como se muestra en la imagen 8.

La siguientes abreviaciones para este registro pasan por repartir «menos veces» dando «más naipes» cada vez (imagen 9).

Si en el momento de resolver un problema, dos de nuestros alumnos nos presentan los dos modelos anteriores, podemos afirmar que los dos alumnos saben dividir, aunque uno de ellos es más eficaz que el otro. Esto nos acerca a la atención a la diversidad, pensamos que es un objetivo para todos los niños que posean la habilidad de saber resolver una división con lápiz y papel, pero creemos que no es comunitario el hecho que todos tengan que llegar al algoritmo más eficaz.

Observamos que el algoritmo estándar no permite esta flexibilidad: sólo existe la manera óptima y lo resuelves óptimamente o no lo resuelves. Eso no quita que, como maestros, debamos intentar que cada alumno llegue a resolver las divisiones propuestas de la manera más eficaz posible. De todas maneras, las similitudes de apariencia entre la forma más comprimida del algoritmo en columnas (parte derecha de la imagen 9) y el algoritmo estándar con la resta explicitada (parte central de la imagen 6) son notables. Por ello, la continuación natural del trabajo en el aula es la asociación entre el algoritmo construido por los alumnos con el pactado socialmente como estándar.

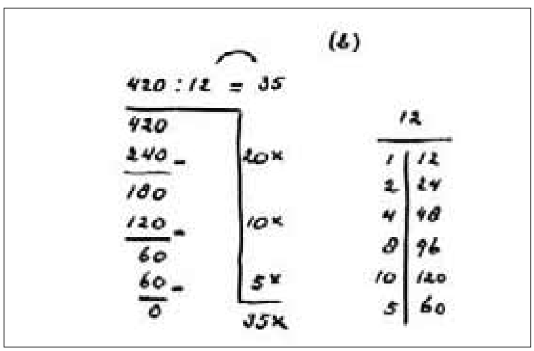
Otras ventajas del cálculo en columna

- El algoritmo en columnas trabaja con cantidades y no con dígitos, este hecho le confiere mayor transparencia que la del algoritmo estándar, durante la ejecución del cual son comunes frases difíciles de justificar de cara al alumno (por ejemplo, cuando decimos «bajo el 7» al dividir 127 entre 3).
- En la imagen 10 podemos observar que este procedimiento de división en columna no exige ningún ajuste en el pasaje de divisores de una a dos cifras.

Imagen 10. División en columnas

4368	24
- 2400	100
1968	
- 1200	50
768	
-720	30
48	
- 48	2
0	182

Imagen 11. Ejecución de una división en columnas con anotaciones de apoyo

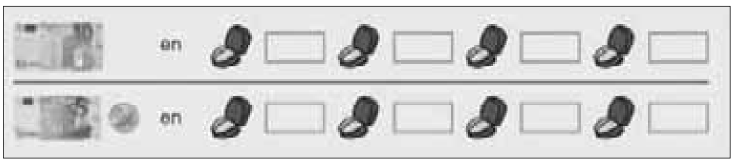


- En la imagen 11[8] podemos ver la ejecución de una división en columnas con anotaciones de apoyo. Estas anotaciones que aparecen a la derecha indican algunos múltiplos del divisor que pueden ayudar al alumno en el momento de contabilizar el reparto. Los múltiplos elegidos surgen de hacer duplicaciones, mitades y multiplicar por 10.
- Este procedimiento de división en columna tampoco exige ningún ajuste en el pasaje a dividendos en base sexagesimal.

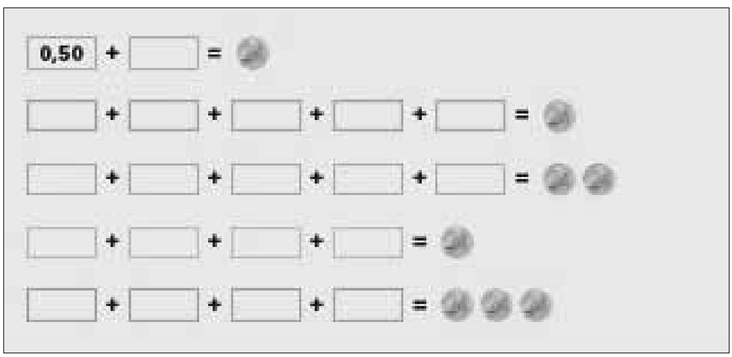
Divisiones decimales

Las siguientes tareas de reparto dan un contexto diferente para la división, un contexto donde se da sentido a cocientes decimales:

- Reparte 10 € y 6 € en cuatro monederos de maneras que en todos haya la misma cantidad de dinero



- Completa las sumas de manera que en los cuadros del mismo color haya la misma cantidad de dinero



Podemos observar que las divisiones involucradas en las dos tareas anteriores son 10 : 4 = 2,50 € y 6 : 4 = 1,25 € en el primer caso y 1 : 2 = 0,50 €, 1 : 5 = 0,20 € y 2 : 5 = 0,40 € en el segundo.

Si nos preguntan cómo repartimos 14 libros entre 4 niños tiene sentido dar como respuesta: damos 3 libros a cada niño y sobran 2. Es lo

Imagen 12. Extensión del procedimiento de división a los decimales

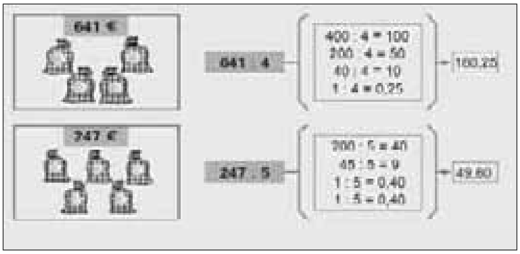
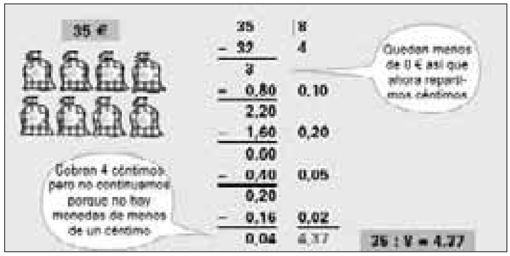


Imagen 13. Extensión de la división en columnas a los decimales



que llamamos una división entera: dados dos números enteros positivos, dividendo y divisor (este último diferente de cero), existen otros dos números enteros positivos, cociente y resto (este último menor que el divisor) tales que el divisor por el cociente más el resto dan el dividendo. Pero si lo que estamos repartiendo son 14 euros entre 4 personas o 14 kilos de trigo en 4 sacos no tiene sentido no repartir el «residuo» y es así que nos resulta que a cada persona le tocan 3,50 € o que en cada saco ponemos 3,5 kg de trigo.

Las habilidades trabajadas en las tareas anteriores junto con la estrategia de descomposición permiten extender el procedimiento a los decimales tal como aparece en la imagen 12.

También podemos extender la división en columnas a los decimales. Veamos como ejemplo la resolución del siguiente problema: Repartir 35 € en 8 bolsas de manera que en todas haya la misma cantidad de dinero (imagen 13).

Evidentemente, es mucho más rápido explicar que la manera de continuar la división es «poner la coma y bajar ceros», pero la falta de transparencia implicada en esta práctica es la principal responsable de la concepción que tienen algunos adultos de la matemática como una disciplina en la que lo fundamental es la memorización y la aplicación de misteriosas reglas.

Residuo, prueba y calculadora

La verificación del resultado de una operación sin tener que realizarla de nuevo ha acompañado la práctica escolar durante muchos años siendo sus principales protagonistas las llamadas pruebas. En el caso de la división, la prueba consiste en verificar que el dividendo coincide con el resultado de multiplicar divisor por cociente y sumarle el resto. La prueba del nueve ya era una forma de abreviar esta verificación, pero la aparición de las calculadoras hizo que estas pruebas carecieran de otro sentido que el de ejercitar la multiplicación.

Sin embargo, reflexionar sobre las propiedades que sustentan estas pruebas brinda situaciones interesantes para discutir. Por ejemplo, permiten descubrir al alumno cómo calcular el residuo de una división usando la calculadora. Este descubrimiento adquiere interés frente a problemas de la vida cotidiana como el cálculo de la letra del DNI, para el cual debe hallarse el residuo de la división del número del DNI entre 23 y posteriormente mirar en una lista a que letra corresponde.[9] Por ejemplo: si el número del DNI fuera 12345678, al efectuar la división con la calculadora el resultado es 536768,609... y tenemos dos maneras de saber el residuo:

- Multiplicamos por 23 la parte entera del resultado (que es el cociente de la división) y calculamos cuánto falta para llegar al dividendo
- Multiplicamos por 23 la parte decimal del resultado (0,609 en este caso). Este segundo camino, al no ser tan transparente, requiere discutir en el aula la razón por la que obtenemos el residuo de esta manera.

Por ambos caminos llegamos al 14 como residuo, lo que nos lleva a la letra Z.

Aunque posiblemente se trate de un tema más propio de secundaria que de primaria, el análisis de la prueba del 9 brinda la posibilidad de investigar sobre residuos en el caso de las divisiones entre 9 y otras cuestiones de divisibilidad.

Experiencia escolar: implicaciones y riesgos

Desplazar los algoritmos como organizadores del currículo en favor de la aritmética mental puede provocar algún rechazo debido a la opinión que tiene la sociedad sobre el protagonismo de los algoritmos aritméticos en la escuela.

Sarramona y Pintó[10] publicaron un importante estudio cuyo objetivo era la identificación de las competencias básicas que el alumnado debería dominar al acabar la escolarización obligatoria, en base a la consulta a colectivos representativos del ámbito escolar y sociolaboral. En relación con las matemáticas, el estudio concluye que la operatoria aparece como competencia básica en diversas formas, insistiendo en el conocimiento de las cuatro reglas.

Después de un análisis crítico de los resultados de este estudio, el Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya decidió no incluir la ejecución de algoritmos en las pruebas de competencias que se aplicaron a los alumnos de primaria desde el año 2001 hasta el 2008. A pesar de la clara señal que se intentó dar con estas pruebas, al desplazar los algoritmos del centro de la actividad matemática escolar, nos podemos encontrar con reservas por parte de padres, alumnos e incluso maestros.

Un par de ejemplos pueden ilustrar lo que queremos exponer:

> Cuando Mariana, una alumna de quinto, resuelve una división por dos cifras, raras veces equivoca el resultado. En la escuela le han enseñado el algoritmo estándar, pero ella las resuelve mediante unos cálculos que involucran multiplicaciones parciales. Cuando le preguntamos sobre qué opina su maestra sobre su método nos contesta «no dice nada, yo los cálculos los hago en borrador y en limpio lo pongo como ella dice».
>
> Una mañana, Mireia, una alumna de cuarto, entre sollozos, dice a su maestra, con la que está trabajando la construcción del algoritmo en columnas de la división: «María,[1] di a mi padre que no me enseñe a dividir, él dice que su manera es más corta, pero yo no lo entiendo».

El escenario idóneo para avanzar en el desplazamiento de los algoritmos del centro que hasta ahora ocupaban es una clase donde las explicaciones se convierten en retos, donde se pasa de decir «esto se resuelve así» a preguntar «¿y tú, cómo lo resolverías?». Pero, para asumir el riesgo que esto representa, el maestro necesita contar con el apoyo y la confianza de los padres y del entorno escolar.

Conclusión

Lo que planteamos en este artículo no es únicamente la posibilidad de trabajar la división en un estilo más cercano al «pensamiento matemático» (lo que por sí mismo ya valdría la pena) sino que pensamos que éste es el camino para cambiar el papel preponderante de los algoritmos como contenidos organizadores del currículo.

Creemos que quien debe organizar el currículo habría de ser la aritmética mental, cuyo objetivo es asegurar que los alumnos sean capaces de resolver cualquier problema aritmético utilizando estrategias que no necesariamente deban pasar por la ejecución de un algoritmo. Tan importante es conseguir este objetivo como la trayectoria de aprendizaje que se recorre para conseguirlo, una trayectoria que tiene como base la contextualización de las situaciones problemáticas de partida y la construcción de las soluciones por parte del grupo de alumnos.

Notas

1. Este ejemplo, al igual que el de las imágenes 6, 16, 17, 18 y 19 fueron extraídos de D. BARBA y C. CALVO (2005), *3x6.mat. Quaderns d'estratègies de càlcul*, Barcelona, Barcanova.

2. La idea del uso de estas tiras se inspira en el capítulo 8 de C.T. FOSNOT y M. DOLK (2001), *Young mathematicians at work: constructing number sense, addition, and subtraction*, Portsmouth, Heinemann.

3. Extraídos de libros escolares holandeses: F. BAAS (2003), *RekenRijk 6a Werkboek*, Groningen, Wolters-Noordhoff.

4. Se pueden ver ejemplos de estos algoritmos en la páginas 437 y 1311 de G. IFRAH (1998), *Historia universal de las cifras: la inteligencia de la humanidad contada por los números y el cálculo,* Madrid, Espasa.

5. Inspirada en la propuesta que aparece en el capítulo «Cálculo en columna y algoritmos» de M. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN (ed.) (2001), *Children learn mathematics*, Utrecht, Freudenthal Institute, Utrecht University. Este libro será editado próximamente en castellano.

6. Ya hemos comentado que la propiedad conmutativa de la multiplicación hace que, aunque tengamos un problema de agrupamiento, la división que éste implica la podemos resolver como si fuera de reparto.

7. Extraída de M. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN (2002), «Realistic mathematics education as work in progress», en: FOU-LAI LIN (eds.), *Common sense in Mathematics education: Proceedings of 2001, The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education,* pp. 1-43. También en *www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/4966.pdf*

8. Extraída de M. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN (ed.) (2001).

9. Se puede encontrar más información sobre este problema, por ejemplo, en la página 64 de J. GÓMEZ (2000), *L'altra cara de les matemàtiques,* Vilanova i la Geltrú, El Cep i la Nansa.

10. J. SARRAMONA y C. PINTÓ (2000), «Identificació de les competències bàsiques en l'ensenyament obligatori», *Educar*, núm. 26, pp. 97-124.

11. Maria Roca Parpal es una maestra que ha llevado a término esta propuesta con sus alumnos de cuarto, a quien agradecemos los valiosos comentarios que nos ha hecho en relación a versiones preliminares de este artículo.

Referencias de los autores

Cecilia Calvo
Escuela Sadako. Barcelona
ccalvopesce@gmail.com
David Barba
Universidad Autónoma de Barcelona
david.barba@uab.es
Líneas de trabajo: formación del profesorado, didáctica de la aritmética en primaria.

Este artículo fue solicitado por UNO. REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS en octubre de 2009 y aceptado en febrero de 2010 para su publicación.